aba80b84033c9ef196388e9ea0434f90a83a40954ba270e84bcbe64f02d1d8d0

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический

университет им. А.Н. Туполева-КАИ»

(КНИТУ-КАИ)

Чистопольский филиал «Восток»

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

по дисциплине

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Индекс по учебному плану: **Б1.О.07.02**
Направление подготовки: **09.03.01 Информатика и вычислительная техника**
Квалификация: **Бакалавр**
Профиль подготовки: **Автоматизированные системы обработки информации и управления**
Вид профессиональной деятельности: **проектная, производственно-технологическая**

Чистополь

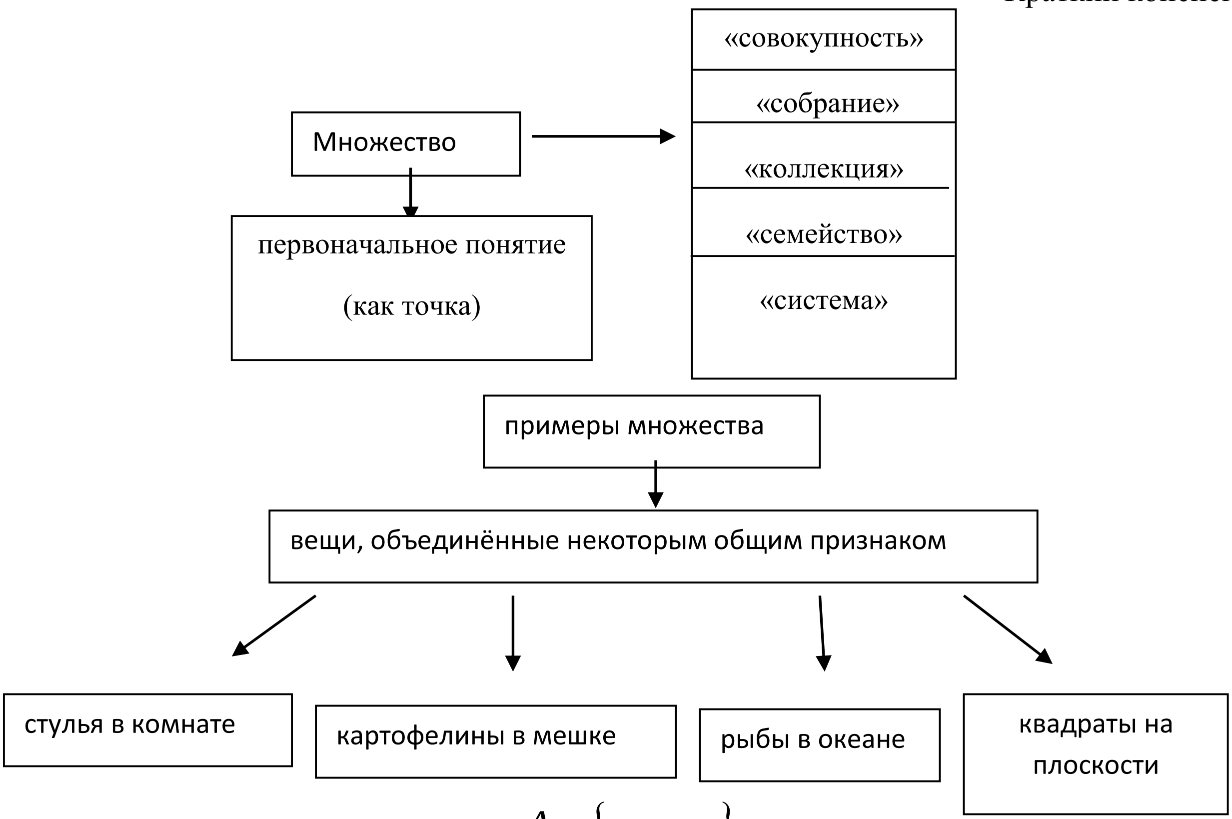
2023 г.

## Первое практическое занятие

### *Введение в математический анализ. Элементы теории множеств и функций*
### *Множества и операции над ними*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с понятием действительных чисел, с понятием множества и операций над ними, с умением применять экономную символику, используемую в логике.

Краткий конспект

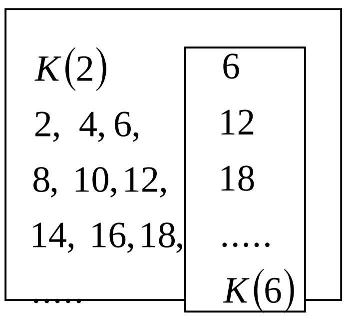



$$A = \{x, z, y \ldots\}$$

множество элементы

| ***конечные*** | ***бесконечные*** |
|---|---|
| деревья в лесу | точки окружности |

***Подмножество***: $A \subset B$




$$K(6) \subset K(2).$$

$\left|\dfrac{\text{Пересечением}}{\text{Объединением}}\right.$ двух множеств называется множество, которое состоит из элементов, входящих $\left|\dfrac{\text{в каждое}}{\text{хотя бы в одно}}\right.$ из данных множеств.

