

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Ильшат Ринатович Мухаметзянов

Должность: директор

Дата подписания: 13.07.2023 12:35:18

Уникальный программный ключ:

aba80b84033c9ef196388e9ea0434f90a83a40954ba270e84bcbe64f02d1d8d0

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Казанский национальный исследовательский  
технический

университет им. А.Н. Туполева-КАИ»

(КНИТУ-КАИ)

Чистопольский филиал «Восток»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

по дисциплине

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

Индекс по учебному плану: **Б1.О.07.02**

Направление подготовки: **09.03.01 Информатика и вычислительная техника**

Квалификация: **Бакалавр**

Профиль подготовки: **Вычислительные машины, комплексы, системы и сети**

Вид профессиональной деятельности: **проектно-конструкторская,  
проектно-технологическая**

Чистополь

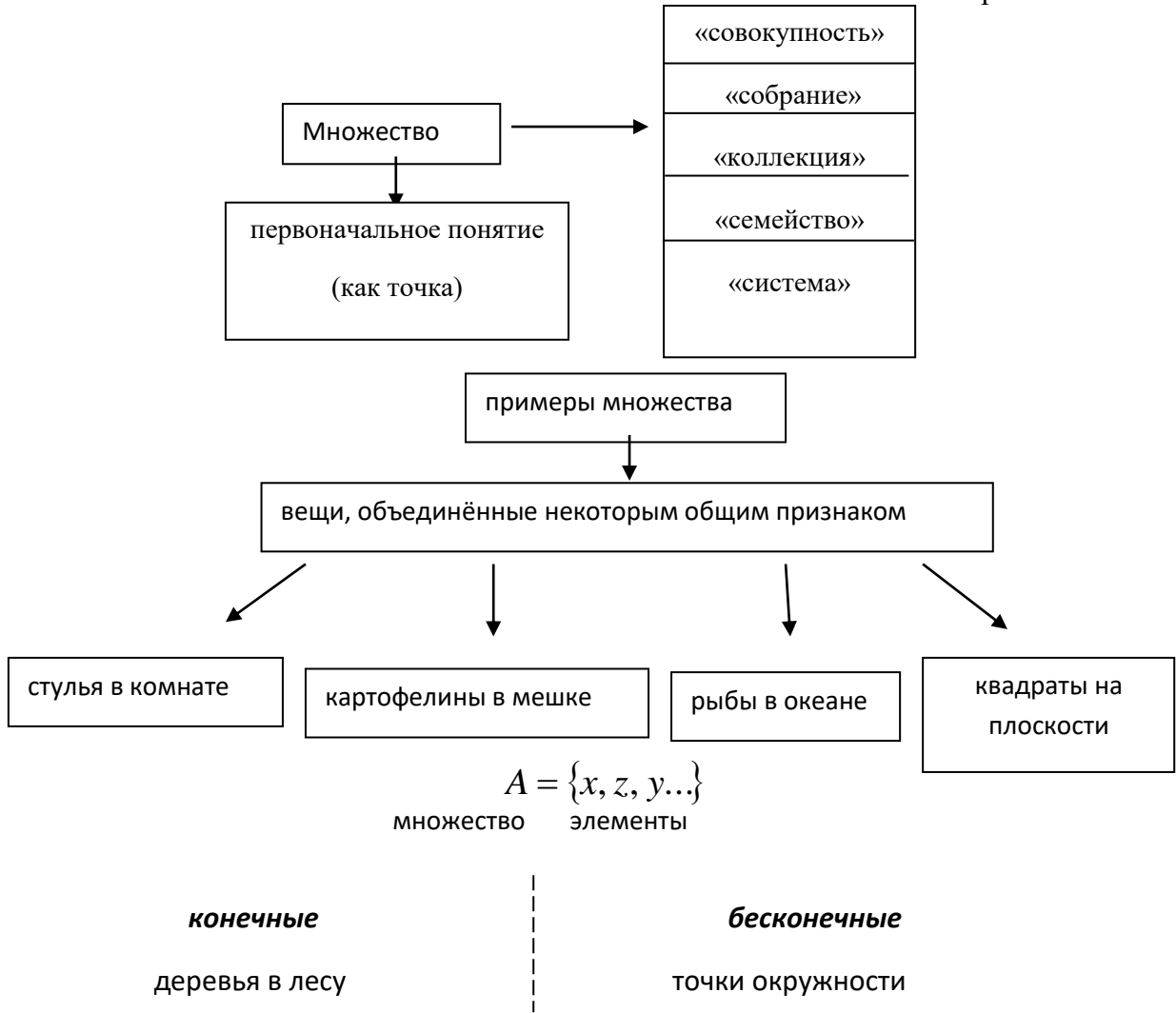
2022 г.

## Первое практическое занятие

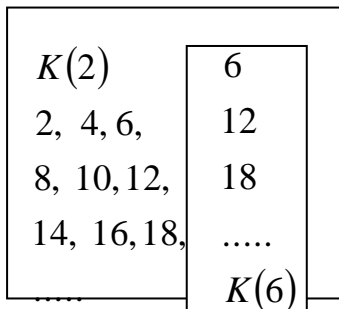
### Введение в математический анализ. Элементы теории множеств и функций Множества и операции над ними

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с понятием действительных чисел, с понятием множества и операций над ними, с умением применять экономную символику, используемую в логике.

Краткий конспект



**Подмножество:**  $A \subset B$



$$K(6) \subset K(2).$$

$\left. \begin{array}{l} \text{Пересечением} \\ \text{Объединением} \end{array} \right\}$  двух множеств называется множество, которое состоит из элементов, входящих  $\left. \begin{array}{l} \text{в каждое} \\ \text{хотя бы в одно} \end{array} \right\}$  из данных множеств.

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

Аудиторные задачи: стр. 7-11

№№ 5.28; 5.29; 5.31; 5.36; 5.38; 5.45; 5.44; 5.46; 5.49; 5.51; 5.53; 5.83; 5.85; 5.87; 5.89; 5.91 а; 5.92 а

Задания для самостоятельного решения:

№№ 5.30; 5.32; 5.34; 5.35; 5.37; 5.39; 5.47; 5.50; 5.52; 5.84; 5.86; 5.88; 5.90; 5.91 б; 5.92 б

### Второе практическое занятие

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с понятием комплексных чисел, с умением записывать комплексные числа в различных формах записи, выполнять операции над комплексными числами.

Краткий конспект

#### 1. Комплексные числа (КЧ)

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$\oplus \begin{array}{c} \square \\ \downarrow \\ a + b = c, \\ \square \\ \downarrow \\ c \in \mathbb{N} \end{array} \quad \ominus \begin{array}{c} \square \\ \downarrow \\ a + b = c, \\ \square \\ \downarrow \\ b, c \in \mathbb{N} \end{array}$$

$$a, b \in \mathbb{N}$$

$$\otimes \begin{array}{c} \square \\ \downarrow \\ a \cdot b = c, \\ \square \\ \downarrow \\ c \in \mathbb{N} \end{array} \quad \odot \begin{array}{c} \square \\ \downarrow \\ a \cdot b = c, \\ \square \\ \downarrow \\ c, b \in \mathbb{N} \end{array}$$

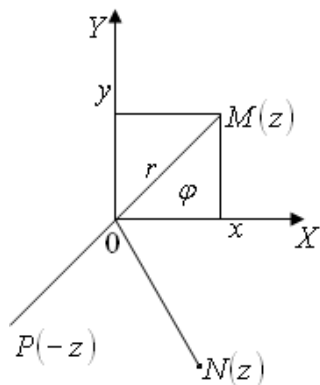
$$a, n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{c} \square \\ \downarrow \\ a^n = b, \\ \square \\ \downarrow \\ b \in \mathbb{N} \end{array} \quad \checkmark \begin{array}{c} \square \\ \downarrow \\ a^n = b, \\ \square \\ \downarrow \\ b, n \in \mathbb{N} \end{array}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}: \quad \mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}, \quad z - \text{КЧ.}$$

$z = \begin{cases} x + iy, \quad x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z, \quad i^2 = -1 & \text{— алгебраическая} \\ r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r =  z  = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{— тригонометрическая} \\ r = e^{i\varphi}, \quad e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi & \text{— показательная} \end{cases}$	<p>- формы записи</p>
--	-----------------------

$XOY$  - комплексная плоскость:



$OX$  - действительная,  $OY$  - мнимая оси,

$$M(x, y) \leftrightarrow z = x + iy \leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \{x, y\}$$

$$\bar{z} = x - iy - \text{сопряжённое к } z$$

$$-z = -x - iy - \text{противоположное к } z$$

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

$$w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Действия	$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$	$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$	$w, z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$
Форма записи	$\oplus$  $z = z_1 + z_2$ $\ominus$	$\otimes$  $z = z_1 \cdot z_2$ $\odot$	$\oplus$  $z = w^n$ $\otimes$
$z = x + iy$	$x = x_1 + x_2$ $y = y_1 + y_2$ $x = x_1 - x_2$ $y = y_1 - y_2$	$x = x_1x_2 - y_1y_2$ $x = x_1x_2 - y_1y_2$ $x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ $y = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$	—
$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$	—	$r = r_1r_2$ $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ $r = \frac{r_1}{r_2}$ $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$	$r = \rho^n$ $\varphi = n\theta$ $\rho = \sqrt[n]{r}$ $\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ $k = \overline{0, n-1}$

*Аудиторные задачи:* стр. 39-47

№№ 5.421; 5.423; 5.424; 5.426; 5.428; 5.430; 5.435; 5.437; 5.477; 5.485; 5.497; 5.499

*Задания для самостоятельного решения:*

№№ 5.436; 5.438; 5.486; 5.488; 5.496; 5.498; 5.500

### Третье практическое занятие

#### *Числовая последовательность. Предел числовой последовательности*

#### *Пределы функций*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с понятием числовой последовательности, пределом числовой последовательности, с понятием предела функции, знанием основных определений предела функции одной переменной, умением раскрывать некоторые неопределенности.

Краткий конспект

#### Пределы ФОП

#### Предел последовательности. Предел функции в точке

Число  $\frac{a}{A}$  называется пределом  $\left| \frac{\{x_n\}}{f(x) \text{ в } T.x_0} \right|$  если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \left| \frac{n_0(\varepsilon) \in N}{\delta(\varepsilon) > 0} \right|$ , что

$\forall \left| \frac{n > n_0}{x \in D (|x - x_0| < \delta)} \right|$ , выполняется неравенство  $\left| \frac{|x_n - a| < \varepsilon}{|f(x) - A| < \varepsilon} \right|$ .

Обозначение  $\left| \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a}{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A} \right|$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)\varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (C f(x)) = C \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f \left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right) = f(g(x_0))$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} {}^n f(x) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$$

*Первый*

!

*Второй*

*замечательный*

предел и его следствия

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \text{ где } e = 2,71828\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$$

Бесконечно  $\left\{ \begin{array}{l} \text{малые} \\ \text{большие} \end{array} \right.$  функции

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \alpha(x) - \text{б.м.} \\ f(x) - \text{б.б.} \end{array} \right.$$

Если  $x_n - \text{б.б.} \Leftrightarrow x_n - \text{неограниченная}$

Связь б.м. и б.б.

$x_n$	$y_n$	$\frac{x_n}{y_n}$	$x_n y_n$	$\frac{y_n}{x_n}$
б.м.	огран.	0	0	$\infty$
б.б.	огран.	$\infty$	$\infty$	0

$\Rightarrow$ верно	$\Leftarrow$ не всегда верно
$2, 2^2, 2^3, \dots, 2^n \dots$	$-1, 2, -3, 4, -5, \dots, (-1)^n n$
$1, 2, 3, \dots, n \dots$	$1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \dots, (n)^{(-1)^n} \dots$

*Аудиторные задачи:*

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.2 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 352 с.

Самостоятельная работа по теме «Основные понятия. Операции над комплексными числами» (стр 12).

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 25-28

№№ 5.213; 5.215; 5.217; 5.221; 5.225; 5.227; 5.230 б, г; 5.232; 5.236; 5.240; 5.242; 5.244;  
5.437; 5.477; 5.485; 5.497; 5.499

стр. 28-35

№№ 5.273; 5.277; 5.279; 5.281; 5.283; 5.289.

*Задания для самостоятельного решения:*

№№ 5.214; 5.216; 5.218; 5.220; 5.222; 5.230 а; 5.234; 5.236; 5.238; 5.240; 5.242; 5.244; 5.246.

№№ 5.272; 5.276; 5.280; 5.282; 5.284; 5.288; 5.302.

## Четвертое практическое занятие

### *Замечательные пределы*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением раскрывать некоторые виды неопределенностей с применением формул замечательных пределов и их следствий.

#### *Аудиторные задачи:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 30-33

№№ 5.303; 5.305; 5.307; 5.309; 5.311; 5.313; 5.315; 5.320; 5.322; 5.324; 5.326; 5.328; 5.330; 5.332.

#### *Задания для самостоятельного решения:*

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.1 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 270 с.

Стр. 158- 167

Индивидуальные домашние задания к главе 5.

ИДЗ-5.1.

## Пятое практическое занятие

### *Функции действительной переменной. Построение графиков*

#### *Непрерывность и точки разрыва функции*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с понятием функции, умением находить область определения функции, знанием основных элементарных свойств функции, знанием основных графиков элементарных функций и умением строить график сложной функции путем его преобразования, с умением находить односторонние пределы, находить точки разрыва и классифицировать их, исследовать функцию на непрерывность.

#### *Аудиторные задачи:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 17-25

№№ 5.95; 5.97; 5.103; 5.105; 5.107; 5.108; 5.110; 5.113; 5.117; 5.119; 5.134; 5.136;

5.157; 5.159; 5.161; 5.176 б; 5.179 а; 5.178 б

стр. 35-39

№№ 5.395; 5.402; 5.387.



*Задания для самостоятельного решения:*

№№ 5.175 б; 5.176 а; 5.218 а; 5.114; 5.116; 5.135; 5.137; 5.156; 5.162.

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.1 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 270 с.

Стр. 167- 175

Индивидуальные домашние задания к главе 5.

ИДЗ-5.2.

## **Шестое практическое занятие**

### ***Производная.***

#### ***Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование.***

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных со знанием определения производной, знанием основных правил и формул дифференцирования, умением находить производную сложной функции, со знанием определения производной, знанием основных правил и формул дифференцирования, умением находить производную сложной функции. Применять логарифмирование при поиске производной.

*Аудиторные задачи:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 54-59

№№ 6.39; 6.32; 6.43; 6.45; 6.54; 6.65; 6.67; 6.69; 6.73.

стр. 57-63

№№ 6.81; 6.82; 6.89; 6.90; 6.91; 6.151; 6.154; 6.170; 6.173; 6.175; 6.177; 6.179; 6.185; 6.204; 6.231; 6.298 б

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1997. – 304 с.

Стр. 151- 157

№№ 773; 775; 777; 779; 781; 783; 785; 787; 789; 791; 793.

*Задания для самостоятельного решения:*

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1997. – 304 с.

Стр. 151- 157

№№ 772; 774; 776; 778; 780; 782; 784; 786; 788; 790; 792.

*Аудиторные задачи:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

№№ 6.62; 6.64; 6.76; 6.83; 6.86; 6.87; 6.146; 6.143; 6.174; 6.176; 6.178; 6.180; 6.335; 6,339; 6,341.

### **Седьмое практическое занятие**

*Дифференцирование неявных функций и функций, заданных параметрически*

*Производные высших порядков. Дифференциал функции.*

*Дифференциалы высших порядков*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных со знанием формул дифференцирования неявной и параметрической функций, умением находить производную сложной функции, со знанием правил и формул дифференцирования функций, умением находить производную высшего порядка для сложной функции.

*Аудиторные задачи:*

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк.,1997. – 304 с.

стр. 161-163

№№ 901; 903; 905; 907; 910; 911; 901; 903.

стр. 64-77

№№ 6.185; 6.204; 6.202; 6.231; 6.233; 6.276; 6.286; 6.290; 6.298 б; 6.303; 6.315; 6.179; 6.185; 6.204; 6.231; 6.298 б

*Задания для самостоятельного решения:*

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк.,1997. – 304 с.

стр. 161-163

№№ 840; 855; 853.

стр. 166-167

№№ 984; 886; 888; 990; 991; 994; 996.

### **Восьмое практическое занятие**

*Правило Лопиталья. Исследование поведения функций и их графиков.*

*Исследование поведения функций при помощи производной*

*и построение их графиков*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением применять производные для вычисления пределов и исследования графика функции, связанных с умением применять производные для исследования графика функции.

*Аудиторные задачи:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 79-83; 86- 98

№№ 6.335; 6.337; 6.339; 6.341; 6.354; 6.360; 6.364; 6.369; 6.405; 6.407; 6.413; 6.425; 6.430.

стр. 92- 99

№№ 6.379; 6.397 б, г; 6.400 б, в; 6.441; 6.443; 6.445; 6.453; 6.455; 6.457.

*Задания для самостоятельного решения:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 79-83; 86- 98

№№ 6.334; 6.336; 6.338; 6.340; 6.342; 6.355; 6.357; 6.365; 6.404; 6.406; 6.414; 6.428; 6.429.

стр. 92- 99

№№ 6.380; 6.400 а; 6.442; 6.444; 6.454; 6.456.

## **Девятое практическое занятие**

### ***Функции нескольких переменных. Частные производные. Производные сложных функций нескольких переменных***

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить область определения функции многих переменных, умением находить частные производные, умением находить частные производные и полные производные сложной функции, в зависимости от вида заданной функции.

*Аудиторные задачи:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 186-205

№№ 8.5; 8.9; 8.13; 8.20; 8.55; 8.57; 8.114; 8.118; 8.120; 8.140; 8.146.

*Задания для самостоятельного решения:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 186-205

№№ 8.56; 8.58; 8.62; 8.64; 8.83; 8.117; 8.119; 8.142; 8.144.

## Десятое практическое занятие

### *Дифференцирование неявных функций нескольких переменных.*

#### *Дифференциалы высших порядков неявных функций нескольких переменных*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить производную неявной и параметрически заданной функции многих переменных, с умением находить дифференциалы функций многих переменных.

#### *Аудиторные задачи:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 205-209

№№ 8.148; 8.150; 8.152.

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.2 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 352 с.

Самостоятельная работа по теме «Дифференциал функции многих переменных и производные сложных функций» (стр.215-216).

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1997. – 304 с.

стр. 198-199

№№ 1239; 1244; 1249.

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 215-216

№№ 8.177; 8.179; 8.181.

#### *Задания для самостоятельного решения:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 205-209

№№ 8.147; 8.149; 8.151.

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.2 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 352 с.

#### Индивидуальные домашние задания к главе 10

Стр. 222-231

ИДЗ-10.1.

## Одиннадцатое практическое занятие

### Экстремум функций многих переменных

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанным контролем над работой по теме «Производные функции многих переменных».

*Аудиторные задачи:*

*Семина М.А.* Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных: пособие для подготовки к тестированию. Казань: изд-во «Экоцентр», 2005.

Пройти соответствующий тест по заданной теме.

*Задания для самостоятельного решения:*

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 1997. – 304 с.

стр. 202-204

№№ 1280; 1283; 1287; 1209; 1220; 1260; 1262.

## Двенадцатое практическое занятие

### Неопределенный интеграл

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить неопределенные интегралы, используя свойства и таблицу интегралов.

