

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Ильшат Ринатович Мухаметзянов

Должность: директор

Дата подписания: 13.07.2023 12:35:18

Уникальный идентификатор документа: aba80b84033c9ef196388e9ea0434f90a87a40954ba279e84bche64f02d1d8d0

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
образования «Казанский национальный исследовательский технический

университет им. А.Н. Туполева-КАИ»

(КНИТУ-КАИ)

Чистопольский филиал «Восток»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ**

по дисциплине

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

Индекс по учебному плану: **Б1.О.07.02**

Направление подготовки: **09.03.01 Информатика и вычислительная техника**

Квалификация: **Бакалавр**

Профиль подготовки: **Вычислительные машины, комплексы, системы и сети**

Типы задач профессиональной деятельности: **проектный, производственно-технологический**

Рекомендовано УМК ЧФ КНИТУ-КАИ

Чистополь 2023 г.

Целью самостоятельной работы обучающихся является обучение навыкам работы с научно-теоретической литературой и практическими материалами, необходимыми для углубленного изучения дисциплины, а также развитие у них устойчивых способностей к самостоятельному изучению и изложению полученной информации.

Учебным планом предусмотрена самостоятельная работа студентов:

Таблица – Объем дисциплины по разделам

1 семестр

№ п/п	Наименование изучаемого раздела	Всего	Объем дисциплины для самостоятельной работы
1	Введение в математический анализ. Элементы теории множеств и функций	25	12
2	Теория пределов и непрерывность функции	27	10
3	Дифференциальное исчисление функции одной переменной с элементами дифференциальной геометрии	39	12
4	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	28	14
5	Интегральное исчисление функций одной переменной	29	16

2 семестр

№ п/п	Наименование изучаемого раздела	Всего	Объем дисциплины для самостоятельной работы
1	Интегральное исчисление функции нескольких переменных	25	6
2	Векторный анализ	15	9
3	Дифференциальные уравнения	22	10
4	Числовые и функциональные ряды	26	8
5	Ряды Фурье	20	11

## 1 семестр

### 1. Введение. Элементы теории множеств и функций.

Предмет математического анализа. Понятие множества и подмножества. Пустое множество. Множество всех подмножеств множества. Операции над множествами. Декартово произведение множеств. Соответствие, отношение, бинарное отношение. Взаимно однозначное соответствие. Эквивалентные множества, счетные и несчетные множества. Элементы математической логики: логические символы, утверждение, следствие, прямая и обратная теоремы, необходимые и достаточные условия. Понятие отображения (функции), его области определе-

ния и области значений. Элементарные функции. Обратное отображение. Композиция отображений. Множество всех действительных чисел и множество всех точек числовой прямой, эквивалентность этих множеств. Свойства действительных чисел. Подмножества множества действительных чисел. Ограниченные (сверху, снизу) и неограниченные (сверху, снизу) множества. Наибольший (наименьший) элемент множества. Верхняя (нижняя) грань множества. Теорема о существовании верхней (нижней) грани. Понятие окрестности действительного числа (точки) и окрестности с выколотым центром. Понятие предельной точки точечного множества на числовой прямой. Внутренние и граничные точки. Множества плотные в себе, совершенные множества. Открытые и замкнутые множества.

## 2. Предел и непрерывность функции одной переменной.

Примеры последовательностей. Предел числовой последовательности. Существование предела у ограниченной монотонной последовательности. Лемма о вложенных отрезках. Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности. Лемма о существовании предельной точки у ограниченного бесконечного множества на числовой оси. Предел функции одной переменной. Односторонние и двусторонние пределы. Бесконечно малые (бесконечно большие) величины и их связь с пределами функций. Функции одной переменной, не имеющие предела в точке и на бесконечности. Свойства операции предельного перехода. Предельный переход в сложной функции. Первый и второй замечательные пределы. Второй замечательный предел в задаче о начислении процентов. Символы  $o$ -малое и  $O$ -большое и их использование для раскрытия неопределенностей. Непрерывность функции в точке и на множестве. Односторонняя непрерывность. Точки разрыва и их классификация. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность основных элементарных функций. Непрерывность сложной функции. Верхняя (нижняя) грань, глобальный максимум (минимум) функции в ее области определения. Теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши о непрерывной на отрезке функции. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции у строго монотонной функции, непрерывной на отрезке. Равномерная непрерывность функции и теорема Кантора.