Краткий конспект

### НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

$$\forall f(x) \in C_{[x]} \exists F(x) - \text{первообразная для } f(x) \quad \forall x \in X : F'(x) = f(x)$$

#### Свойства НИ

$$1^\circ \left( \int f(x) dx \right)' = f(x). \quad 2^\circ d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

$$3^\circ \int dF(x) = F(x) + C \quad \left( \int dx = x + C \right).$$

$$4^\circ \int \left( \sum_{i=1}^n f_i(x) \right) dx = \sum_{i=1}^n \int f_i(x) dx.$$

$$5^\circ \int af(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a = \text{const.}$$

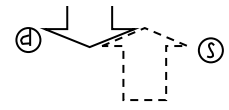
$$6^\circ \int f[\varphi(t)] d\varphi(t) = F[\varphi(t)] + C.$$

## Таблица основных интегралов

### I. Степенная и показательная функции

№	1	2	3	4
$F(x)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln x $	$\frac{a^x}{\ln a}$	$e^x$
$f(x)$	$x^n, n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	$a^x$	$e^x$

$$F'(x) = f(x)$$



$$\int f(x) dx = F(x)$$

### II. Тригонометрические функции

№	5	6	7	8	9	10
$F(x)$	$-\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\ln \cos x $	$\ln \sin x $
$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$

### III. Обратные тригонометрические функции

№	11	12	13	14
$F(x)$	$\arcsin x,$ $-\arccos x$	$\arcsin \frac{x}{a}$ $-\arccos \frac{x}{a}$	$\operatorname{arctg} x,$ $-\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a},$ $-\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{a^2+x^2}$

### VI. Логарифмические функции

№	15	16	17
$F(x)$	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a+x}{a-x} \right $	$\frac{1}{2a} \ln \left  \frac{a-x}{a+x} \right $	$\ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right $
$f(x)$	$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

## V. Гиперболические функции

№	18	19	20	20
$F(x)$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{th} x$	$-\operatorname{cth} x$
$f(x)$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

### Методы интегрирования

Непосредственное  
интегрирование

Замена переменной

Интегрирование  
по частям

4°, 5°, таблица  $\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$   $\int u dv = uv - \int vdu$

ОСНОВНЫХ

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left| \begin{array}{l} \varphi(x) = t, \\ \varphi'(x)dx = dt \end{array} \right| = \int f(t)dt$$

Семина.М.А.Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан.гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

Стр. 11-22

### Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Примеры решения

1.1.1. Найти первообразную для  $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$ .

► По определению первообразной  $F(x) : F'(x) = f(x)$ , т.е.  $F'(x) = 4x^{\frac{1}{3}}$ . Имеем производную степенной функции  $(x^n)' = nx^{n-1}$ . Значит  $n-1 = \frac{1}{3}$ ,  $n = \frac{4}{3}$  и тогда  $F(x) = 3x^{\frac{4}{3}}$

. Совокупность первообразных для  $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$ , будет  $3x^{\frac{4}{3}} + C$ . ◀

1.1.2. Показать, что  $\frac{1}{2} \sin 2x + C$  – первообразная для

$$f(x) = \cos(\alpha + x)\cos(\alpha - x) + \sin(\alpha + x)\sin(\alpha - x).$$

► Нужно показать, что

$$\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C\right)' = \cos(\alpha + x)\cos(\alpha - x) + \sin(\alpha + x)\sin(\alpha - x). (*)$$

Найдём производную:  $\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C\right)' = \frac{1}{2}\cos 2x \cdot 2 = \cos 2x$ . Правую часть равенства (\*) преобразуем по формуле:

$$\cos(\beta - \gamma) = \cos\gamma\cos\beta + \sin\gamma\sin\beta; \quad \beta = \alpha + x, \quad \gamma = \alpha - x.$$

Имеем

$$\cos(\alpha + x)\cos(\alpha - x) + \sin(\alpha + x)\sin(\alpha - x) = \cos(\alpha + x - \alpha + x) = \cos 2x,$$

что и требовалось показать. ◀

### *Аудиторные задачи*

I. Найти первообразные следующих функций:

1.1.3.

1.1.4.

1.1.5.

II. Показать, что  $F(x) + C$  – первообразные для  $f(x)$ :

1.1.6. 1.1.7.

1.1.8.

1.1.12. 1.1.13. 1.1.14.

### *Задание на дом*

I. Найти первообразные следующих функций:

1.1.9. 1.1.10. 1.1.11.

## **Основные свойства неопределенных интегралов**

### *Примеры решения*

1.2.1. Вычислить интеграл  $\int \cos 3x \, dx$ .

▶  $\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x \, d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + C$ . При решении использованы свойство 6 и табличный интеграл № 6 (II. Тригонометрические функции). ◀

1.2.2. Вычислить интеграл  $\int (2x - 1)^{10} \, dx$ .

▶  $\int (2x - 1)^{10} \, dx = \frac{1}{2} \int (2x - 1)^{10} \, d(2x - 1) = \frac{(2x - 1)^{11}}{22} + C$ . При решении использованы: свойство 6 и табличный интеграл № 1 (I. Степенная и показательная функции). ◀



1.2.3. Вычислить интеграл  $\int e^{2+x} dx$ .

►  $\int e^{2+x} dx = \int e^{2+x} d(x+2) = e^{2+x} + C$ . При решении использованы: свойство 6 и табличный интеграл № 4 (I. Степенная и показательная функции). ◀

*Аудиторные задачи*

Вычислить интегралы:

1.2.4.

1.2.5.

1.2.6.

1.2.7.

*Задание на дом*

Вычислить интегралы:

1.2.8.

1.2.10.

1.2.9.

1.2.11.

**Непосредственное интегрирование**

*Примеры решения*

Непосредственным интегрированием вычислить интегралы:

1.3.1.  $\int \frac{3x^4 + 5x^2 - 6x\sqrt[4]{x} + 4}{x} dx$ .

►  $\int (3x^4 + 5x^2 - 6x\sqrt[4]{x} + 4) \frac{dx}{x} = 3 \int x^3 dx + 5 \int x dx - 6 \int \sqrt[4]{x} dx + 4 \int \frac{dx}{x} = \frac{3x^4}{4} + \frac{5x^2}{2} - \frac{24x^{\frac{5}{4}}}{5} + 4 \ln|x| + C$ . ◀

1.3.2.  $\int \frac{10^x + 6^x}{2^x} dx$ .

►  $\int \frac{10^x + 6^x}{2^x} dx = \int \left(\frac{10}{2}\right)^x dx + \int \left(\frac{6}{2}\right)^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$ . ◀

1.3.3.  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$ .

►  $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C$ . ◀

$$1.3.4. \int \frac{\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^4 - 9}} dx.$$

$$\blacktriangleright \int \frac{\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^4 - 9}} dx = \int \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{(x^2 - 3)(x^2 + 3)}} dx -$$

$$- \int \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{(x^2 - 3)(x^2 + 3)}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}} =$$

$$= \ln \left| x + \sqrt{x^2 + 3} \right| - \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 3} \right| + C = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 3}}{x + \sqrt{x^2 - 3}} \right| + C. \blacktriangleleft$$

### *Аудиторные задачи*

Найти неопределённые интегралы:

1.3.5.

1.3.8.

1.3.6.

1.3.9.

1.3.7.

1.3.10

### *Задание на дом*

Вычислить данные неопределённые интегралы:

1.3.13.

1.3.16.

1.3.14.

1.3.17.

1.3.15

## **Интегрирование методом замены переменной**

Существуют два варианта метода замены переменной:

I. Метод «подведения» множителя под знак дифференциала

### *Примеры решения*

1.3.19. Вычислить интеграл  $\int \cos^5 x \sin x dx$ .

$\blacktriangleright$  Имеем:

$$\int \cos^5 x \sin x dx = - \int \cos^5 x d(\cos x) = - \int u^5 du = - \frac{u^6}{6} \Big|_{u=\cos x} + C = - \frac{\cos^6 x}{6} + C. \blacktriangleleft$$

1.3.20. Вычислить интеграл  $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+4)^2} dx$ .

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{2x-3}{(x^2-3x+4)^2} dx &= \int \frac{d(x^2-3x+4)}{(x^2-3x+4)^2} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} \Big|_{u=x^2-3x+4} + C = \\ &= -\frac{1}{x^2-3x+4} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

1.3.21. Вычислить интеграл  $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$ .

$\blacktriangleright$  Имеем:

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \sin(\ln x) d(\ln x) = \int \sin u du = -\cos u \Big|_{u=\ln x} + C = -\cos(\ln x) + C. \blacktriangleleft$$

#### *Аудиторные задачи*

Вычислить интегралы с помощью подходящей замены:

1.3.22. 1.3.23.

1.3.24. 1.3.25.

1.3.26. 1.3.27.

1.3.28. . 1.3.29..

#### *Задание на дом*

Вычислить интегралы:

1.3.31. 1.3.32.

1.3.33. . 1.3.34.

1.3.35. 1.3.36.

## II. Метод подстановки

### *Примеры решения*

1.3.37. Вычислить интеграл:  $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$ .

$\blacktriangleright$  В рассматриваемом случае  $D(f)=[0,+\infty)$ , где  $f(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}$ .

Произведём подстановку  $x = \varphi(t) = t^2$ ,  $t \in [0,+\infty)$ . Тогда:

$dx = 2t dt$ ,  $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ , откуда

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{t^3+t}{t+1} dt = 2 \int (t^2 - t + 2) dt - 4 \int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= \left( 2 \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t \right) - 4 \ln|t+1| \right) \Big|_{t=\sqrt{x}} + C = 2 \left( \frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} \right) - 4 \ln(\sqrt{x}+1) + C. \blacktriangleleft$$

1.3.38. Применяя подстановку  $t = e^x$ , найти интеграл  $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$ .

► Имеем:  $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx = \left| \begin{array}{l} t = e^x \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{t+1} dt = \int dt - \int \frac{dt}{t+1} =$

$$= (t - \ln(t+1)) \Big|_{t=e^x} + C = e^x - \ln(e^x+1) + C. \blacktriangleleft$$

#### Аудиторные задачи

I. Найти интегралы, применяя указанные подстановки.

1.3.39.

1.3.40.

1.3.41.

II. Применяя подходящие подстановки, найти интегралы:

1.3.42.

1.3.43.

1.3.44.

#### Задание на дом

Найти интегралы, применяя подходящие подстановки:

1.3.45.

1.3.46.

1.3.47.

1.3.48.

1.3.49.

1.3.50.

### Интегрирование по частям

#### Примеры решения

1.3.52. Найти  $\int (x^2 - 3)e^{2x} dx$ , используя интегрирование по частям.

► Полагаем  $u = x^2 - 3$  и  $dv = e^{2x} dx$ . Тогда  $du = 2x dx$  и  $v = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}$

(постоянную  $C$  здесь полагаем равной 0, т.е. в качестве  $v$  берём одну из первообразных). По формуле  $(\int u dv = uv - \int v du)$  имеем:

$$\int (x^2 - 3)e^{2x} dx = \frac{(x^2 - 3)e^{2x}}{2} - \int xe^{2x} dx.$$

К стоящему справа интегралу снова применяем формулу интегрирования по частям, причём за  $u$  снова принимаем многочлен (т.е.  $x$ ).

Имеем:

$$u = x, \quad dv = e^{2x} dx.$$

Отсюда

$$du = dx \quad \text{и} \quad v = \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}.$$

Окончательно:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 3)e^{2x} dx &= (x^2 - 3) \frac{e^{2x}}{2} - \left( x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \right) = (x^2 - 3) \frac{e^{2x}}{2} - x \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C = \\ &= \frac{1}{4} (2x^2 - 2x - 5) e^{2x} + C. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

1.3.53. Найти  $\int x \cos x dx$ .

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{Имеем: } \int x \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos x dx, \\ du = dx, \quad v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = \\ &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

1.3.50. Найти  $\int x^2 \ln x dx$ .

$\blacktriangleright$  Используя формулу и таблицу, имеем:

$$\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = x^2 dx, \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x} dx = \frac{x^3}{9} (3 \ln x - 1) + C. \quad \blacktriangleleft$$

1.3.54. Найти  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ .

$\blacktriangleright$  Имеем:

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = x dx, \\ du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left( 1 - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx = \\
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

1.3.55. Найти  $\int e^{ax} \sin bxdx$ .

► Полагаем  $u = e^{ax}$ ,  $dv = \sin bxdx$ . Тогда  $du = ae^{ax}dx$ ,  $v = -\frac{\cos bx}{b}$ .

Используя формулу  $\left( \int u dv = uv - \int v du \right)$ , имеем:

$$\int e^{ax} \sin bxdx = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bxdx.$$

Теперь полагаем  $u = e^{ax}$ ,  $dv = \cos bxdx$ . Тогда  $du = ae^{ax}dx$ ,  $v = \frac{\sin bx}{b}$  и

$$\int e^{ax} \sin bxdx = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \left( \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bxdx \right).$$

В итоге получено уравнение относительно неизвестного интеграла

$$\int e^{ax} \sin bxdx.$$

Решая это уравнение, находим:

$$\left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}}{b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C,$$

или окончательно искомый интеграл запишется в виде

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C. \blacktriangleleft$$

*Аудиторные задачи*

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы:

1.3.56.

1.3.57.

1.4.58.

1.3.59.

1.3.60.

1.3.61.

1.3.62.

1.3.63.

- 1.3.64. . 1.3.65.  
 1.3.66. 1.3.67.  
 1.3.68. 1.3.69.  
 1.3.70.

*Задание на дом*

Найти интегралы.

- 1.3.71. 1.3.72.  
 1.3.73. 1.3.74.  
 1.3.75. 1.3.76.  
 1.4.77. 1.3.78.  
 1.3.79.

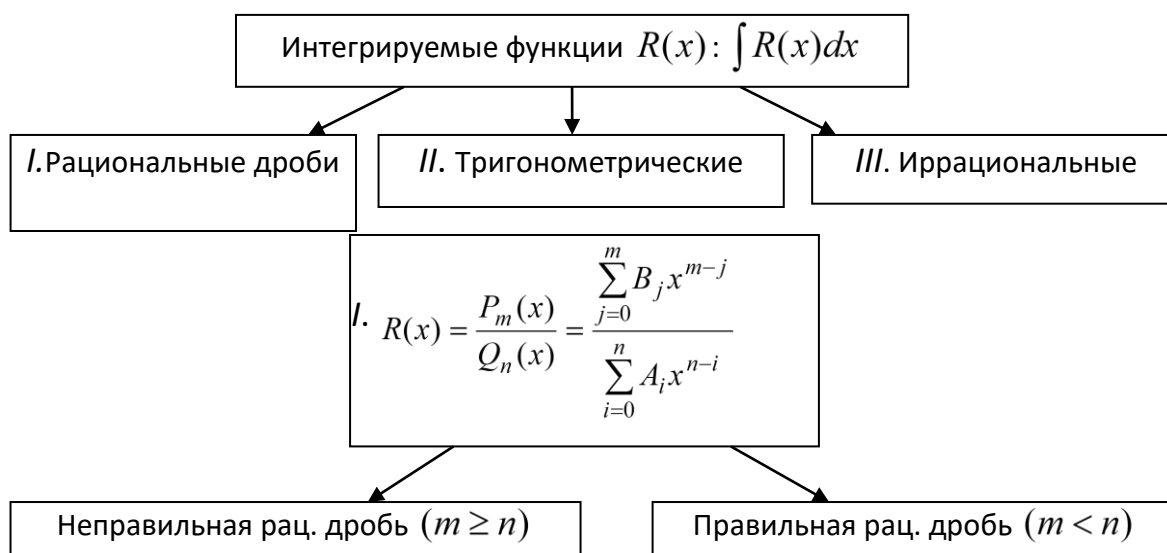
### Тринадцатое и четырнадцатое практические занятия

#### *Неопределенный интеграл*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить неопределенные интегралы, используя свойства и таблицу интегралов, специальные методы интегрирования.

Краткий конспект

### КЛАССЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ



$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} P_m(x) \\ \dots \end{array} \right| \frac{Q_n(x)}{L_{m-n}(x)} \text{ - целая часть} \\
 r_k(x) \text{ - остаток} \\
 \Downarrow \\
 \text{- правильная} \\
 \text{рациональная} \\
 \text{дробь}
 \end{array}
 \quad \rightarrow \quad
 \begin{array}{l}
 Q_n(x) = \prod_{i=1}^l (x - a_i)(x - b)^k (x^2 + px + q) \dots \times \\
 \times (x^2 + px + q)^m \rightarrow \\
 \rightarrow R(x) = \sum_{i=1}^l \frac{A_i}{x - a_i} + \sum_{j=1}^k \frac{B_j}{(x - b)^j} + \\
 + \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} + \dots + \sum_{i=1}^m \frac{R_i x + S_i}{(x^2 + px + q)^i}
 \end{array}$$

$A_i (i = \overline{1, l}), B_j (j = \overline{1, k}), M, N, R_i, S_i (i = \overline{1, m}) \in R$  - неизвестные коэффициенты

Метод неопределённых коэффициентов

Метод частных значений

Простейшие рациональные дроби I – IV типов

$$\frac{A}{x - a}, \frac{A}{(x - a)^k} (k \geq 2), \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}, \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} \left( k \geq 2, \frac{p^2}{4} - q < 0 \right)$$

Семина М.А. Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан.гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

Стр. 32-56

### Интегрирование рациональных дробей

Примеры решения

2.1.1. Выделить целую часть дроби  $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{(x^2 + 1)^3}{x(x^2 - 2x + 1)}$ .

► Дробь неправильная, так как  $m > n$  ( $m = 6, n = 3$ ). Для выделения целой части записываем числитель и знаменатель в каноническом виде:  $(x^2 + 1)^3 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$ ,  $x(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x$ , выполняем деление «уголком» первого многочлена на второй:



$$\begin{array}{r}
x^6 + 3x^4 + x^2 + 1 \quad \left| \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^3 + 2x^2 + 6x + 10} \right. \\
- \\
\frac{x^6 - 2x^5 + x^4}{2x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 1} \\
- \\
\frac{2x^5 - 4x^4 + 2x^3}{6x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1} \\
- \\
\frac{6x^4 - 12x^3 + 6x^2}{10x^3 - 3x^2 + 1} \\
- \\
\frac{10x^3 - 20x^2 + 10x}{17x^2 - 10x + 1}
\end{array}$$

получаем в частном  $x^3 + 2x^2 + 6x + 10$ , а в остатке  $17x^2 - 10x + 1$ . Следовательно,

$$\frac{(x^2 + 1)^3}{x(x^2 - 2x + 1)} = x^3 + 2x^2 + 6x + 10 + \frac{17x^2 - 10x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}, \text{ и выделение целой части закончено. } \blacktriangleleft$$

2.1.2. Дробь  $\frac{(x+1)^2}{x(x-1)^2}$  разложить в сумму простейших.

► Искомое разложение имеет вид  $\frac{(x+1)^2}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$  Приводя правую

часть к общему знаменателю, получаем тождественное равенство  $x^2 + 4x + 4 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Dx$ . (\*) Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях  $x$  даёт систему уравнений:

$$\begin{array}{l|l}
x^2 & A + B = 1, \\
x & -2A - B + D = 4, \\
x^0 & A = 4,
\end{array}$$

откуда получаем  $A = 4, B = -3, D = 9$ . Следовательно, искомое разложение имеет вид:

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x(x-1)^2} = \frac{4}{x} - \frac{3}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2}.$$

Можно определить коэффициенты  $A, B, D$  другим способом, полагая последовательно в тождестве (\*)  $x = 0, x = 1$  и, например,  $x = -1$ : при  $x = 0$  находим  $A = 4$ , при  $x = 1$  получаем  $D = 9$ , а при  $x = -1$  имеем  $4A + 2B - D = 1$ , т.е.  $B = -3$ .

При решении этого примера лучше всего было бы комбинировать оба способа, т.е. найти  $A=4$  при  $x=0$ ,  $D=9$  при  $x=1$ , а  $B$  определить из равенства коэффициентов при  $x^2$  в (\*), т.е. из равенства  $A+B=1$ . ◀

2.1.3. Найти интеграл  $\int \frac{x^4 - x^2 + 2x - 5}{x^2 + 1} dx$ .

► Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Выполним деление многочлена на многочлен:

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{x^4 - x^2 + 2x - 5}{x^2 + 1} \left| \begin{array}{l} x^2 + 4 \\ x^2 - 5 \end{array} \right. \\ & \frac{-5x^2 + 2x - 5}{-5x^2 - 20} \\ & \frac{2x + 15}{2x + 15} \\ \int \frac{x^4 - x^2 + 2x - 5}{x^2 + 1} dx &= \int \left( x^2 - 5 + \frac{2x + 15}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= \int x^2 dx - 5 \int dx + \int \frac{d(x^2 + 4)}{x^2 + 4} + 15 \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \\ &= \frac{x^3}{3} - 5x + \ln(x^2 + 4) + \frac{15}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2.1.4. Найти интеграл  $\int \frac{5x^2 - 15x + 16}{x^3 - 4x^2 + x + 6} dx$ .

► Прежде всего, нужно разложить на множители многочлен, стоящий в знаменателе, а для этого необходимо найти корни этого многочлена. По теореме Виета известно, что произведение всех корней  $x_1, x_2, \dots, x_n$  многочлена с целыми коэффициентами

$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  (для удобства полагаем  $a_0 = 1$ ) удовлетворяют условию

$\prod_{i=1}^n x_i = (-1)^n a_n$ . Отсюда следует, что корни многочлена являются делителями свободного

члена  $a_n$ . У нас свободный член в знаменателе равен 6, поэтому корнями многочлена

$x^3 - 4x^2 + x + 6$  могут быть числа  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$  – делители числа 6. Непосредственно

убеждаемся, что число  $x_1 = -1$  является корнем:

$(-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$ . По следствию из теоремы Безу видно, что

многочлен  $x^3 - 4x^2 + x + 6$  делится без остатка на разность  $x - x_1$ , в нашем случае на  $x + 1$ .

Действительно,

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 4x^2 + x + 6 \quad \Big| \quad \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6} \\
 \underline{x^3 + x^2} \\
 -5x^2 + x \\
 \underline{-5x^2 - 5x} \\
 6x + 6 \\
 \underline{6x + 6} \\
 0
 \end{array}$$

Значит  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x^2 - 5x + 6)$ . Трёхчлен  $x^2 - 5x + 6$  имеет корни  $x_2 = 2$  и  $x_3 = 3$ , поэтому  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x+1)(x-2)(x-3)$ , и данный интеграл можно записать в виде  $\int \frac{5x^2 - 15x + 16}{(x+1)(x-2)(x-3)} dx$ . Так как многочлен в знаменателе дроби разлагается только на линейные множители, то эта дробь представлена в виде суммы простейших дробей только I типа. Запишем разложение дроби на простейшие в общем виде

$$\frac{5x^2 - 15x + 16}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{D}{x-3}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнявая числители левой и правой частей, получим тождество

$$5x^2 - 15x + 16 = A(x-2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + D(x+1)(x-2).$$

Задавая  $x = -1$ ,  $x = 2$  и  $x = 3$  получим  $A = 3$ ,  $B = -2$ ,  $D = 4$  и

$$\frac{5x^2 - 15x + 16}{(x+1)(x-2)(x-3)} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-2} + \frac{4}{x-3},$$

значит,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{5x^2 - 15x + 16}{(x+1)(x-2)(x-3)} dx &= \int \frac{3}{x+1} dx - \int \frac{2}{x-2} dx + \int \frac{4}{x-3} dx = \\
 &= 3\ln|x+1| - 2\ln|x-2| + 4\ln|x-3| + C. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

2.1.5. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + 2x}$ .

► Запишем знаменатель в виде произведения двух сомножителей  $x^3 + 2x^2 + 2x = x(x^2 + 2x + 2)$ . Трёхчлен  $x^2 + 2x + 2$  имеет комплексные корни, так как

$D = \frac{p^2}{4} - q = 1 - 2 = -1 < 0$ , значит его нельзя разложить на линейные множители с вещественными коэффициентами. Поскольку в знаменателе всего два множителя  $x$  и  $x^2 + 2x + 2$ , рациональная дробь разлагается в общем виде на простейшие дроби I и III типа следующим образом:

$$\frac{1}{x(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + D}{x^2 + 2x + 2}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю и приравниваем числители полученных дробей:

$$1 = A(x^2 + 2x + 2) + Bx^2 + Dx.$$

Коэффициент  $A$  определяем, задавая  $x = 0$ :  $1 = 2A$ ,  $A = \frac{1}{2}$ .

Коэффициенты  $B$  и  $D$  определяем, приравняв коэффициенты при  $x^2$  и  $x$  в левой и правой частях:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & D = A + B, \quad B = -A = -\frac{1}{2} \\ x & 0 = 2A + D \quad D = -2A = -1. \end{array}$$

Получаем  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = -\frac{1}{2}$ ,  $D = -1$  и

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 2)} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int \frac{2x + 4}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{\ln|x|}{2} - \frac{1}{4} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx - \\ &- \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \frac{\ln|x|}{2} - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 2x + 2) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \\ &= \frac{\ln|x|}{2} - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 2x + 2) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x+1) + C. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2.1.6. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2}$ .

► Дробь  $\frac{1}{x(x^2 + 1)^2}$  правильная, её разложение в сумму простейших дробей имеет

вид:

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + D}{x^2 + 1} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 1)^2}.$$

Имеем  $1 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + D)x(x^2 + 1) + (Ex + F)x$ . Полагая  $x = 0$ , находим  $A = 1$ . Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получаем  $0 = A + B$ ,  $0 = D$ ,  $0 = 2A + B + E$ ,  $0 = D + F$ , т.е.  $B = -1$ ,  $D = 0$ ,  $E = -1$ ,  $F = 0$ . Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2} = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \right) dx = \ln|x| - \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C.$$

Заметим, что разложение дроби  $\frac{1}{x(x^2 + 1)^2}$  на простейшие можно получить и не применяя метода неопределённых коэффициентов, а именно

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} &= \frac{(1 + x^2) - x^2}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x(x^2 + 1)} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1 + x^2) - x^2}{x(x^2 + 1)} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

#### *Аудиторные задачи*

*I.* Выделить целые части следующих дробей:

2.1.7. .

2.1.8. .

2.1.9. .

*II.* Следующие дроби разложить в сумму простейших:

2.1.10. .

2.1.11. .

2.1.12. .

*III.* Найти интегралы:

2.1.13.

2.1.14.

2.1.15.

2.1.16.

2.1.17.

2.1.18.

*IV.* Найти интегралы, не применяя метода неопределённых коэффициентов:

2.1.19.

2.1.20.

2.1.21.

#### *Задание на дом*

2.1.22.

2.1.23

2.1.24.

II.  $R(\sin x, \cos x)$  – рациональная функция

1.  $\int R(\sin x, \cos x) dx$

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right|$$

$\int R^*(t) dt$

2.  $\int R(\sin x) \cos x dx$

$|\sin x = t, \cos x dx = dt|$

$\int R(t) dt$

3.  $\int R(\cos x) \sin x dx$

$|\cos x = t, -\sin x dx = dt|$

$-\int R(t) dt$

4.  $\int R(\operatorname{tg} x) dx$

$\left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right|$

5.  $\int R(\sin^{2m} x, \cos^{2n} x) dx$

$\left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \\ \cos^2 x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right|$

$\int R^*(t) dt$

6.  $\int \sin^m x \cos^n x dx$

$m = 2p + 1, \quad m = 2p, \quad m = 2p, \quad n = 2q$   
 $n = 2q + 1, \quad n = 2q, \quad mn < 0$   
 $\left. \begin{array}{l} \cos x = t, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ \sin x = t, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \\ \operatorname{ctg} x = t \end{array}$

$\int R^*(t) dt$

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{7. \int \sin mx \cos nx \, dx} & \boxed{8. \int \cos mx \cos nx \, dx} & \boxed{9. \int \sin mx \sin nx \, dx} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{2} & \frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2} & \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
-\frac{1}{2} \left( \frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right)
\end{array}$$

2.2.3. Найти  $\int \frac{dx}{4 + \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x}$ .

► Применяем подстановку  $\operatorname{tg} x = t$ ,  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$  (КИФ, II.  $R(\sin x, \cos x)$  - рациональная функция, случай 4) и

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{4 + \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4 + t + \frac{4}{t}} = \int \frac{t \, dt}{(1+t^2)(4t+t^2+4)} = \int \frac{t \, dt}{(1+t^2)(t+2)^2} \\
&= \int \left( \frac{A}{t+2} + \frac{B}{(t+2)^2} + \frac{Ft+D}{1+t^2} \right) dt.
\end{aligned}$$

Определяем коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $F$ ,  $D$ .

$$t = A(t+2)(1+t^2) + B(1+t^2) + (Ft+D)(t+2)^2.$$

При  $t = -2$  :  $-2 = 5B$ ,  $B = -\frac{2}{5}$  :

$$t = At + 2A + At^3 + 2At^2 + Bt^2 + B + Ft^3 + Dt^2 + 4Ft^2 + 4Dt + 4Ft + 4D.$$

$$t = t^3(A+F) + t^2(2A+B+D+4F) + t(A+4D+4F) + 2A+B+4D.$$

$$\left. \begin{array}{l} t^3 \left\{ \begin{array}{l} A+F=0 \\ 2A+B+D+4F=0 \end{array} \right. \\ t^2 \left\{ \begin{array}{l} A+4D+4F=1 \\ 2A+B+4D=0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A+F=0 \\ 2A+B+4F=\frac{2}{5} \\ A+4D+4F=1 \\ 2A+4D=\frac{2}{5} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=-\frac{3}{25}, \\ F=\frac{3}{25}, \\ D=\frac{4}{25}. \end{array} \right.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 + \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x} &= -\frac{3}{25} \ln |t + 2| + \frac{2}{5(t+2)} + \frac{3}{50} \ln(t^2 + 1) + \frac{4}{25} \operatorname{arctg} t + C = \\ &= -\frac{3}{25} \ln |\operatorname{tg} x + 2| + \frac{2}{5(\operatorname{tg} x + 2)} + \frac{3}{50} \ln \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{4}{25} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \\ &= -\frac{3}{25} \ln |\operatorname{tg} x + 2| + \frac{2}{5(\operatorname{tg} x + 2)} - \frac{3}{25} \ln |\cos x| + \frac{4x}{25} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2.2.4. Найти  $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x}$ .

► Используя случай 5 (КИФ, II.  $R(\sin x, \cos x)$  - рациональная функция), имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(1+t^2) \left( 2 - \frac{t^2}{1+t^2} \right)} = \int \frac{dt}{2+t^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2.2.5. Найти  $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}} dx$ .

► Используя случай 6 (КИФ, II.  $R(\sin x, \cos x)$  - рациональная функция),  $m = 3$  - нечётно, имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}} dx &= \left| \begin{array}{l} \cos x = t, \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{\sqrt[4]{t}} dt = -\int \frac{dt}{\sqrt[4]{t}} + \int t^{\frac{7}{4}} dt = \\ &= -\frac{4t^{\frac{3}{4}}}{3} + \frac{4t^{\frac{11}{4}}}{11} + C = -4 \frac{\sqrt[4]{\cos^3 x}}{3} + 4 \frac{\sqrt[4]{\cos^{11} x}}{11} + C = \\ &= -\frac{4}{3} \sqrt[4]{\cos^3 x} + \frac{4}{11} \cos^2 x \sqrt[4]{\cos^3 x} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2.2.6. Найти  $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ .

► Так как  $m = 2, n = 4$  - чётные положительные числа, то данный интеграл вида 6 (КИФ, II.  $R(\sin x, \cos x)$ ). Сначала воспользуемся формулами

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}:$$



$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \left( \frac{\sin^2 2x}{4} \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \blacktriangleleft$$

2.2.7. Найти  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$ .

► Используя случай 6 (*КИФ, II. R(sin x, cos x)*),  $n = -6 < 0$ ,

имеем:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2} \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2}{1 + t^2} dt = \int t^2 (1 + t^2) dt =$$

$$= \int (t^2 + t^4) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C. \blacktriangleleft$$

2.2.8. Найти  $\int \cos 9x \cos 5x dx$ .

► Следуя случаю 8 (*КИФ, II. R(sin x, cos x)*), имеем:

$$\int \cos 9x \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 14x + \cos 4x) dx = \frac{\sin 14x}{28} + \frac{\sin 4x}{8} + C. \blacktriangleleft$$

*Аудиторные задачи*

Найти интегралы:

2.2.9.

2.2.10.

2.2.11.

2.2.12.

2.2.13.

2.2.14.

2.2.15.

2.2.16.

2.2.17.

2.2.18.

2.2.19.

2.2.20.

2.2.21.

2.2.22.

2.2.23.

2.2.24.

2.2.25.

2.2.26.

2.2.29.

2.2.30. .

*Задание на дом*

2.2.33.

2.2.34.

2.2.35.

2.2.36.

2.2.37.

2.2.38.

2.2.39.

2.2.40.

2.2.41.

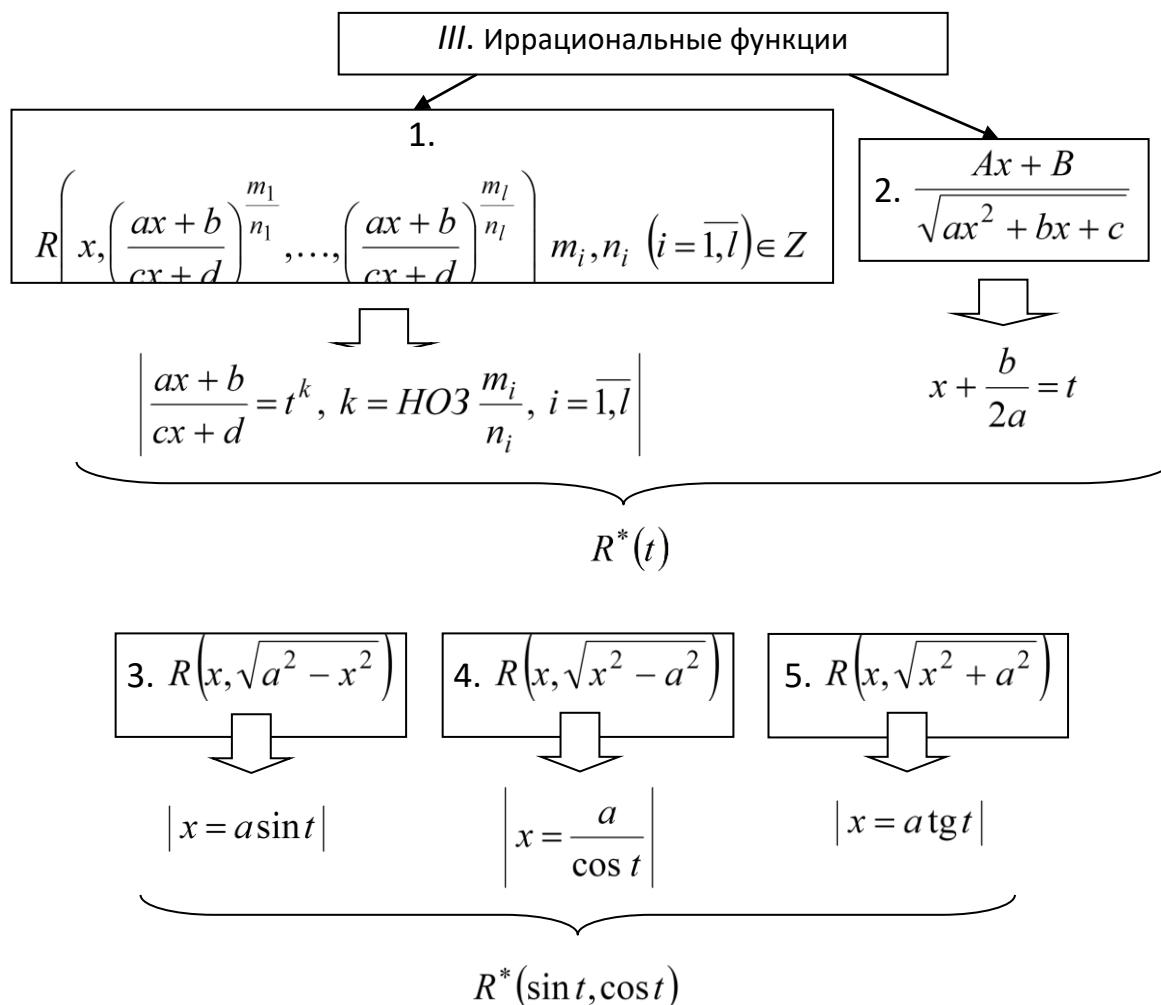
2.2.42.

## Пятнадцатое практические занятия

### Неопределенный интеграл

#### Интегрирование иррациональных функций

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить неопределенные интегралы, используя свойства и таблицу интегралов, специальные методы интегрирования.



*Замечание.* ∃ НИ, не выражающиеся через элементарные функции:  $\int e^{-x^2} dx$  – интеграл Пуассона,  $\int \frac{dx}{\ln x}$  – интегральный логарифм,  $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ,  $\int \frac{\cos x}{x} dx$  – интегральный синус и косинус,  $\int \sin x^2 dx$ ,  $\int \cos x^2 dx$  – интегралы Френеля,  $\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx$  ( $k \geq 2$ ),  $\int \frac{e^x}{x} dx$ ,  $\int e^{\operatorname{arctg} x} dx$ ,  $\int \sqrt[3]{x^3 + 1} dx$ ,  $\int \sqrt{\sin x} dx$ ,  $\int \ln \sin x dx$  и др.

*Семина М.А.* Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан.гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

2.3.1. Найти  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^2}$ .

► Следуя случаю 1 (КИФ, III. Иррациональные функции), имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^2} &= \left| \begin{array}{l} x=t^4, \quad dx=4t^3 dt \\ \sqrt{x}=t^2, \quad \sqrt[4]{x}=t \end{array} \right| = \int \frac{4t^3}{t^2(t+1)^2} dt = 4 \int \frac{t}{(t+1)^2} dt = 4 \int \frac{t+1-1}{(t+1)^2} dt = \\ &= 4 \int \left( \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) dt = 4 \ln |t+1| + \frac{4}{t+1} + C = \\ &= 4 \ln(\sqrt[4]{x}+1) + \frac{4}{\sqrt{x}+1} + C. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2.3.2. Найти  $\int \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}+2}{\left( (x-1)^{\frac{1}{3}}+1 \right) (x-1)^{\frac{2}{3}}} dx$ .