Понятие производной функции одной переменной. Геометрическая интерпретация производной. Уравнение касательной. Понятие дифференцируемой функции. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Связь непрерывности и дифференцируемости функции одной переменной. Производная суммы, произведения, частного, сложной и обратной функции. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Производные основных элементарных функций. Понятие дифференциала функции одной переменной. Геометрическая интерпретация дифференциала. Свойства дифференциала. Инвариантность формы первого дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков функции одной переменной и их свойства.

## 3. Исследование дифференцируемых функций одной переменной.

Понятие об экстремумах функции одной переменной. Локальный экстремум (внутренний и граничный) функции одной переменной. Необходимое условие внутреннего локального экстремума (теорема Ферма). Теоремы о среднем значении (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши) и их геометрическая интерпретация. Правило Лопиталя. Формулы Тейлора и Маклорена и их использование для представления и приближенного вычисления значений функций. Достаточное условие строгого возрастания (убывания) функции на интервале. Достаточные условия локального экстремума функции одной переменной. Выпуклые (вогнутые) функции одной переменной. Необходимое и достаточное условие выпуклости (вогнутости). Точка перегиба. Необходимое и достаточное условия точки перегиба. Вертикальные и неvertикальные асимптоты графика функции одной переменной. Исследование функции одной переменной с использованием первой и второй производных и построение ее графика. Определение глобального максимума (минимума) функции одной переменной в области ее определения.

#### 4. Функции нескольких переменных (ФНП).

Понятие  $n$ -мерного евклидова пространства. Понятие окрестности точки, окрестности с выколотым центром. Понятие предельной, внутренней и граничной точек точечного множества на плоскости и в  $n$ -мерном пространстве. Открытые и замкнутые множества на плоскости и в  $n$ -мерном пространстве. Выпуклые и невыпуклые множества на плоскости и в  $n$ -мерном пространстве. Понятие расстояния. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника. Множества связные, несвязные, ограниченные, неограниченные. Последовательность точек на плоскости и в  $n$ -мерном пространстве. Понятие ограниченной и неограниченной последовательности точек.

Функции двух переменных. Понятие о множестве (линии) уровня функции двух переменных. Обобщение на случай функций нескольких переменных. Предел функции нескольких переменных. Арифметические операции над функциями, имеющими конечные предельные значения. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и на множестве. Точки непрерывности и точки разрыва функции.

Частные производные и частные дифференциалы. Дифференцируемость ФНП. Главная линейная часть приращения ФНП. Полный дифференциал ФНП. Достаточное условие дифференцируемости ФНП. Геометрическая интерпретация частных производных. Касательная плоскость к графику ФНП. Дифференцируемость сложных ФНП. Инвариантность формы дифференциала ФНП. Частные производные и дифференциалы порядка выше первого. Теорема о равенстве смешанных частных производных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Формулы для частных производных и дифференциалов неявных функций.

Экстремум ФНП (абсолютный, условный, локальный, глобальный). Необходимое условие локального абсолютного экстремума. Достаточное условие локального абсолютного экстремума. Выпуклые и строго выпуклые функции. Экстремум выпуклой функции. Функция Лагранжа и множители Лагранжа для задачи на условный экстремум. Необходимое условие локального условного экстремума

и его геометрическая интерпретация. Достаточное условие локального условного экстремума.

### 5. Интегральное исчисление функций одной переменной.

Первообразная. Неопределенный интеграл. Первая основная теорема интегрального исчисления (о существовании первообразной у непрерывной функции). Свойства неопределенного интеграла. Интегралы от основных элементарных функций. Табличные интегралы. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Многочлены. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители. Разложение рациональных дробей на простейшие. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных функций. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Интегральная сумма Римана, определенный интеграл и его геометрическая интерпретация. Интегральные суммы Дарбу. Свойства определенного интеграла (связанные с подынтегральной функцией, с отрезком интегрирования). Теорема о среднем значении. Определенный интеграл с переменным верхним пределом и его производная по этому пределу. Формула Ньютона-Лейбница. Вторая основная теорема интегрального исчисления (о существовании определенного интеграла у непрерывной функции). Интегрируемые по Риману функции. Замена переменной и формула интегрирования по частям для определенного интеграла. Несобственные интегралы. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Признаки сходимости.

## 2 семестр

### 1. Интегральное исчисление функции нескольких переменных.

Двойной и тройной интегралы, их свойства. Сведение кратного интеграла к повторному. Понятие  $n$ -кратного интеграла. Замена переменных в кратных интегралах. Полярные, цилиндрические и сферические координаты. Криволинейные интегралы. Их свойства и вычисление. Понятие поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы Их свойства и вычисление. Геометрические и механические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.