► Общим знаменателем дробей  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{3}$  является число 6. Подстановка  $x-1=t^6$ ,  $dx=6t^5 dt$  преобразует интеграл к виду:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}+2}{\left( (x-1)^{\frac{1}{3}}+1 \right) (x-1)^{\frac{2}{3}}} dx &= \int \frac{(t^3+2)6t^5}{(t^2+1)t^4} dt = \\ &= 6 \int \frac{t^4+2t}{t^2+1} dt = 6 \int \left( t^2 - 1 + \frac{2t+1}{t^2+1} \right) dt = 6 \left( \frac{t^3}{3} - t + \ln(t^2+1) + \operatorname{arctg} t \right) + C = \\ &= 2\sqrt{x-1} - 6\sqrt[6]{x-1} + 6 \ln |\sqrt[3]{x-1}+1| + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x-1} + C. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2.3.3. Найти  $\int \sqrt{\frac{1+x}{x}} \frac{dx}{x^2}$ .

► Следуя случаю 1 (КИФ, III. Иррациональные функции), имеем:

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{x}} \frac{dx}{x^2} = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x} = t^2, \quad x = \frac{1}{t^2-1} \\ dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2} dt \end{array} \right| = \int (t^2-1)^2 t \frac{(-2t)}{(t^2-1)^2} dt =$$

$$= -2 \int t^2 dt = -\frac{2t^3}{3} + C = -\frac{2}{3} \sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^3} + C = -\frac{2}{3} \frac{x+1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} + C. \blacktriangleleft$$

2.3.4. Найти  $\int \frac{x-5}{\sqrt{x^2-2x}} dx$ .

► Следуя случаю 2 (КИФ, III. Иррациональные функции), имеем:

$$\int \frac{x-5}{\sqrt{x^2-2x}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{(x^2-2x)'}{2} = x-1 \\ x-5 = t-4, \quad dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{t-4}{\sqrt{t^2-1}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2-1)}{\sqrt{t^2-1}} - 4 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} =$$

$$= \sqrt{t^2-1} - 4 \ln|t + \sqrt{t^2-1}| + C = \sqrt{x^2-2x} - 4 \ln|x-1 + \sqrt{x^2-2x}| + C. \blacktriangleleft$$

2.3.5. Найти  $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx$ .

► Следуя случаю 3 (КИФ, III. Иррациональные функции), имеем:

$$\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx = \left| \begin{array}{l} x = 2 \sin t, \quad dx = 2 \cos t dt \\ \sqrt{(4-x^2)^3} = 8 \cos^3 t \end{array} \right| = \int 8 \cos^3 t \frac{2 \cos t}{64 \sin^6 t} dt = \frac{1}{4} \int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t} dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{\operatorname{ctg}^4 t}{\sin^2 t} dt = -\frac{1}{4} \int \operatorname{ctg}^4 t d(\operatorname{ctg} t) = -\frac{1}{4} \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 t + C = -\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5} + C. \blacktriangleleft$$

#### Аудиторные задачи

Найти интегралы:

2.3.6.

2.3.8.

2.3.7.

2.3.9.

2.3.10.

2.3.11.

2.3.12. .

2.3.13.

2.3.14.

2.3.15.

2.3.18.

2.3.19.

.3.20.

Задание на дом

Найти интегралы:

2.3.21.

2.3.24.

2.3.22.

2.3.25.

2.3.23.

2.3.26.

## Шестнадцатое и семнадцатое практические занятия

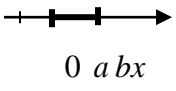
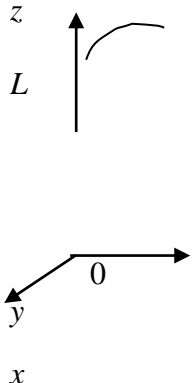
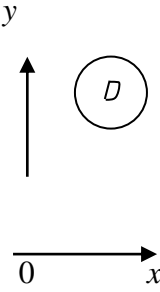
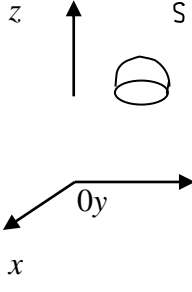
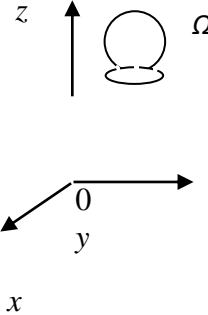
## Определенный интеграл

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить определенные интегралы, используя их математическое и физическое приложения, знанием определения несобственных интегралов и умения их вычислять.

Краткий конспект

## ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**1. Задача о массе математической фигуры  
и определенный интеграл**

Тип фигуры $\Phi$	Прямой стержень $[a;b]$	Кривой стержень $L$	Плоская пластинка (область) $D$	Изогнутая пластинка (поверхность) $S$	Тело $\Omega$
Вид $\Phi$ в $R^n, n = \overline{1,3}$					
Разбиение на элементарные частицы: $\Delta \Phi_i \quad i = \overline{1,n}$	$\Delta x$	$\Delta l_i$	$\Delta \sigma_i$	$\Delta S_i$	$\Delta V_i$

Мера фигуры $\Delta \Phi$	длина		площадь		объём
Выбор $M_i \in \Delta \Phi_i \Rightarrow$ плотность $\rho(M_i)$	$\rho(x)$	$\rho(x, y, z)$	$\rho(x, y, z)$	$\rho(x, y, z)$	$\rho(x, y, z)$
Диаметр разбиения фигуры $\lambda$	$\lambda = \max_i \lambda_i = \max_i \text{diam}_{\Delta} \Phi, \lambda_i = \text{diam}_{\Delta} \Phi_i = \max A_i B_i, A_i \in_{\Delta} \Phi_i,$ $B_i \in_{\Delta} \Phi_i, \Phi = \bigcup_{i=1}^n \Delta \Phi_i, \Delta \Phi_i \cap_{\Delta} \Delta \Phi_j = 0, i \neq j$				
Масса фигуры $\Phi$ $m$	$S_n = \sum_{i=1}^n \rho(M_i)_{\Delta} \Phi_i \Rightarrow m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(M_i)_{\Delta} \Phi_i, M_i \in_{\Delta} \Phi_i$ $m \approx S_n$				
Необходимые операции	1. $\Phi = \bigcup_{i=1}^n \Delta \Phi_i$ 2. $M_i \in_{\Delta} \Phi_i, i = \overline{1, n}$ . 3. $f(M_i)_{\Delta} \Phi_i, i = \overline{1, n}$ . 4. $S_n = \sum_{i=1}^n f(M_i)_{\Delta} \Phi_i$				
Понятие <i>ОИ</i>	$\sum_{i=1}^n f(M_i)_{\Delta} \Phi_i = S_n \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n = \int_{\Phi} f(M) d\Phi$ интегральная сумма				
Типы <i>ОИ</i>	$\int_a^b f(M) dx$	$\int_{AB} f(M) d\ell$	$\iint_D f(M) d\sigma$	$\iint_S f(M) dS$	$\iiint_{\Omega} f(M) dT$
Название <i>ОИ</i>	<i>ОИ</i>	<i>КИ</i> <i>1р.</i>	<i>ДИ</i>	<i>ПИ</i> <i>1р.</i>	<i>ТИ</i>
Геометри- ческий смысл	Площадь криволинейной трапеции	Площадь боковой поверхности цилиндра	Объём цилиндри- ческого тела	—	—

## 2. Свойства *ОИ*

1°. Линейность.  $\exists \int_{\Phi} f(M) d\Phi, \exists \int_{\Phi} \varphi(M) d\Phi,$

$$\alpha, \beta - const \Rightarrow \int_{\Phi} (\alpha f + \beta \varphi) d\Phi = \alpha \int_{\Phi} f d\Phi + \beta \int_{\Phi} \varphi d\Phi.$$

2°. Аддитивность.  $\Phi = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i, \exists \int_{\Phi} f(M) d\Phi \Rightarrow \int_{\Phi} f d\Phi = \sum_{i=1}^n \int_{\Phi_i} f(M) d\Phi.$

3°. Мера фигуры.  $f(M) = 1 \Rightarrow \int_{\Phi} d\Phi = \Phi.$

4°. Монотонность.

$$\exists \int_{\Phi} f(M) d\Phi, \exists \int_{\Phi} \varphi(M) d\Phi, f(M) \geq \varphi(M) \geq 0 \forall M \in \Phi \Rightarrow \int_{\Phi} f(M) d\Phi \geq \int_{\Phi} \varphi(M) d\Phi.$$

5°. Оценка модуля.  $\exists \int_{\Phi} f(M) d\Phi \Rightarrow$

$$\exists \int_{\Phi} |f(M)| d\Phi: \left| \int_{\Phi} f(M) d\Phi \right| \leq \int_{\Phi} |f(M)| d\Phi.$$

6°. Теорема о среднем.

$f(M)$  – непрерывна в  $\Phi \Rightarrow \exists C \in \Phi: \int_{\Phi} f(M) d\Phi = f(C) \cdot \Phi.$

**3. Вычисление ОИ. Формула Ньютона - Лейбница**

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

- формула Ньютона- Лейбница.

**4. Методы интегрирования**

**Замена переменной**

**Интегрирование по частям**

$$\int_a^b f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t), dx = \varphi'(t) dt \\ (\exists \varphi'(t) \forall t \in (\alpha, \beta)) \\ \frac{x | a | b}{t | \alpha | \beta} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

$$\exists u', v' \forall x \in (a, b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du$$



## 5. Приближенное вычисление ОИ

(замена кривой  $y = f(x)$  «близкой» к ней)

### Формула трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right) \right)$$

$$\Delta \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}, \quad M = \max |f''(x)| \quad \forall x \in (a, b)$$

### Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} \left( f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i) \right) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \left( f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

$$\Delta \leq \frac{M(b-a)^3}{2880n^4}, \quad M = \max |f^{(4)}(x)| \quad \forall x \in (a, b)$$

## 6. Несобственные интегралы (Н<sup>с</sup>И)

Н<sup>с</sup>И с бесконечными пределами интегрирования

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx$$

Н<sup>с</sup>И от разрывных функций

$x = b - m. p. || p$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx$$

$x = a - m. p. || p$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx$$

$x = x_0 - m. p. || p$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow x_0-0} \int_a^c f(x) dx + \lim_{c \rightarrow x_0+0} \int_c^b f(x) dx$$

## Признаки сходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

1.  $F'(x) = f(x)$

$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(+\infty), \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) -$$

СХОДИТСЯ

$+\infty$

2.  $\forall x \in [a, +\infty) 0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx \text{ сход.} \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ расх.}$$

3.  $\forall x \in [a, +\infty), f(x) > 0,$

$\varphi(x) > 0, \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{\varphi} \neq 0, \infty$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx, \int_a^{\infty} \varphi(x)dx -$$

4.  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  – сходится

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$  – сходится абсолютно

Семина М.А. Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан.гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

Стр. 79-108

### Свойства $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ . Вычисление $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ .

#### Формула Ньютона – Лейбница

*Примеры решения*

3.1.1. Определить знак интеграла  $\int_{-1}^3 \sqrt[5]{x} dx$ , не вычисляя его.

► Используя свойство  $2^\circ$   $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ , геометрический смысл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  и нечётность функции  $\sqrt[5]{x}$ , имеем:

$$\int_{-1}^3 \sqrt[5]{x} dx = \int_{-1}^1 \sqrt[5]{x} dx + \int_1^3 \sqrt[5]{x} dx = 0 + \int_1^3 \sqrt[5]{x} dx > 0. \blacktriangleleft$$

3.1.2. Не вычисляя, выяснить какой из интегралов  $\int_0^1 x^2 dx$  и  $\int_0^1 x^3 dx$  больше.

► Используя свойство 4° ОИ и неравенство  $x^3 \leq x^2 \forall x \in [0, 1]$  имеем, что

$$\int_0^1 x^3 dx < \int_0^1 x^2 dx. \blacktriangleleft$$

3.1.3. Оценить интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ .

► Так как  $1 \leq 1+x^4 \leq 2 \forall x \in [0, 1]$ , используя свойства ОИ 4° и 5°, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leq 1, \text{ т.е. } m = \frac{1}{\sqrt{2}}, M = 1, b - a = 1 \text{ и } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \in \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right]. \blacktriangleleft$$

3.1.4. Сила переменного тока меняется по закону  $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$ , где  $T$  - период. Найти среднее значение силы тока за полупериод.

► Используя теорему о среднем (6° ОИ) и формулу Ньютона – Лейбница, имеем

$$\begin{aligned} I_{\text{ср}} &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) dt = \frac{2}{T} I_0 \frac{T}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{I_0}{\pi} (\cos \varphi - \cos(\pi + \varphi)) = \frac{2}{\pi} I_0 \cos \varphi. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

3.1.5. Вычислить интеграл  $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ .

► Используя формулу Ньютона – Лейбница и таблицу НИ, получим

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| \Big|_e^{e^2} = \ln \ln e^2 - \ln \ln e = \ln 2 \approx 0,69. \blacktriangleleft$$

#### Аудиторные задачи

Вычислить интегралы:

3.1.6.

3.1.7.

3.1.8.

3.1.9.

3.1.10.

3.1.11.

3.1.12.

3.1.13.

3.1.14.

## Интегрирование заменой переменной

### и по частям в ОИ

#### Примеры решения

3.2.1. Вычислить  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

► Сделаем подстановку  $x = \sin t$ ,  $dx = \cos t dt$ . По выбранной подстановке определяются новые пределы интегрирования. При  $x=0$  и при  $x=1$  имеем  $0 = \sin t$  и  $1 = \sin t$ , находим соответственно  $t=0$  и  $t = \frac{\pi}{2}$ . Таким образом, изменению переменной  $x$  от  $x=0$  до  $x=1$  соответствует изменение переменной  $t$  от  $t=0$  до  $t = \frac{\pi}{2}$ .

Используя случай 1 (Методы интегрирования. Замена переменной), получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

3.2.2. Вычислить  $\int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ .

► Учитывая иррациональность функции и выбирая соответствующую замену, имеем:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \left| \begin{array}{l} x=t^2, \quad dx=2tdt \\ \frac{x|1}{t|1} \frac{4}{2}, \quad \sqrt{x}=t \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{2tdt}{t+1} = 2 \int_1^2 dt - 2 \int_1^2 \frac{dt}{t+1} = = 2t \Big|_1^2 - 2 \ln |1+t| \Big|_1^2 = \\ &= 2 - 2 \ln \frac{3}{2}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

3.2.3. Вычислить  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x}$ .

► Интегрируем по частям, полагая  $u = x$ ,  $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$ , находим

$$du = dx, v = \operatorname{tg} x.$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x} &= (x \operatorname{tg} x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 0 + \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 = -\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

3.2.4. Вычислить  $\int_1^e \ln x dx$ .

► Следуя применению формулы интегрирования по частям, имеем:

$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = dx \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = x \end{array} \right| = (x \ln x) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{xdx}{x} = e - x \Big|_1^e = e - e + 1 = 1. \blacktriangleleft$$

#### *Аудиторные задачи*

I. Вычислить интегралы с помощью указанных подстановок:

3.2.5.

3.2.6.

3.2.7.

II. Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

3.2.8.

3.2.9.

3.2.10.

3.2.11.

3.2.12.

3.2.13.

III. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

3.2.14.

3.2.15.

3.2.16.

3.2.17.

3.2.18.

3.2.19.

*Задание на дом*

3.2.20. 3.2.213. 2.22.

## Несобственный интеграл (Н<sup>с</sup>И)

### Примеры решения

3.4.1. Вычислить Н<sup>с</sup>И или установить его расходимость  $\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx$ .

► Используя определение Н<sup>с</sup>И, имеем:

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-3x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{-e^{-3x}}{3} \right|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-3b}}{3} = \frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

3.4.2. Вычислить  $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}$ .

► По определению

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 b}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{8}. \blacktriangleleft$$

3.4.3. Вычислить  $\int_{-\infty}^1 x e^x dx$ .

► Используя определение и формулу интегрирования по частям, получим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^1 x e^x dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 x e^x dx = \left. \begin{array}{l} u = x, \quad dv = e^x dx \\ du = dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( (x e^x) \Big|_a^1 - \int_a^1 e^x dx \right) = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (e - a e^a - e + e^a) = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a (1 - a) = (0 \cdot \infty). \end{aligned}$$

Приводим неопределённость  $(0 \cdot \infty)$  к виду  $\left( \frac{\infty}{\infty} \right)$  и применяем

правило Лопиталя:

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1-a}{e^{-a}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-a}} = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a = 0.$$

Значит

$$\int_{-\infty}^1 x e^x dx = 0. \blacktriangleleft$$

3.4.4. Вычислить  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ .

► По определению  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ .

В силу чётности подынтегральной функции

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= 2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \\ 1+x^2 = \frac{1}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{\operatorname{arctg} b} \cos^2 t \, dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{\operatorname{arctg} b} (1 + \cos 2t) \, dt = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \operatorname{arctg} b + \frac{1}{2} \sin(2 \operatorname{arctg} b) \right) = \frac{\pi}{2}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

3.4.5. Вычислить  $\int_0^2 \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}$ .

► В т.  $x=1$  подынтегральная функция терпит разрыв II рода. Имеем  $H^c I$  от разрывной функции. По определению:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}} &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}} = \lim_{b \rightarrow 1-0} \left. (x^2-1)^{\frac{1}{5}} \right|_0^b \frac{5}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow 1+0} \left. (x^2-1)^{\frac{1}{5}} \right|_a^2 = \frac{5}{2} + 5 \cdot \frac{\sqrt[5]{3}}{2} = \frac{5(\sqrt[5]{3}+1)}{2}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

3.4.6. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{3x^2 + \sqrt{(x+1)^3}}{2x^3 + \sqrt[3]{x^5} + 1} dx.$$

► Для исследования используем предельный признак сходимости  $H^c I$ .

В качестве интеграла, с которым будем сравнивать исследуемый, возьмём  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b = \infty$ , который расходится. Тогда

$$f(x) = \frac{3x^2 + \sqrt{(x+1)^3}}{2x^3 + \sqrt[3]{x^5 + 1}}, g(x) = \frac{1}{x}$$

и предел отношения данных функций запишется в виде:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(3x^2 + \sqrt{(x+1)^3}\right)x}{2x^3 + \sqrt[3]{x^5 + 1}} = \frac{3}{2}$$

и по теореме исследуемый интеграл также расходится. ◀

3.4.7. Исследовать на сходимость  $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$ .

► Для сравнения с исследуемым интегралом возьмём  $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ , который расходится:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{a \rightarrow 1+0} \int_a^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{a \rightarrow 1+0} \ln |x-1| \Big|_a^2 = -\infty - \text{расходится.}$$

При  $x \rightarrow 1$  функции  $\frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{x-1}$  – эквивалентные бесконечно большие, так как

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Значит, расходится и исследуемый интеграл. ◀

#### Аудиторные задачи

I. Вычислить  $H^c I$  (или установить их расходимость):

- |         |         |         |
|---------|---------|---------|
| 3.4.8.  | 3.4.9.  | 3.4.10. |
| 3.4.11. | 3.4.12. | 3.4.13. |
| 3.4.14. | 3.4.15. | 3.4.16. |
| 3.4.17. | 3.4.18. |         |
|         | 3.4.19. |         |
| 3.4.20. | 3.4.21. | 3.4.22. |



II. Исследовать на сходимость интегралы:

- |         |         |         |
|---------|---------|---------|
| 3.4.23. |         | 3.4.24. |
| 3.4.25. |         | 3.4.26. |
| 3.4.27. |         | 3.4.28. |
| 3.4.29. | 3.4.30. | 3.4.31. |

*Задание на дом*

I. Вычислить  $\int f(x) dx$  (или установить их расходимость):

- |         |         |
|---------|---------|
| 3.4.32. | 3.4.33. |
| 3.4.34. | 3.4.35. |

II. Исследовать на сходимость интегралы:

- |         |         |
|---------|---------|
| 3.4.36. | 3.4.37. |
| 3.4.38. | 3.4.39. |
| 3.4.40. |         |

***Контрольная работа по теме «Неопределенные интегралы»***

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с контролем навыков нахождения неопределенных интегралов различными способами и методами.

*Аудиторные задачи*

Семина. М.А. Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан. гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

Стр. 71-78.

**Первое и второе практические занятия  
ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ (ДИ)**

$$\iint_D f(x, y) ds$$

**Вычисление ДИ**

**1. В декартовых координатах**

$$D: y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x) \\ (\varphi_1(x) < \varphi_2(x)), x = a, \\ x = b, (a < b)$$

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

$$D: y = \psi_1(x), y = \psi_2(x) \\ (\psi_1(x) < \psi_2(x)), y = c, \\ y = d, (c < d)$$

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

**2. В полярных координатах**

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix} = r, ds = |J| dr d\varphi$$

$$\iint_D f(x, y) dS = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi = \\ = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f^*(r, \varphi) r dr \\ D: \varphi \in [\alpha, \beta], r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi) (r_2 > r_1)$$

**Приложения ДИ**

Геометрические	
Площади $S_D$	$S_D = \iint_D dS = \iint_D dx dy = \iint_D r dr d\varphi$
Объемы $V_\Omega$	$V_\Omega = \iint_D f(x, y) dS = \iint_D f^*(r, \varphi) r dr d\varphi$
Площади поверхности $G$	$G: z = f(x, y) G = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dS$

Физические	
Статические моменты	$S_x = \iint_D y \rho(x, y) dS, S_y = \iint_D x \rho(x, y) dS$

Координаты центра масс	$x_o = \frac{S_x}{m} = \frac{\iint_D x \rho dS}{\iint_D \rho dS}, \quad y_o = \frac{S_y}{m} = \frac{\iint_D y \rho dS}{\iint_D \rho dS}$
Моменты инерции	$I_x = \iint_D y^2 \rho dS, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho dS$ $\rho = \rho(x, y)$

### 5.1. Вычисление ДИ в декартовых координатах

#### Примеры решения

5.1.1. Расставить пределы интегрирования в двойных интегралах  $\iint_D f(x, y) dx dy$  от функции  $f(x, y)$ , непрерывной в указанных областях  $D$ :

1.  $D: y = x^2, y = x.$

2.  $D: x^2 - y^2 = 1, y = 1, y = -2.$

► 1. Построим область  $D$  (рис. 5.1). Первая линия – парабола, симметричная относительно оси  $OY$ , вторая – прямая. Найдем точки пересечения этих линий. Решаем уравнения  $y = x^2$  и  $y = x$ , находим:  $x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = 1, y_2 = 1$ . Область интегрирования является правильной в направлении обеих осей.

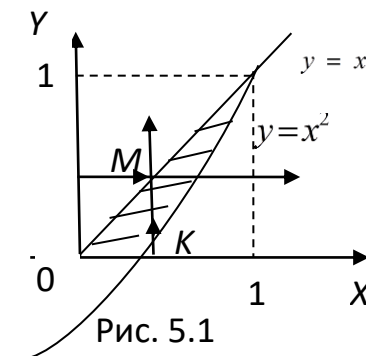


Рис. 5.1

Воспользуемся сначала формулой (вычисление ДИ в декартовых координатах)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy.$$

Здесь в повторном интеграле внутреннее интегрирование производится по переменной  $y$ , а внешнее – по  $x$ . Пределы интегрирования получены следующим образом. Область  $D$  была спроектирована на ось  $OX$  (область заключили в полосу, параллельную  $OY$ ), тогда  $x \in [0, 1]$ . Через произвольную точку  $x \in (0, 1)$  провели прямую, параллельную оси  $OY$  в положительном направлении, отметили точки входа ( $K$ ) этой прямой в область и выхода ( $M$ ). Функция  $y = x^2$ , которой удовлетворяют точки входа – нижний предел для  $y$ , функция  $y = x$ , которой удовлетворяют точки выхода – верхний предел. Таким образом,

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x\}$$

При внешнем интегрировании по  $y$  область  $D$  заключаем в полосу, параллельную оси  $OX$ , тогда  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \quad y \leq x \leq \sqrt{y}\}$ .

Применив формулу (вычисление ДИ в декартовых координатах), получим:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

2. Построим область  $D$  (рис. 5.2). Область  $D$  ограничена двумя прямыми и двумя ветвями гиперболы. Как видно из рисунка, область  $D$  является правильной в направлении оси  $OX$ .

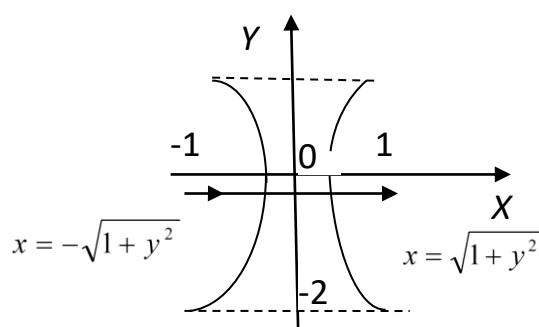


Рис. 5.2

По отношению к оси  $OY$  область  $D$  не является правильной (почему?). Тогда используя формулу (вычисление ДИ в декартовых координатах), получим:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-2}^1 dy \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x, y) dx. \blacktriangleleft$$

5.1.2. Записать в виде одного повторного интеграла следующие выражения

$$1. \int_0^2 dy \int_y^{2y} f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_y^4 f(x, y) dx.$$

$$2. \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_0^{\frac{4-x}{3}} f(x, y) dy.$$

► 1. Область  $D = D_1 \cup D_2$ . Построим области  $D_1$  и  $D_2$ , если  $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2y\}$ ,  $D_2 = \{(x, y) \mid 2 \leq y \leq 4, y \leq x \leq 4\}$  (рис. 5.3).

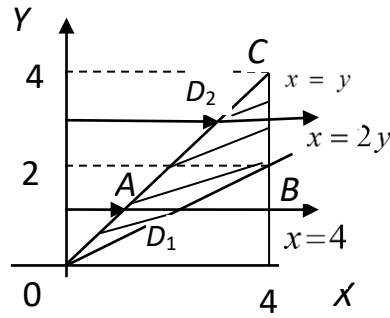


Рис. 5.3

Видно, что область  $D$  – правильная в направлении оси  $OX$ . Левая часть границы области  $D$  – одна линия, а именно  $x = y$ , а его правая часть состоит из двух линий  $OB$  и  $BC$ , определяемых разными уравнениями:  $x = 2y$  и  $x = 4$ . Поэтому область  $D$  представлена суммой ( $D_1 \cup D_2$ ) двух областей  $D_1$  и  $D_2$ . Однако область  $D$  является правильной в направлении оси  $OY$ . Если её заключить в полосу, параллельную оси  $OY$ , то  $D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, \frac{x}{2} \leq y \leq x \right\}$ , а двойной интеграл запишется в виде одного повторного:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^x f(x, y) dy.$$

2. Построим области  $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$  и  $D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{4-x}{3}\}$  (рис. 5.4).

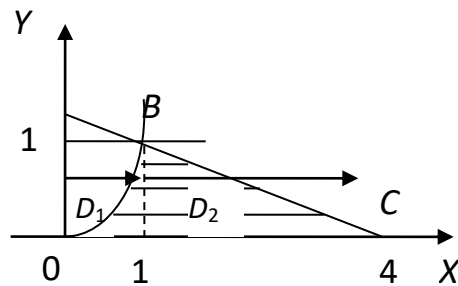


Рис. 5.4

Область  $D = D_1 \cup D_2$  является правильной в направлении оси  $OY$ . Нижняя ее граница – одна линия  $y = 0$ , а верхняя состоит из двух линий  $OB$  и  $BC$ , определяемых разными уравнениями:  $y = x^2$  и  $y = \frac{4-x}{3}$ . Область является правильной и в направлении

оси  $OX$ . Если её заключить в полосу, параллельную оси  $OX$ , то  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 4 - 3y\}$ . В этом случае двойной интеграл представляется в виде одного повторного:

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_0^{\frac{4-x}{3}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{4-3y} f(x, y) dx. \blacktriangleleft$$

5.1.3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

► Построим область, ограниченную прямыми:  $y=0$  - снизу,  $y=1$  - сверху и линиями:  $x = -\sqrt{1-y^2}$  - слева,  $x = 1-y$  - справа (рис. 5.5).

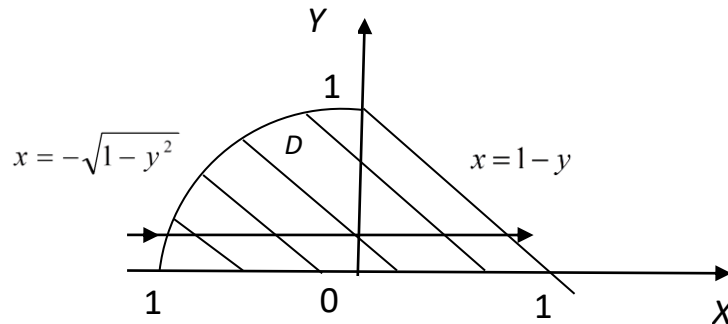


Рис. 5.5

Как нетрудно заметить, линия  $x = -\sqrt{1-y^2}$  есть левая половина окружности  $x^2 + y^2 = 1$ . Область  $D$  является правильной относительно каждой из осей  $OX$  и  $OY$ , но на разных отрезках оси  $OX$  она сверху ограничена разными линиями: на отрезке  $[-1, 0]$  - это верхняя половина окружности  $y = \sqrt{1-x^2}$ , а на отрезке  $[0, 1]$  - это прямая  $y = 1-x$ . Снизу область  $D$  ограничена осью абсцисс  $y=0$ . Следовательно, можно записать

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy. \blacktriangleleft$$

5.1.4. Вычислить двойной интеграл  $\iint_D e^y dx dy$ ,  $D: x=0, y=1, y^2=x$ .

► В данном случае область интегрирования  $D$  (рис. 5.6) является правильной как относительно оси  $OY$ , так и оси  $OX$ , поэтому нетрудно перейти к повторному интегралу двумя способами:

$$1. \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^y dy,$$

$$2. \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^y dx.$$

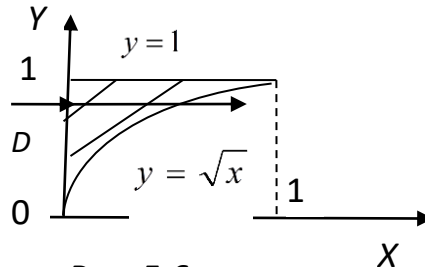


Рис. 5.6

Однако, второй способ предпочтительней, поскольку в первом случае для внутреннего интеграла первообразная не выражается через элементарные функции. Это замечание может быть полезно и в ряде других примеров, поскольку изменение порядка интегрирования часто упрощает вычисления. В данном случае будем иметь:

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^y dx = \int_0^1 \left( ye^y \right) \Big|_0^{y^2} dy = \int_0^1 (ye^y - y) dy = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

5.1.5. Найти среднее значение функции  $f(x, y) = 3x + 2y$  в треугольнике  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$ .

► Используя теорему о среднем ( $6^\circ$ ), имеем  $f_{cp} = \frac{1}{S_D} \iint_D f(x, y) dx dy$ . Площадь

$$\Delta OAB \quad S_D = OA \frac{AB}{2} = \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$\iint_D (3x + 2y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (3x + 2y) dy = \int_0^1 \left( (3xy + y^2) \Big|_0^{1-x} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 (3x(1-x) + 1 - x^2) dx = \left( \frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{(1-x)^3}{3} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow f_{cp} = \frac{5}{6} : \frac{1}{2} = \frac{5}{3}. \blacktriangleleft$$

*Аудиторные задачи*

I. Расставить пределы интегрирования в двойных интегралах  $\iint_D f(x, y) dx dy$  от функции  $f(x, y)$ , непрерывной в указанных областях  $D$ :

5.1.6.

5.1.7.

5.1.8.

5.1.9.

II. Изменив порядок интегрирования, записать в виде одного повторного интеграла следующие выражения:

5.1.10.

5.1.11.

5.1.12.

5.1.13.

III. Вычислить интегралы:

5.1.14.

5.1.15.

5.1.16.

5.1.17.

5.1.21.

5.1.18.

5.1.22.

5.1.19.

*Задание на дом*

IV. Найти среднее значение функции:

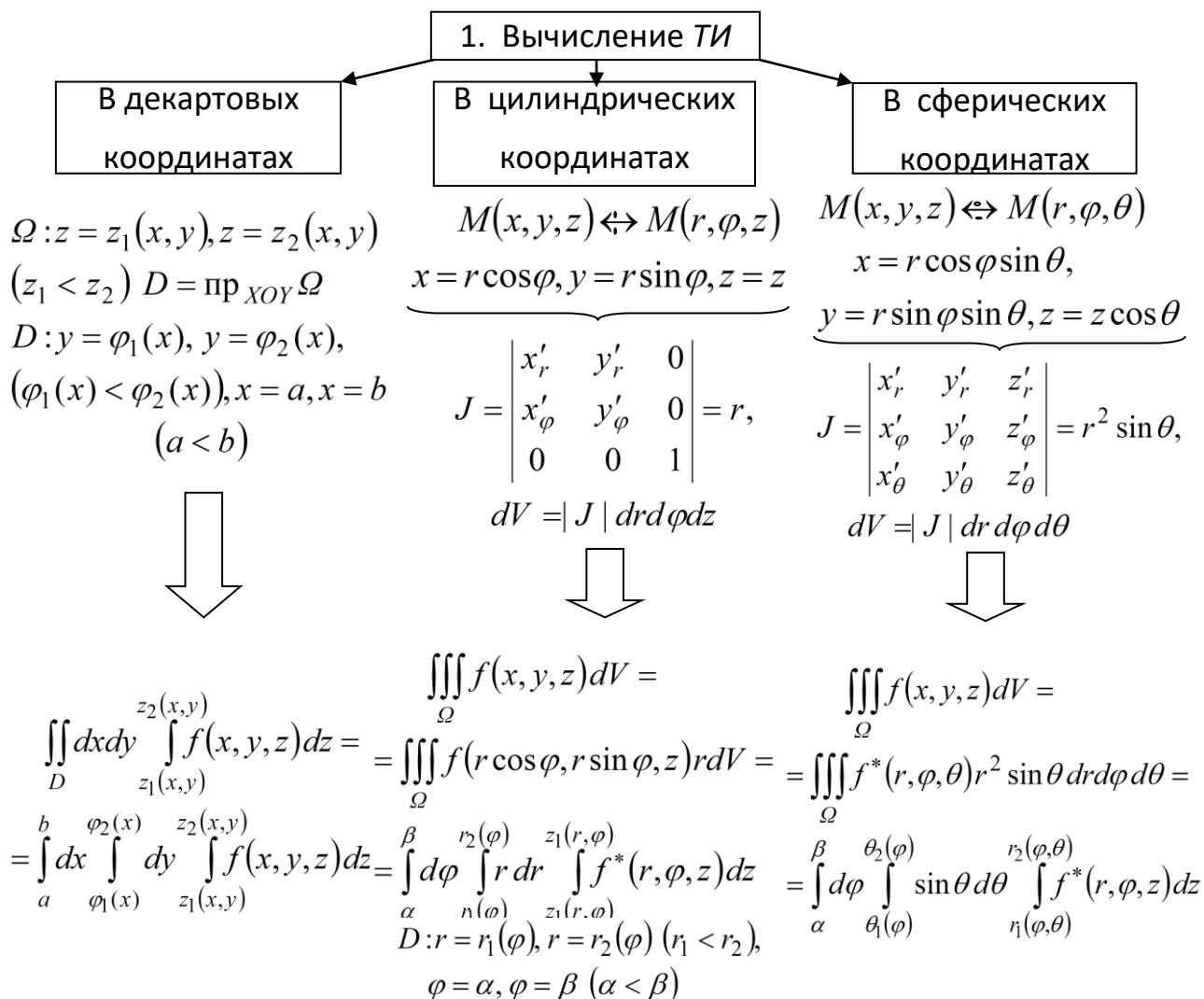
5.1.23. 5.1.24.

5.1.20.

4.1.25.



**ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ (ТИ)**



2. Приложения ТИ

Геометрические		
Объем тела $V_{\Omega}$		
$V_{\Omega} = \iiint_{\Omega} dV = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega} r dr d\varphi dz = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$		

Физические		
Статистические моменты	Координаты центра масс	Моменты инерции

$S_{xy} = \iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) dV$	$x_o = \frac{S_{xz}}{m} = \frac{\iiint_{\Omega} x \rho dV}{\iiint_{\Omega} \rho dV}$	$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$
$S_{yz} = \iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dV$	$y_o = \frac{\iiint_{\Omega} y \rho dV}{\iiint_{\Omega} \rho dV}$	$I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho dV$
$S_{xz} = \iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dV$	$z_o = \frac{\iiint_{\Omega} z \rho dV}{\iiint_{\Omega} \rho dV}$	$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho dV$

### 6.1. Определение, свойства и вычисление *ТИ*

#### Примеры решения

6.1.1. Расставить пределы интегрирования в *ТИ* по области  $\Omega$ :

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV; \Omega: z = 3x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0.$$

► Область  $\Omega$  снизу ограничена плоскостью  $z = 0$ , сверху – плоскостью  $z = 3x + y$ , а с боков – плоскостями  $x = 0, y = 0, x + y = 1$  (рис. 6.1).

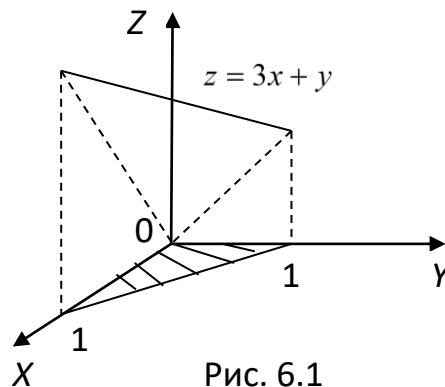


Рис. 6.1

Ортогональная проекция области на плоскости  $XOY$  – треугольник, ограниченный линиями  $y = 0, y = 1 - x$  на  $[0, 1]$ .

Тогда согласно формуле (вычисление *ТИ* в декартовых координатах) получим

$$\iiint_{\Omega} f dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{3x+y} f dz. \blacktriangleleft$$

6.1.2. Вычислить трехкратный интеграл  $I = \int_{-1}^1 dx \int_x^1 dy \int_0^2 (4+z) dz$  и построить его область интегрирования.