### 2. Векторный анализ.

Скалярное и векторное поле. Циркуляция векторного поля вдоль кривой. Поток поля через поверхность. Формула Гаусса-Остроградского. Дивергенция векторного поля, ее физический смысл. Формула Стокса. Ротор векторного поля, его физический смысл. Потенциальное поле, его свойства. Условие потенциальности. Нахождение потенциала.

### 3. Дифференциальные уравнения.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка, разрешенные и не разрешенные относительно производной. Задачи Коши. Формулировка теоремы о суще-

ствовании и единственности решения задачи Коши. Численные методы решения задачи Коши для дифференциального уравнения (метод Эйлера, метод Рунге-Кутты). Дифференциальные уравнения высших порядков. Типы дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и методы их интегрирования. Системы дифференциальных уравнений. Линейные системы дифференциальных уравнений. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и методы их интегрирования.

#### 4. Числовые и функциональные ряды.

Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости. Знакопеременные ряды, ряды с комплексными членами. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов: непрерывность суммы ряда, почленное дифференцирование и интегрирование. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Приложение рядов.

#### 5. Ряды Фурье.

Ортогональные системы функций. Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Тригонометрический ряд Фурье. Разложение в тригонометрические ряды. Ряд Фурье для четных и нечетных функций. Тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме. Определение интеграла Фурье. Представление функций интегралом. Интеграл Фурье для четных и нечетных функций. Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье

### Основная литература

1. Берман Г.Г. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие / Г.Г. Берман. – Санкт-Петербург: Лань, 2020. – 492 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – текст непосредственный. ISBN 978-5-8114-4862-3

<https://e.lanbook.com/book/126705?category=910>

2. Семина М.А. Интегральное исчисление функции одной и многих переменных. Сборник задач. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2017 с.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник: в 3 томах / Г.М. Фихтенгольц. – 14-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2020. – Том 2. – 800 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – текст непосредственный. ISBN 978-5-8114-4865-4 (Общий) ISBN 978-5-8114-4866-1 (Том 2)

<https://e.lanbook.com/book/126708?category=910>

4. Семина М.А. Интегральное исчисление функции одной и многих переменных. Сборник задач. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2017.

### **Дополнительная литература**

1. Будаев В.Д. Математический анализ. Функции нескольких переменных: Учебник. – СПб.: Издательство «Лань», 2017. – 456 с.: ил.- (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-2595-2

<https://e.lanbook.com/book/96244?category=910>

2. Гарбарук В.В. Решение задач по высшей математике. Интенсивный курс для студентов технических вузов / В.В. Гарбарук, В.И. Родин, М.А. Шварц. – Санкт-петербург: Лань, 2020.- 444с.; ил.- Текст: непосредственный. ISBN 978-5-8114-4669-8

<https://e.lanbook.com/book/142327?category=906>

3. Ельчанинова Г.Г. Элементы высшей математики. Типовые задания с примерами решений: учебное пособие / Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников.- Санкт-петербург: Лань, 2020.- 92с.; ил.- Текст: непосредственный. ISBN 978-5-8114-4670-4

<https://e.lanbook.com/book/139329?category=906>

4. Карасева Р.Б. Ряды: Учебное пособие.- 3-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2018. – 140 с.: ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-2053-7

<https://e.lanbook.com/book/100923?category=910>

5. Марон И.А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. Функции одной переменной: Учебное пособие. 3-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2018. – 400 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 978-5-8114-0849-8

<https://e.lanbook.com/book/254?category=910>

### **Методические материалы**

Методические материалы к практическим занятиям по дисциплине «Математический анализ» в электронном виде (место хранения кафедра естественнонаучных дисциплин).

**Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», профессиональных баз данных, информационно-справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

1. Электронно-библиотечная система учебной и научной литературы. URL: <https://e.lanbook.com/>.

2. Электронно-библиотечная система учебной и научной литературы. URL: <http://znanium.com/>.

3. Электронно-библиотечная система учебной и научной литературы. URL: <https://urait.ru/>.

4. Научно-техническая библиотека КНИТУ-КАИ. URL: <http://library.kai.ru/>.

5. Единое окно доступа к информационным ресурсам. URL: <http://window.edu.ru/resource/386/79386>, <http://window.edu.ru/resource/034/77034>, <http://window.edu.ru/resource/452/77452>.