► Последовательно вычисляем три однократных *OИ*, начиная с внутреннего:

$$I_1 = \int_0^2 (4+z) dz = \frac{(4+z)^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{36-16}{2} = 10;$$

$$I_2 = \int_x^1 I_1 dy = 10 \int_x^1 dy = 10y \Big|_x^1 = 10(1-x^2);$$

$$I_3 = I = \int_{-1}^1 I_2 dx = 10 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 10 \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{40}{3}.$$

Здесь, как и при вычислении двукратного интеграла, можно пользоваться более краткой записью:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 dx \int_x^1 dy \int_0^2 (4+z) dz = \int_{-1}^1 dx \int_x^1 \frac{(4+z)^2}{2} \Big|_0^2 dy = 10 \int_{-1}^1 dx \int_x^1 dy = \int_{-1}^1 10 dx \cdot y \Big|_x^1 = \\ &= 10 \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 10 \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{40}{3}. \end{aligned}$$

Для построения области интегрирования  $\Omega$  данного трехкратного интеграла пишем вначале уравнение поверхностей, ограничивающих эту область. Приравнявая переменную интегрирования каждого интеграла к его пределам, получим следующие уравнения:

$$x = -1, \quad x = 1, \quad y = x^2, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z = 2.$$

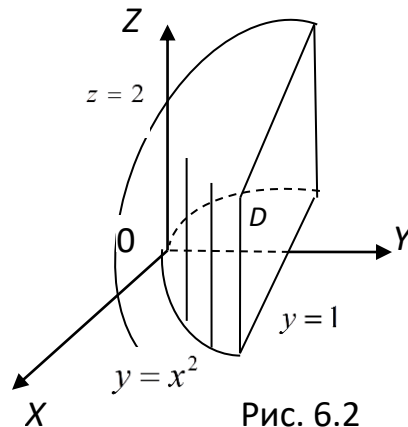


Рис. 6.2

Построив в системе координат  $OXYZ$  полученные плоскости и поверхность  $y = x^2$  (рис. 6.2), видим, что ограниченная ими область  $\Omega$  есть прямой цилиндр, образующие которого параллельны оси  $OZ$ . ◀

6.1.3. Вычислить  $TI \iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , где область  $\Omega$  определяется неравенствами  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ,  $x \leq y \leq 2x$ ,  $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

► По условию задачи уже имеем пределы всех трех переменных  $x, y, z$ . Поэтому можем сразу (без рисунков областей  $\Omega$  и  $D$ ) применить формулу (вычисление  $TI$  в декартовых координатах);

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} z^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{2x} (1 - x^2 - y^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left( y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_x^{2x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left( 2x - 2x^3 - \frac{8x^3}{3} - x + x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left( x - \frac{10x^3}{3} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{6} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{8} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{7}{192}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

6.1.4. Вычислить  $TI$

$$I = \iiint_{\Omega} xyz dx dy dz, \quad D: x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad (x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0).$$

► Область  $\Omega$  – часть шара, расположенная в 1 октанте (рис. 6.3). Сверху область ограничена сферической поверхностью  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , а снизу – плоскостью  $z = 0$ . Ортогональная проекция области  $\Omega$  на плоскость  $XOY$  – четверть круга, ограниченного линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = \sqrt{1 - x^2}$ .

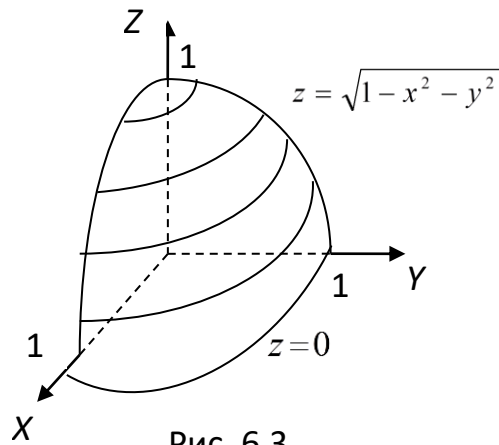


Рис. 6.3

Тогда согласно формуле (вычисление *ТИ* в декартовых координатах) получим,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz = \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} (1-x^2-y^2) y dy = \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left( y^2 \left( 1-x^2 - \frac{y^2}{2} \right) \right) \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{8} \left( -\frac{1}{2} \right) \int_0^1 (1-x^2)^2 d(1-x^2) = \frac{1}{48}. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

6.1.5. Вычислить  $ТИ \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$ ,  $\Omega: z=2, 2z=x^2+y^2$  с помощью перехода к цилиндрическим координатам.

► Область  $\Omega$  (рис. 6.4) ограничена снизу параболоидом  $2z=x^2+y^2$ , а сверху плоскостью  $z=2$ .

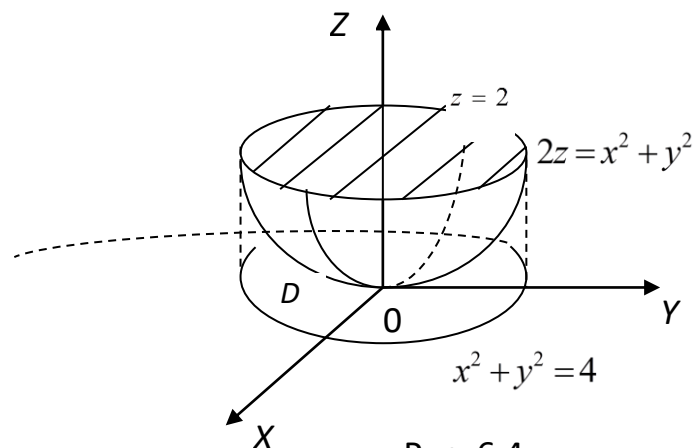


Рис. 6.4

Эта область проектируется в область  $D$  плоскости  $XOY$ , ограниченную окружностью  $x^2 + y^2 = 4$ , которая получена от пересечения параболоида  $x^2 + y^2 = 2z$  с плоскостью  $z = 2$ , т.е. от совместного решения двух уравнений

$$\begin{cases} z = 2, \\ 2z = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Введем цилиндрические координаты, используя формулы перехода (вычисление *ТИ* в цилиндрических координатах). Так как  $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2$  и переменные  $\varphi$ ,  $r$ ,  $z$  имеют следующие пределы:  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq 2$ ,  $\frac{r^2}{2} \leq z \leq 2$  (нижняя граница области  $\Omega$  – параболоид  $z = \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{r^2}{2}$ , то данный интеграл по формуле примет вид

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr z \Big|_{\frac{r^2}{2}}^2 = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 \left( 2 - \frac{r^2}{2} \right) dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left( 2r^3 - \frac{r^5}{2} \right) dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{12} \right) \Big|_0^2 d\varphi = \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{8\varphi}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

6.1.6. Вычислить интеграл  $I = \iiint_{\Omega} dx dy dz$ ,  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$ ,

с помощью перехода к цилиндрическим или сферическим координатам.

► 1. Перейдем к цилиндрическим координатам, тогда уравнения поверхностей, ограничивающих область  $\Omega$ , запишутся в виде  $r^2 + z^2 = 2Rz$ ,  $r^2 = z^2$ . Переменная  $\varphi$  не входит в уравнения, следовательно,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Для того чтобы расставить пределы интегрирования по  $r$  и  $z$ , достаточно нарисовать область интегрирования в переменных  $r, z$  (рис. 6.5).

Таким образом, все сводится к расстановке пределов в *ДИ* по области  $D$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \iint_D r dr dz = 2\pi \left( \int_0^R dz \int_0^z r dr + \int_R^{2R} dz \int_0^{\sqrt{2Rz - z^2}} r dr \right) = \\ &= \pi \left( \int_0^R z^2 dz + \int_R^{2R} (2Rz - z^2) dz \right) dz = \pi R^3. \end{aligned}$$

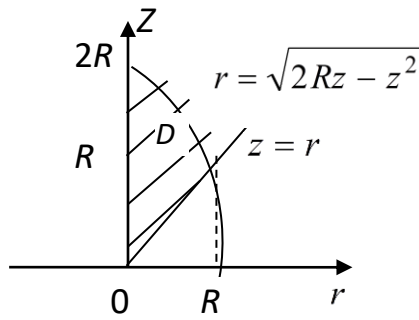


Рис. 6.5

2. Перейдём к сферическим координатам. Тогда уравнения поверхностей, ограничивающих область интегрирования, запишутся  $r = 2r \cos \theta$ ,  $\sin^2 \theta = \cos^2 \theta$ . Сделаем чертёж в переменных  $r, \theta$  (рис. 6.6).

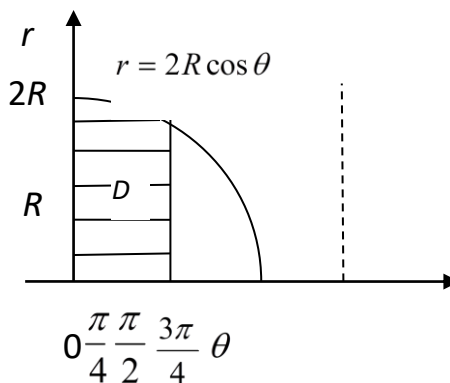


Рис. 6.6

Здесь  $\theta = \frac{\pi}{4}$  и  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  - решения уравнения  $\sin^2 \theta = \cos^2 \theta$  из промежутка  $[0, \pi]$ .

Тогда можно записать

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \iint_D \sin \theta dr d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2R \cos \theta} r^2 \sin \theta dr = \frac{16}{3} \pi R^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \cos^2 \theta d(\cos \theta) = \pi R^3. \blacktriangleleft$$

6.1.7. Вычислить  $\iiint_{\Omega} \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^2} dx dy dz$ , где  $\Omega$  - половина шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, y \geq 0$ .

► В сферической системе координат уравнение сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  записывается в виде  $r^2 = R^2$ , т.е.  $0 \leq r \leq R$ , а условие  $y \geq 0$  - в виде  $r \sin \varphi \sin \theta \geq 0$ , так как  $\sin \theta \geq 0$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), то  $\sin \varphi \geq 0$  и  $\varphi \in [0, \pi]$ .

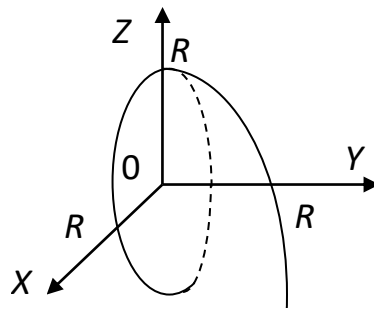


Рис. 6.7

Таким образом, в сферических координатах данная область задаётся следующим образом:

$$\Omega' = \{(r, \varphi, \theta) | 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

(что видно и из рисунка 6.7), а подынтегральная функция равна

$$\sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{1 + r^3}.$$

По формуле (вычисление *ТИ* в сферических координатах) получаем:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz = \iiint_{\Omega'} \sqrt{1 + r^3} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R \sqrt{1 + r^3} r^2 dr = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R (1 + r^3)^{\frac{1}{2}} d(1 + r^3) = \\ &= \frac{2}{9} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta (1 + r^3)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R = \frac{2}{9} \left( (1 + R^3)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \varphi \Big|_0^{\pi} (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{4\pi}{9} \left( (1 + R^3)^{\frac{3}{2}} - 1 \right). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

*Аудиторные задачи*

I. Расставить пределы интегрирования в *ТИ*  $\iiint_{\Omega} f dx dy dz$  для указанных областей  $\Omega$ :

6.1.8.

6.1.9.



II. Вычислить трехкратные интегралы и построить их области интегрирования:

6.1.10.

6.1.11.

III. Вычислить ТИ:

6.1.12.

6.1.13.

6.1.14

IV. Вычислить интегралы, переходя к цилиндрическим или сферическим координатам:

6.1.15.

6.1.17.

6.1.19. .

6.1.16.

6.1.18.

6.1.20.

Задание на дом

Вычислить ТИ:

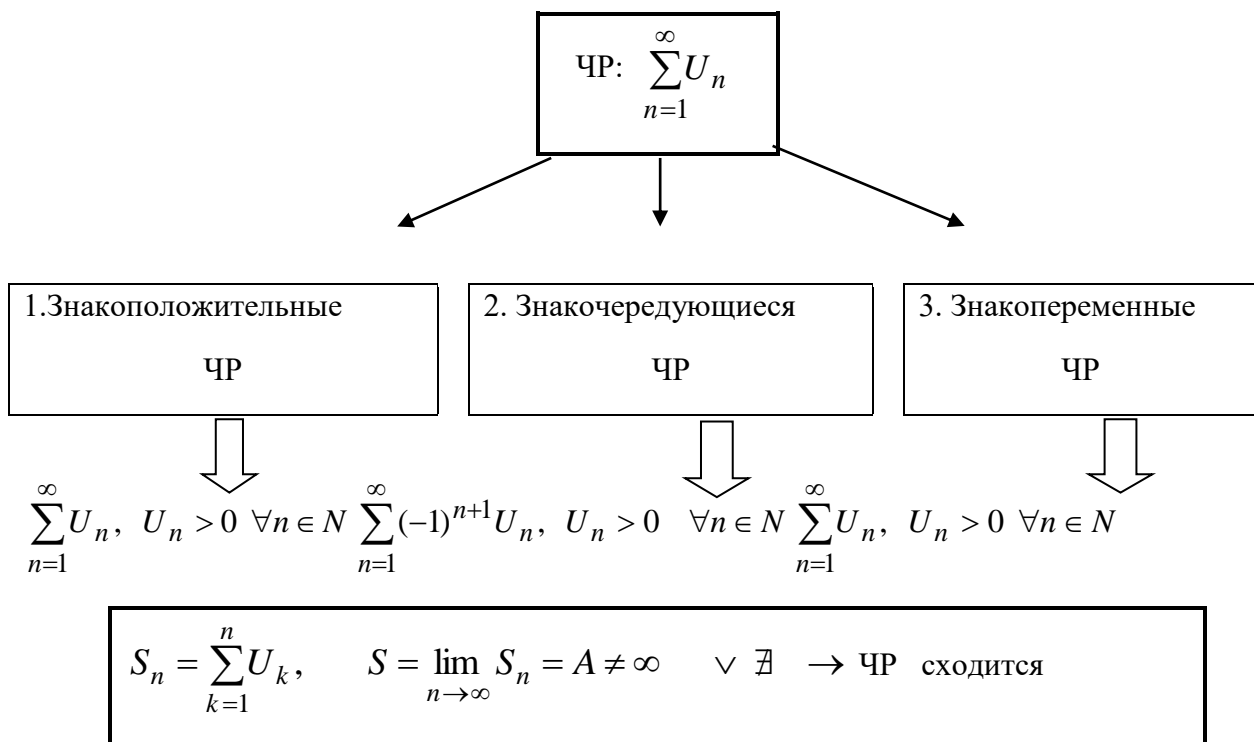
6.1.21.

6.1.22.

6.1.23.

### Пятое и шестое практические занятия

### ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ (ЧР)

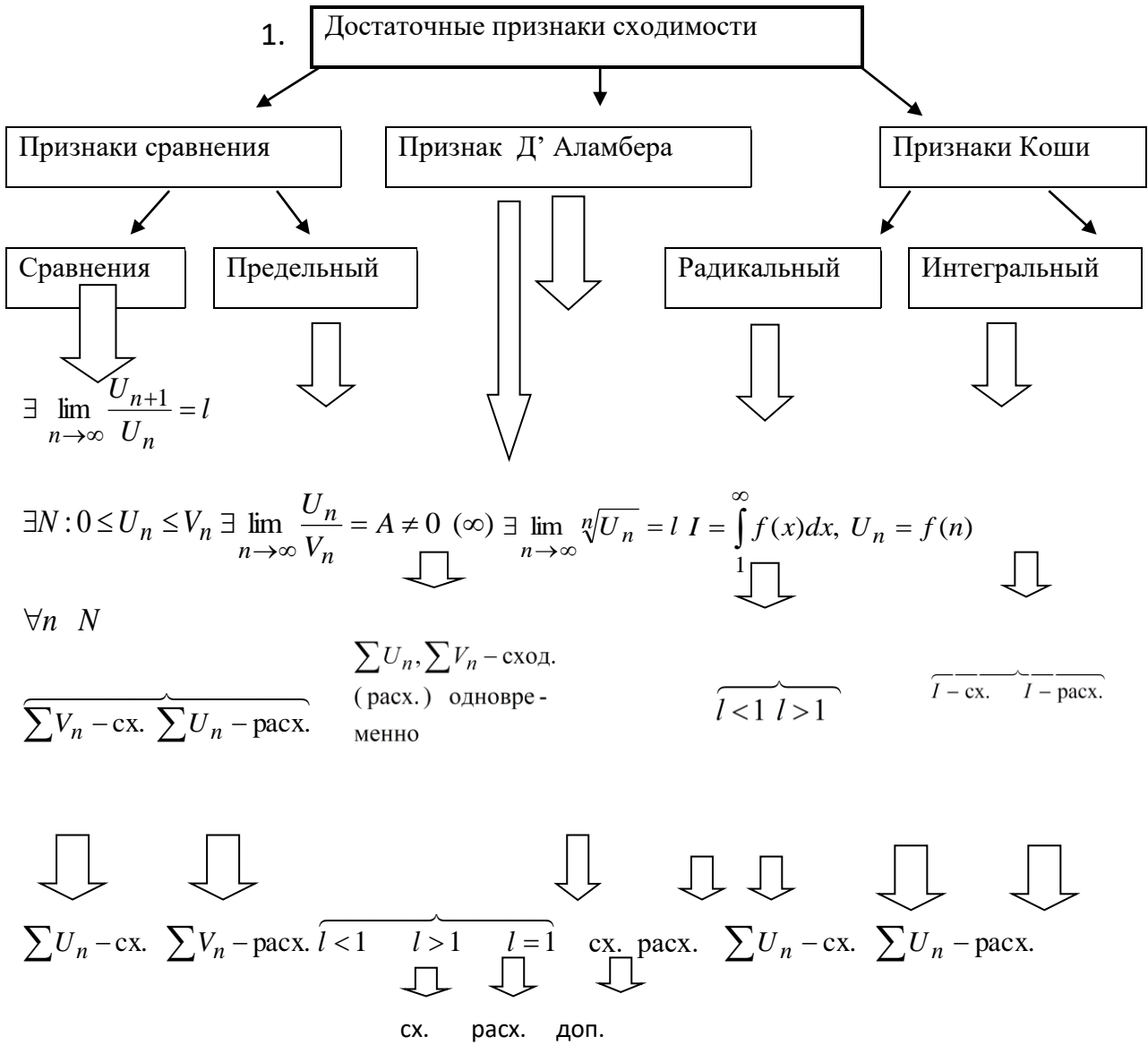


$$S - \text{сумма ряда; } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} - \text{сход. при } |q| < 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \text{сход. при } p > 1$$

Свойства ЧР: 1°.  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \iff \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-k} = S - S_k, S_k = \sum_{i=1}^k U_i.$

2°.  $S = \sum_{n=1}^{\infty} U_n, \delta = \sum_{n=1}^{\infty} V_n, W_n = aU_n + bV_n \rightarrow \exists \sum_{n=1}^{\infty} W_n = aS + b\delta.$

Необходимый признак сходимости:  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$



2. Признак Лейбница



$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n - \text{сх.}, \quad 0 < S \leq U_1$$



1.  $U_1 > U_2 > \dots > U_n > \dots$  .

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n, \quad U_n \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 - \text{сх.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n, \quad U_n \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 - \text{сх.}$$

абсолютно (+ +)

условно (+ -)

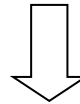
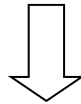
3.

Сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n, \quad U_n \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0$



абсолютная

условная



$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| - \text{сход.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| - \text{расх.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} U_n - \text{сх.}$$



### 3.1. Знакоположительные ЧР. Признаки сходимости

#### Примеры решений

3.1.1. Показать, что ЧР  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$  сходится, и найти его сумму.

► Так как дробь  $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$  можно представить в виде разности

$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ , то  $n$ -ю частичную сумму ряда можно записать как

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= 0,5 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = 0,5 \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0,5 \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = 0,5,$$

т. е. заданный ряд сходится и его сумма равна 0,5. ◀

3.1.2. Зная, что ЧР  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$  сходится, установить сходимость ЧР  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ .

▶ Так как  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ , то по признаку сравнения (см. таблицу) будет сходиться и исследуемый ЧР. ◀

3.1.3. Исследовать сходимость ЧР, для которого  $U_n = \frac{1}{n!}$ .

▶ Члены данного ряда меньше соответствующих членов заведомо сходящегося ряда (геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \frac{1}{2}$ ) или равны им:  $V_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ . Это следует из того, что  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \geq 2^{n-1}$ , т. е.  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ . Значит исследуемый ЧР сходится по признаку сравнения. ◀

3.1.4. Исследовать сходимость ряда с  $U_n = \frac{2n-1}{n^2+n-1}$ .

▶ Используем для исследования предельный признак сравнения. В качестве известного ряда возьмём гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , который сходится. Имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{U_n}{V_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2-n+1} : \frac{1}{n} = 2 \neq 0$  ( $\infty$ ), т. е. ЧР  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  расходится. ◀

3.1.5. Исследовать сходимость ЧР с  $U_n = \frac{n^5}{3^n}$ .

▶ Если выражение для  $U_n$  содержит показательную функцию (в нашем случае  $3^n$ ), удобно для исследования использовать признак Д'Аламбера (см. таблицу). Для  $U_{n+1}$  имеем:  $U_{n+1} = \frac{(n+1)^5}{3^{n+1}}$ . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)^5}{3^{n+1}} : \frac{n^5}{3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{(3n)^5} = \frac{1}{3} < 1.$$

Значит данный ряд сходится. ◀

3.1.6. Исследовать сходимость ЧР с  $U_n = \frac{4^n n!}{n^n}$ .

► По признаку Д'Аламбера имеем  $U_{n+1} = \frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{4}{e} > 1,$$

т. е. исследуемый ряд расходится. ◀

3.1.7. Исследовать сходимость ЧР с  $U_n = \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ .

► Если выражение для  $U_n$  позволяет извлечь корень  $n$ -ой степени, то обычно применяют радикальный признак Коши (см. таблицу). Имеем

$$\sqrt[n]{U_n} = \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Можно говорить о том, что данный ряд сходится. ◀

3.1.8. Исследовать сходимость ЧР  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ , если  $U_n = \frac{2n}{n^2 + 1}$ .

► Если выражение для  $U_n = f(n)$  позволяет достаточно легко ответить на вопрос о сходимости Н<sup>с</sup>И  $\int_1^{\infty} f(x) dx$ , то применяют интегральный признак Коши (см. таблицу).  
В данном случае:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{2x dx}{x^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{2x dx}{x^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(1 + x^2) \Big|_1^b = \infty,$$

т. е. Н<sup>с</sup>И расходится, а значит расходится и исследуемый ЧР. ◀

3.1.9. Исследовать сходимость ЧР с  $U_n = \frac{1}{n \ln^3 n}$ ,  $n \geq 2$ .

► Имеем:

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^3 x} \quad \text{и}$$

$$I = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{2 \ln^2 x} \right) \Big|_2^b = \frac{1}{2 \ln^2 2} -$$

сходится.

Согласно интегральному признаку будет сходиться и заданный ЧР. ◀

### Аудиторные задачи

*I.* Доказать сходимость и найти сумму для ЧР:

3.1.10.

3.1.11.

3.1.12.

*II.* Используя признаки сравнения, исследовать на сходимость ЧР:

3.1.13.

3.1.14.

3.1.15.

*III.* Исследовать на сходимость при помощи признака Д'Аламбера ЧР:

3.1.16.

3.1.17.

3.1.18.

IV. Пользуясь радикальным признаком, исследовать на сходимость ЧР:

3.1.19.

3.1.20.

3.1.21.

V. При помощи интегрального признака исследовать сходимость ЧР:

3.1.22.

3.1.23.

3.1.24.

### Задание на дом

3.1.25. Найти  $S_n$  и  $S$ , доказав сходимость ЧР

Исследовать на сходимость ЧР:

3.1.26.

3.1.29.

3.1.32.

3.1.27.

3.1.30.

3.1.33

3.1.28.

3.1.31.

### **Знакопеременные ЧР. Признак Лейбница**

#### Примеры решений

3.2.1. Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ .

► Так как  $U_n = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n+1} = U_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ , то выполнены условия 1 и 2 признака Лейбница (см. таблицу), и данный ряд сходится. ◀

3.2.2. Исследовать на сходимость ряд  $\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \dots$ .

► В признаке Лейбница существенным требованием является монотонное убывание (условие 1). Если оно не выполнено, то знакопеременный ЧР может оказаться расходящимся. В данном примере  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ , но ЧР расходится, так как его частичная

сумма с номером  $2n$   $S_{2n} = \frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{1} - \frac{1}{2} + \dots + \frac{2}{n} - \frac{1}{n}$  является  $n$ -й частичной суммой

гармони-

ческого ряда и, следовательно, неограниченно возрастает при  $n \rightarrow \infty$ . ◀

### Аудиторные задачи

Исследовать на сходимость следующие знакочередующиеся ЧР:

3.2.3.

3.2.5.

3.2.4.

3.2.6.

3.2.7.

3.2.8.

### Задание на дом

Вычислить, какие из данных рядов сходятся и какие расходятся:

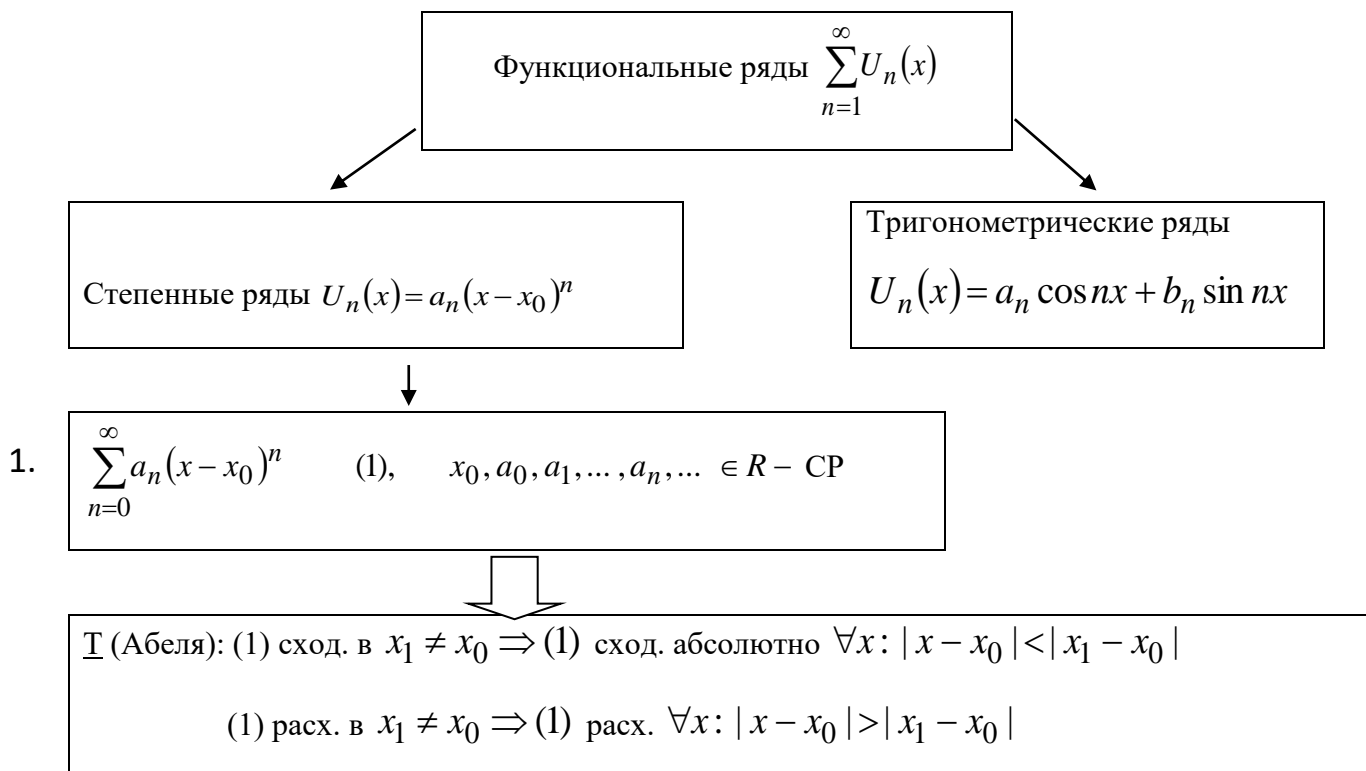
3.2.9.

3.2.10.

3.2.11.

### Седьмое практическое занятие

#### СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ (СР)



$$\text{Радиус сходимости } R = \begin{cases} 0 \Rightarrow x = x_0 - \text{т.сходимости} \\ \infty \Rightarrow x \in R \text{ Интервал сходимости } : x \in (x_0 - R, x_0 + R) \\ A \Rightarrow x \in (x_0 - A, x_0 + A) \end{cases}$$



$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}$$

СВОЙСТВА СР: 1°.  $S = S(x)$  – сумма СР, непр.  $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ .

2°.  $S(x)$  – сумма (1)  $\Rightarrow \exists S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$ .

3°.  $S(x)$  – сумма (1)  $\Rightarrow \exists \int_a^b S(x) dx \forall [a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ .

4°.  $S(x), \int_a^b S(x) dx$  – сход.  $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ .

2. **Ряды Тейлора и Макларена**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} \quad (2)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} \quad (3)$$

**Т:**  $f(x) = S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0,$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} \quad R_n(x) = f(x) - S_n(x)$$

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$\xi \in (x_0, x)$  – остаток

в форме  
Лагранжа

Разложение основных элементарных функций в ряд Макларена:

1.  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ . 2.  $\exists R: \forall x \in (-R, R)$  (3) – сход. 3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$x \in R$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-1}$$

$$x \in R$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$x \in R$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2!} + \dots + m(m-1)\dots(m-n+1)\frac{x^n}{n!} + \dots,$$

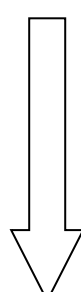
$$x \in (-1, 1), \quad m \in R$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$x \in (-1, 1)$$

$$\arcsin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) x^{2n-1}}{2^{n-1} (n-1)! (2n-1)}, \quad x \in (-1, 1)$$



3. Применение СР к приближенным вычислениям

Вычисление значений функций

Вычисление корней

Вычисление логарифмов

Вычисление пределов

Вычисление определенных интегралов

$$\ln(N+1) = \ln N +$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

$$x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R) \Rightarrow f(x_1) \approx S_n(x_1), \quad \Delta = |f(x_1) - S_n(x_1)| = R_n(x_1)$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2N+1)^{2n-1}}$$

$$x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x-x_0)^n dx$$

#### 4.1. Функциональный и степенной ряд. Радиус и интервал сходимости СР

4.1.1. Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$ .

► Для определения области сходимости функциональных рядов обычно используется признак Д'Аламбера. Затем те значения  $x$ , для которых этот признак не решает вопроса о сходимости ряда ( $l=1$ ), исследуются особо, исходя из других признаков сходимости рядов. В данном примере  $U_n(x) = \frac{1}{n(x+2)^n}$ ,  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \frac{1}{|x+2|}$ .

Ряд сходится при  $\frac{1}{|x+2|} < 1$ , тогда  $|x+2| > 1$  или  $-1 > x+2 > 1$ , отсюда

$x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$ . При  $x = -3$  получим знакочередующийся ряд с  $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,

который сходится по признаку Лейбница. При  $x = -1$  получим гармонический расходящийся ряд. Область сходимости данного ряда состоит из двух интервалов

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty). \blacktriangleleft$$

4.1.2. Определить область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ .

► Данный ряд сходится (как ряд Дирихле) для значений  $x > 1$  и расходится для значений  $x \leq 1$ . Следовательно, область сходимости есть интервал  $(1, +\infty)$ . ◀

4.1.3. Найти область сходимости функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt[3]{\sin x}$ .

► Воспользуемся радикальным признаком Коши  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n(x)} = \sqrt[3]{\sin x} < 1$

что выполняется  $\forall x \neq x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ . При  $x = x_k$   $\sin x = \pm 1$  и исследуемый ряд расходится. ◀

4.1.4. Найти радиус и интервал сходимости СР с  $U_n = \frac{x^n}{(n+1)5^n}$ .

► Определить радиус сходимости СР  $R$ , используя формулу (см. таблицу)

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ , полученную из признака Д'Аламбера. Имеем:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)5^n}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)5^{n+1}}, R = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^{n+1} \frac{n+2}{(n+1)5^n} = 5.$$

Следовательно, СР сходится  $\forall x \in (-5, 5)$  – интервалу сходимости. ◀

4.1.5. Найти интервал сходимости и сумму СР  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ , используя его свойства.

► Воспользуемся свойством 2 СР (см. таблицу), по которому СР можно почленно дифференцировать внутри интервала его сходимости. Найдём

$$S'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \cdot (-x^2)^{n-1} - \text{бесконечно убывающая геометрическая}$$

прогрессия с  $b=1, q=-x^2 < 1$ , для которой  $S = \frac{b}{1-q} = \frac{1}{1+x^2} = S'(x)$ . Интегрируя,

$$\text{имеем } S(x) = \int_0^x S'(x) dx = \arctg x. \text{ СР сходится при } |x| < 1. \blacktriangleleft$$

#### Аудиторные задачи

I. Определить область сходимости функциональных рядов:

4.1.6.

4.1.7.

4.1.8.

II. Определить радиус и интервал сходимости СР:

4.1.9.

4.1.12.

4.1.10.

4.1.13.

4.1.11.

4.1.14.

III. Используя свойства СР, найти интервал сходимости и сумму  $S(x)$ :

4.1.15.

4.1.16.

4.1.17.

#### Задание на дом

4.1.18.

4.1.19.

4.1.20.

### Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена

4.2.1. Разложить в ряд по степеням  $x$  функцию  $f(x) = e^x \sin x$ .

► Находим производные функции  $f(x)$  и их значения в т.  $x=0$ :

$$f(0) = 0; f'(x) = e^x(\cos x + \sin x) = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right); f'(0) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4};$$

$$f''(x) = (\sqrt{2})^2 e^x \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right); f''(0) = (\sqrt{2})^2 \sin \frac{2\pi}{4};$$

$$f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \cdot \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) f^{(n)}(0) = (\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Оценим абсолютную величину остаточного члена  $R_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{(\sqrt{2})^{n+1} e^\xi \sin\left(\xi + \frac{(n+1)\pi}{4}\right) x^{n+1}}{(n+1)!} \right| < U_n = \\ &= \frac{(\sqrt{2})^{n+1} e^x |x|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Для ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  имеем:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(\sqrt{2})^{n+2} e^x |x|^{n+2}}{(n+2)!} : \frac{(\sqrt{2})^{n+1} e^x |x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\sqrt{2} |x|}{n+2} \rightarrow 0, R < 1 \quad \forall x.$$

Следовательно, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$  сходится (по признаку Д'Аламбера), а его общий член  $U_n \rightarrow 0$

при  $n \rightarrow \infty$  (в силу необходимого признака сходимости), поэтому и остаточный член  $R_n(x)$ , по модулю меньший  $U_n$ , тем более стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Поэтому имеем:

$$e^x \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \frac{x^n}{n!}, x \in R. \blacktriangleleft$$

4.2.2. Написать ряд Тейлора по степеням  $(x-1)$  функции  $f(x) = \ln(x+2)$ .

► Находим производные функции  $f(x)$  и их значение в точке  $x = 1$ :

$$f(x) = \ln(x+2); \quad f(1) = \ln 3; \quad f'(x) = \frac{1}{x+2}; \quad f'(1) = \frac{1}{3}; \quad \dots;$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)! (x+2)^{-n}; \quad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{3^n}.$$

Следовательно, ряд Тейлора для  $f(x) = \ln(x+2)$  имеет вид

$$\ln 3 + \frac{x-1}{3} - \frac{(x-1)^2}{2 \cdot 3^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 3^n} + \dots \quad \blacktriangleleft$$

4.2.3. Разложить в ряд Маклорена функцию  $f(x) = x \ln(1+x^2)$

► Заметим, что

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (x \in (-1, 1]).$$

Заменяя в последнем равенстве  $x$  на  $x^2$ , будем иметь ( $x \in [-1, 1]$ ):

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n} + \dots,$$

а поэтому

$$x \ln(1+x^2) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{n} + \dots \quad (x \in [-1, 1]). \quad \blacktriangleleft$$

4.2.4. Разложить в ряд Тейлора функцию  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  по степеням  $(x-1)$ .

► Преобразуем эту функцию так, чтобы можно было использовать разложение функции  $\frac{1}{1-x}$ . Полагая  $\frac{1}{x+2} = \frac{a}{1+b(x-1)}$ , из тождества  $1+b(x-1) = a(x+2)$

найдем  $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}$ . Следовательно,  $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3 \left(1 + \frac{x-1}{3}\right)}$ . Заменяя в разложении

функции  $\frac{1}{1+x}$  величину  $x$  на  $\frac{x-1}{3}$ , получим:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{x-1}{3} + \frac{(x-1)^2}{3^2} - \dots + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^n} + \dots \right).$$

Это разложение справедливо, когда  $\left| \frac{x-1}{3} \right| < 1$  или  $x \in (-2, 4)$ . ◀

4.2.5. Разложить функцию  $f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$  в ряд Маклорена.

► Известно, что  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ ,  $x \in (-1, 1)$ . Поэтому

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^n}{n}, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1).$$

Отсюда 
$$\ln \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}} = \frac{1}{3} (\ln(1+2x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)^{n+1} 2^n + 1)x^n}{n} =$$

$$= \frac{1}{3} \left( 3x - \frac{3x^2}{2} + \frac{9x^3}{3} - \frac{15x^4}{4} + \dots \right) = x - \frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{5x^4}{4} + \dots, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \blacktriangleleft$$

#### Аудиторные задачи

I. Разложить данные функции в ряд Тейлора по степеням  $(x - x_0)$ :

4.2.6.

4.2.7.

4.2.8.

II. Разложить функции в ряд Маклорена:

4.2.9.

4.2.10.

4.2.11.

Задание на дом

4.2.12.

4.2.14.

4.2.16.

4.2.13.

4.2.15.

4.2.17

**Шестое и седьмое практические занятия**

**Ряды Фурье**

Тригонометрический ряд  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, a_0, a_n, b_n \in R \quad \forall n \in N$  (1)



$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \text{ - сход. равномерно} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon): n > N \Rightarrow |R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

$\forall x \in X$   $\forall x \in X$

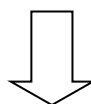
Свойства (1): 1°.  $S(x)$  - непр. и период. с  $T = 2\pi$ .

2°.  $\forall \varphi(x) \in \{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^n \Rightarrow \left| \varphi(x) \sum_{n=N+1}^{\infty} U_n(x) \right| < |R_n(x)| < \varepsilon.$

3°.  $\exists \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (x) dx.$

Признак равномерной сходимости (Вейерштрасса):  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  - сход.  $a_n > 0,$

$$\exists N: \forall n \geq N \forall x \in X: |U_n(x)| \leq a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \text{ - сх. равномерно}$$



Ряд Фурье для  $f(x)$



$$(1) \quad c \ a_0 = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right) dx, \quad T - \text{период.} \quad (2)$$

ряд Фурье сходится :

$$\left. \begin{array}{l} T \text{ (Дирихле)}: f(x) = f(x \pm T) \quad \forall x \in [a, a \pm T]: \\ 1. f(x) \in C[a, a \pm T] \vee \exists (x_1, \dots, x_k) - \text{м.п. } I \text{ p.} \\ 2. \exists f(x) \forall x \in [a, a \pm T], a = x_0, x_1, \dots, x_k = a + T: \\ f(x) - \text{мнотонна и ограничена } \forall (x_{i+1}, x_i) \\ i = \overline{1, k} \end{array} \right\} \Rightarrow S(x) = \begin{cases} f(x), & x - \text{м. непр.} \\ \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)) \end{cases}$$

$x_0 - \text{м.п. } I \text{ p}$

$$f(x) = f(x \pm T), \quad T = 2\pi$$

$$f(x) = f(x \pm T), \quad T = 2l$$

$$f(x) \neq f(x \pm T)$$

$$f(x) = f(-x)$$

$$f(x) = -f(-x)$$

$$f(-x) = f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$$x \in [0, l] \Rightarrow \forall x \in [-l, 0]:$$

$$\frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx$$

1

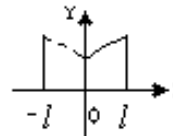
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot$$

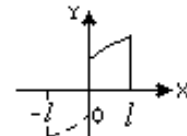
$$\cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

2

$$f(x) = f(-x) \quad \vee \quad f(x) = -f(-x)$$



(5)



(6)

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \\ & b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \\ (4) \quad & a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \\ & a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \end{aligned} \right\} (5)$$

### 5.1. Коэффициенты Фурье. Ряд функций с периодом $2\pi$

5.1.1. Разложить периодическую с  $T = 2\pi$  функцию  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$  в ряд

Фурье, построить графики его первых частичных сумм  $S_0(x)$ ,  $S_1(x)$ ,  $S_2(x)$  и  $S_3(x)$  и найти значение  $S(x_0)$  суммы полученного ряда в заданной точке  $x_0 = \pi$ .

► График заданной функции имеет вид, изображённый на рис. 5.1 (сплошная линия), т.е.  $f(x)$ - произвольного вида и ряд Фурье имеет вид (1) с коэффициентом (2). Имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = \frac{x}{\pi} \Big|_0^{\pi} = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nxdx =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \sin nx \Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nxdx =$$

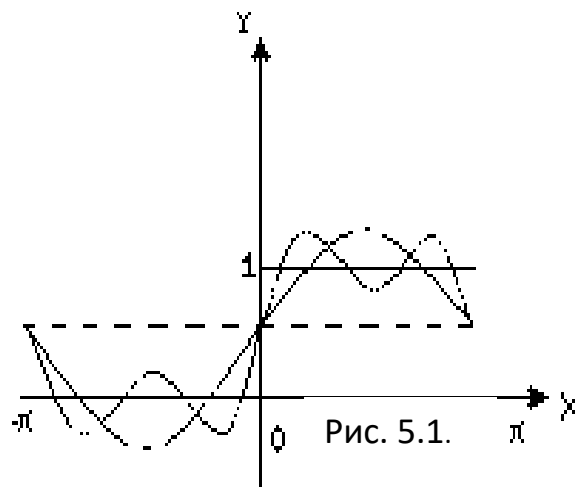
$$= \frac{1}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n). \text{ Тогда}$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n) \sin nx}{n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right).$$

Для первых частичных сумм получим:

$$S_0(x) = \frac{1}{2}, S_1(x) = \frac{1}{2} + 2 \sin \frac{x}{\pi}, S_2(x) = S_1(x), S_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{2 \sin nx}{\pi} + \frac{2 \sin 3x}{3\pi}.$$

Построим графики этих сумм, обозначая  $S_0(x) = \text{---}$ ,



$S_1(x) = S_2(x) - \dots$  и  $S_3(x) - \dots$  (рис.5.1). В т.  $x_0 = \pi$   $\sin(2n-1) = 0$  и  $S_1(x_0) = \frac{1}{2}$ . ◀

### Аудиторные задачи

5.1.2.

5.1.3.

5.1.4.

### Задание на дом

5.1.5.

5.1.6.

### **Ряд Фурье для чётных и нечётных функций**

5.2.1. Разложить в ряд Фурье  $2\pi$  - периодическую функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке  $x \in [-\pi, \pi]$  следующим образом:  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi), \\ -1, & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$

► Эта функция кусочно монотонна и ограничена на отрезке  $x \in [-\pi, \pi]$  и по теореме разложения может быть представлена рядом Фурье. Вычислим коэффициенты ряда Фурье. Поскольку функция  $f(x)$  нечётная, воспользуемся формулой (4). Получаем:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \frac{4}{(2n-1)\pi}, n \in N.$$

Таким образом, ряд Фурье функции  $f(x)$  имеет вид:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

С помощью рядов Фурье можно находить суммы многих интересных ЧР. Например подставляя в полученный ряд  $x = \frac{\pi}{2}$ , обнаружим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{\pi}{4}. \blacktriangleleft$$

5.2.2. Разложить в ряд Фурье  $2\pi$  - периодическую функцию  $f(x) = x^2$ , заданную на отрезке  $x \in [-\pi, \pi]$ .

► Эта функция кусочно монотонна, ограничена на отрезке  $x \in [-\pi, \pi]$  и по теореме разложения может быть представлена рядом Фурье. Поскольку эта функция чётная, воспользуемся формулой (3). Получаем:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2x^3}{3\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, dv = \cos nx dx \\ du = 2x dx, v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right| = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{x^2 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \frac{x \sin nx dx}{n} \right) = \left| \begin{array}{l} u = x, dv = \sin x dx \\ du = dx, v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{4}{\pi n} \left( -\frac{x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx dx}{n} \right) = \frac{4x \cos nx}{\pi n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{4 \cos n\pi}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье для данной функции имеет вид:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Этот ряд сходится во всех точках и его сумма равна  $f(x)$ . ◀

#### Аудиторные задачи

Указанные функции разложить в ряд Фурье в интервале  $(-\pi, \pi)$ . Определить сумму ряда в точках разрыва и на концах интервала  $(-\pi, \pi)$ , построить график функции и суммы соответствующего ряда (также и вне интервала  $(-\pi, \pi)$ ):

5.2.4.

5.2.3.

5.2.5.

5.2.6.

#### Задание на дом

Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x)$  с периодом  $T = 2\pi$ , если:

5.2.7.

5.2.8.

**Ряд Фурье для функций с периодом  $2l$ .**

#### **Разложение в ряд Фурье непериодических функций**

5.3.1. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную несколькими формулами

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, -1 + \alpha), \\ 0, & x \in (-1 + \alpha, 0), \\ 1, & x \in (0, \alpha), \\ 0, & x \in (\alpha, 1), \end{cases} \quad \text{где } \alpha - \text{некоторое число, } \alpha \in (0, 1).$$

► Разложим заданную функцию в ряд

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{l} \left( \int_{-l}^{-l+\alpha} dx + \int_{-l+\alpha}^0 0 dx + \int_0^{\alpha} dx + \int_{\alpha}^1 0 dx \right) = \frac{2\alpha}{l}.$$

Легко видеть, что

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{n\pi} \left( (-1)^n + 1 \right) \sin \frac{n\pi\alpha}{l},$$

$$b_n = \frac{1}{l} \left( \int_{-l}^{-l+\alpha} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx + \int_0^{\alpha} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \right) = \frac{1}{n\pi} \left( (-1)^n + 1 \right) \left( 1 - \cos \frac{n\pi\alpha}{l} \right),$$

таким образом, при  $n = 2k + 1$  (нечётном) все  $a_{2k+1} = b_{2k+1} = 0$ , тогда как

$$a_{2k} = \frac{1}{k\pi} \sin \frac{2k\pi\alpha}{l}, \quad b_{2k} = \frac{1}{k\pi} \left( 1 - \cos \frac{2k\pi\alpha}{l} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Особенно простой результат

получается, если  $\alpha = \frac{l}{2}$ . Тогда

$$a_{2k} = \frac{1}{k\pi} \sin k\pi = 0, \quad b_{2k} = \frac{1}{k\pi} (1 - \cos k\pi) = \frac{1 - (-1)^k}{k\pi},$$

и ряд принимает вид:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi x}{l} + \dots \right). \quad \blacktriangleleft$$

5.3.2. Разложить функцию  $f(x) = x(\pi - x)$  в ряд синусов в интервале  $(0, \pi)$ .

Использовать полученный результат для нахождения суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

► Так как по условию задачи заданная непериодическая функция  $f(x)$  доопределяется на интервале  $(-\pi, 0)$  нечётным образом, воспользуемся формулой (6):

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx dx = \left| \begin{array}{l} u = \pi x - x^2, \quad dv = \sin nx dx \\ du = (\pi - 2x) dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = \\
&= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{x(\pi - x) \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} (\pi - 2x) \cos nx dx \right) = \left| \begin{array}{l} u = \pi - 2x, \quad dv = \cos nx dx \\ du = -2 dx, \quad v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right| = \\
&= \frac{2}{\pi^2} \left( (\pi - 2x) \sin nx \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = -\frac{4}{\pi^3} \cos nx \Big|_0^{\pi} = 4 \frac{1 - (-1)^n}{\pi^3}
\end{aligned}$$

и ряд принимает вид:

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

При  $x = \frac{\pi}{2}$  получим

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Тогда сумма заданного ЧР  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$ . ◀

#### Аудиторные задачи

I. Разложить в ряд Фурье функции  $f(x)$  с периодом  $T = 2l$ :

55.3.4.

5.3.3.

5.3.5.

II. Доопределяя заданную на  $(0, l)$  функцию  $f(x)$ , получить для неё ряд Фурье:

5.3.6.

по косинусам.

5.3.7.

по синусам.

5.3.8.

Задание на дом

5.3.9.

5.3.10.

**Восьмое практическое занятие**

*Дифференциальные уравнения первого порядка*

*Диф. уравнения с разделяющимися переменными*

Пример 1. Решить уравнение  $y' = x(y^2 + 1)$ .

Решение:  $\frac{dy}{y^2 + 1} = x dx \Rightarrow \arg \operatorname{tg} y = \frac{x^2}{2} + C$ .

Пример 2. Решить уравнение  $y' - xy^2 = 2xy$ .

Решение:

$$y' = xy(2 + y)$$

$$\frac{dy}{dx} = xy(2 + y)$$

$$\frac{dy}{y(2 + y)} = x dx$$

$$\int \frac{dy}{y(2 + y)} = \int x dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y + 2} = \frac{1}{2} \ln|y| - \frac{1}{2} \ln|2 + y| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y}{2 + y} \right|$$

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y}{2 + y} \right| = \frac{1}{2} x^2 + C$$

Задачи для самостоятельного решения:

1.  $y - y' = y^2 + xy'$

2.  $x \frac{dx}{dt} + t = 1$

Пример 3. Решить уравнение  $x y dx + (x + 1) dy = 0$ .

Решение:

$$\frac{x dx}{x+1} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int \frac{x dx}{x+1} + \int \frac{dy}{y} = \ln C$$

$$\int dx - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dy}{y} = \ln C$$

$$x - \ln|x+1| + \ln|y| = \ln C$$

$$\ln|y| = \ln|x+1| - \ln e^x + \ln C$$

$$y = C(x+1)e^{-x}$$

Задачи для самостоятельного решения:

1.  $\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy$

2.  $(xy - xy^3) dx + dy = 0$

Пример 4. Решить уравнение  $y' = \cos(y - x)$ .

Решение:

$$z = y - x \Rightarrow z' = y' - 1 \Rightarrow y' = z' + 1$$

$$z' + 1 = \cos z$$

$$\frac{dz}{dx} = \cos z - 1$$

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx + C$$

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = -\int \frac{dz}{2 \sin^2 \frac{z}{2}} = -\int \frac{d\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^2 \frac{z}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{z}{2}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{z}{2} = x + C$$

$$z = y - x \Rightarrow \operatorname{ctg} \frac{y-x}{2} = x + C$$

Задачи для самостоятельного решения:



$$1. (x + y)^2 + y' = 1$$

Пример 5. При начальных условиях  $y(0) = 1$  решить задачу Коши для дифференциального уравнения  $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ .

Решение:

$$(x^2 - 1) \frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = \frac{2x dx}{1 - x^2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{2x dx}{1 - x^2} \Rightarrow -\frac{1}{y} = -\ln|1 - x^2| - \ln C.$$

$$1 = y \ln|C(1 - x^2)|$$

Подставляя в общее решение  $x_0 = 0, y_0 = 1$

$$1 = y \ln|C(1 - 0^2)| \Rightarrow 1 = \ln C$$

$$C = e$$

$$1 = y \ln|e(1 - x^2)|$$

$$y = 1 + \ln|1 - x^2|$$

Задачи для самостоятельного решения:

$$1. y' \operatorname{ctg} x + y = 2; \quad y(0) = -1$$

$$2. y'x + y = y^2; \quad y(1) = 0,5$$

### Девятое практическое занятие

#### Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

Пример 1. Проверить, что функция  $f(x, y) = \frac{x^4 \ln \frac{x}{y}}{x + y \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$  является однородной функцией и определить ее измерение.

Решение:

$$f(xt, yt) = \frac{(xt)^4 \ln \frac{xt}{yt}}{xt + yt \operatorname{arctg} \frac{yt}{xt}} = \frac{t^4 x^4 \ln \frac{x}{y}}{t \left( x + y \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right)} = t^3 \frac{x^4 \ln \frac{x}{y}}{x + y \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} = t^3 f(x, y)$$

Пример 2. Найти решение уравнение  $y^2 + x^2 y' = xy y'$ .

Решение: Решением это уравнение, относительно  $y'$

$$y' = \frac{y^2}{x(y-x)}.$$

Т.к.  $f(x, y) = \frac{y^2}{x(y-x)}$ , стоящая в правой части этого уравнения, является однородной

функцией нулевого измерения, поскольку  $f(xt, yt) = f(x, y)$ , то уравнение является однородным. Сделаем замену  $y = ux$ ,  $y' = u'x + u$

$$u'x + u = \frac{u^2 x^2}{x(ux-x)}$$

$$u'x = \frac{u^2}{u-1} - u$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1}$$

$$\int \frac{u-1}{u} du = \int \frac{dx}{x} - \ln C$$

$$\int du - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} - \ln C$$

$$u - \ln|u| = \ln|x| - \ln C$$

$$ux = Ce^u$$

$$y = Ce^{\frac{y}{x}}$$

Задачи для самостоятельного решения:

1.  $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ ;

2.  $y'x - y = (y+x) \ln \frac{x+y}{x}$

Пример 3. Найти решение уравнение  $(x+2y)dx - xdy = 0$ .

Решение: Сделаем замену  $y = ux$ ,  $dy = udx + xdu$

$$(x + 2ux)dx - x(udx + xdu)$$

$$x((1 + u)dx - xdu) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow (1 + u)dx - xdu = 0$$

Разделяя в последнем уравнении переменные и интегрируя, найдем его решение

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{1 + u} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{1 + u} + \ln C$$

$$\ln|x| = \ln|1 + u| + \ln C$$

$$x = C(1 + u)$$

$$x = C\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

$$x^2 = C(x + y)$$

Задачи для самостоятельного решения:

1.  $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$
2.  $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$

### Десятое практическое занятие

#### *Метод Лагранжа (вариации)*

Пример 1. Решить уравнение  $xy' - 2y = 2x^4$ .

Решение:  $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ . Запишем ЛОУ  $y' - \frac{2}{x}y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} + \ln C$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C$$

$$y = Cx^2$$

Затем общее решение ЛНУ будем искать в виде  $y = C(x)x^2$ .

$$\frac{d(C(x))}{dx}x^2 + 2xC(x) - \frac{2}{x}C(x)x^2 = 2x^3$$

$$\frac{d(C(x))}{dx} = 2x$$

$$C(x) = 2\int x dx + C = x^2 + C$$

$$y = (x^2 + C)x^2$$

Задачи для самостоятельного решения:

$$1. \quad 2x(x^2 + y)dx = dy$$

$$2. \quad y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

$$3. \quad x^2 y' + xy + 1 = 0$$

### Метод Бернулли

Пример 2. Решить уравнение  $xy' + (x+1)y = 3xe^{-x}$ .

Решение:  $y' + \frac{(x+1)}{x}y = 3xe^{-x}$ .

$$y = uv$$

$$v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} + \frac{x+1}{x}uv = 3xe^{-x}$$

$$v \frac{du}{dx} + u \left( \frac{dv}{dx} + \frac{x+1}{x}v \right) = 3xe^{-x}$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{x+1}{x}v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{x+1}{x}v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{x+1}{x}dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{x+1}{x}dx$$

$$\ln|v| = -x - \ln|x| \Rightarrow v = \frac{e^{-x}}{x}$$

$$\frac{e^{-x}}{x} \frac{du}{dx} = 3xe^{-x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$u = 3\int x^2 dx + C = x^3 + C$$

$$y = uv = \frac{x^3 + C}{xe^x}$$

$$y = (x^2 + C)x^2$$

Задачи для самостоятельного решения:

1.  $y \sin x + y' \cos x = 1$

### Уравнения Бернулли

Пример 3. Решить уравнение  $y' + xy = x^3 y^3$ .

Решение:  $y' + xy = x^3 y^3 \quad | : y^3$

$$y'y^{-3} + xy^{-2} = x^3$$

$$z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y'$$

$$z' - 2xz = -2x^3$$

$$z' - 2xz = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = 2xdx \Rightarrow$$

$$\ln|z| = x^2 + \ln C \Rightarrow z = Ce^{x^2}$$

$$z = C(x)e^{x^2}$$

$$z' = C'e^{x^2} + 2xCe^{x^2} \Rightarrow$$

$$C'(x)e^{x^2} = -2x^3$$

$$dC = -2x^3 e^{-x^2} dx \Rightarrow C(x) = -\int 2x^3 e^{-x^2} dx + C$$

$$C(x) = (x^2 + 1)e^{-x^2} + C$$

$$z = (x^2 + 1) + Ce^{x^2} \Rightarrow \frac{1}{y^2} = 1 + x^2 + Ce^{x^2}$$

### Одиннадцатое практическое занятие

#### Уравнения в полных дифференциалах

Пример 1. Решить уравнение  $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2\cos^2 x dy = 0$ .

Решение:

$$M(x, y) = 1 + y^2 \sin 2x; N(x, y) = -2y \cos^2 x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \sin 2x; \frac{\partial N}{\partial x} = -2y(-2 \cos x \sin x) = 2y \sin 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + y^2 \sin 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \cos^2 x$$

$$u(x, y) = \int (1 + y^2 \sin 2x) dx + C(y) = x - \frac{1}{2} y^2 \cos 2x + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -y \cos 2x + \frac{d(C(y))}{dy} = -2y \cos^2 x$$

$$\frac{d(C(y))}{dy} = y(\cos 2x - 2 \cos^2 x) = y(\cos^2 x - \sin^2 x - 2 \cos^2 x) = -y$$

$$C(y) = -\int y dy + C = -\frac{y^2}{2} + C$$

$$u(x, y) = x - \frac{1}{2} y^2 \cos 2x - \frac{y^2}{2} + C = x - \frac{y^2}{2} (1 + \cos 2x) + C = x - y^2 \cos^2 x + C$$

Задачи для самостоятельного решения:

1.  $xy^2 y' = x^2 + y^3$
2.  $(2x^2 y \ln y - x) y' = y$
3.  $e^y dx - (2y + x e^y) dy = 0$
4.  $\frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx = \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy$
5.  $(\cos x - x \sin x) y dx + (x \cos x - 2y) dy = 0$