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

*Аудиторные задачи:* стр. 7-11

№№ 5.28; 5.29; 5.31; 5.36; 5.38; 5.45; 5.44; 5.46; 5.49; 5.51; 5.53; 5.83; 5.85; 5.87; 5.89; 5.91 а; 5.92 а

*Задания для самостоятельного решения:*

№№ 5.30; 5.32; 5.34; 5.35; 5.37; 5.39; 5.47; 5.50; 5.52; 5.84; 5.86; 5.88; 5.90; 5.91 б; 5.92 б

## Второе практическое занятие

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с понятием комплексных чисел, с умением записывать комплексные числа в различных формах записи, выполнять операции над комплексными числами.

Краткий конспект

### 1. *Комплексные числа* (КЧ)

$a,b\in N$ $\qquad$ $a,b\in N$ $\qquad$ $a,n\in N$

$\oplus$ $\qquad c-b=a,\ a\in Z$ $\otimes$ $\quad a=\dfrac{c}{b},\ a\in Q$ $\quad a=\sqrt[n]{b},\ a\in R$ $\circledast$

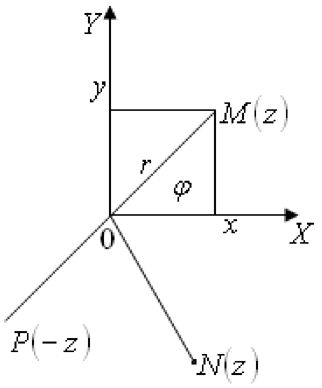
$a+b=c,$ $\ominus$ $\qquad a\cdot b=c,$ $\odot$ $\qquad a^n=b,$ $\oslash$

$c\in N$ $\quad b,c\in N$ $\quad c\in N$ $\quad c,b\in N$ $\quad b\in N$ $\quad b,n\in N$

$$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C:\qquad C=\{z\mid z=x+iy,\ x,y\in R\},\quad z-\text{КЧ}.$$

$$z=\left\{\begin{array}{l} x+iy,\ x=\operatorname{Re}z,\ y=\operatorname{Im}z,\ i^2=-1\ -\text{алгебраическая}\\ r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ r=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi=\arg z=arctg\,\dfrac{y}{x}-\text{тригонометрическая}\\ r=e^{i\varphi},\ e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi-\text{показательная}\end{array}\right\}\ \text{- формы записи}$$

$XOY$ - комплексная плоскость:




$OX$ - действительная, $OY$ - мнимая оси,

$$M(x, y) \leftrightarrow z = x + iy \leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \{x, y\}$$

$\bar{z} = x - iy$ - сопряжённое к $z$

$-z = -x - iy$ - противоположное к $z$

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

$$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

| Действия / Форма записи | $z_1, z_2 \in C$ <br> ⊕ $z = z_1 - z_2$ <br> $z = z_1 + z_2$ ⊖ | $z_1, z_2 \in C$ <br> ⊗ $z = \frac{z_1}{z_2}$ <br> ⊙ <br> $z = z_1 \cdot z_2$ | $w, z \in C, n \in N$ <br> $\sqrt[n]{z} = w$ <br> $z = w^n$ |
|---|---|---|---|
| $z = x + iy$ | $x = x_1 + x_2$ <br> $y = y_1 + y_2$ <br> $x = x_1 - x_2$ <br> $y = y_1 - y_2$ | $x = x_1x_2 - y_1y_2$ <br> $x = x_1x_2 - y_1y_2$ <br> $x = \frac{x = x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$ <br> $y = \frac{x = y_1x_2 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$ | — <br> — |
| $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ | — <br> — | $r = r_1r_2$ <br> $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ <br> $r = \frac{r_1}{r_2}$ <br> $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ | $r = \rho^n$ <br> $\varphi = n\theta$ <br> $\rho = \sqrt[n]{r}$ <br> $\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ <br> $k = \overline{0, n-1}$ |

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

*Аудиторные задачи:* стр. 39-47

№№ 5.421; 5.423; 5.424; 5.426; 5.428; 5.430; 5.435; 5.437; 5.477; 5.485; 5.497; 5.499

*Задания для самостоятельного решения:*

№№ 5.436; 5.438; 5.486; 5.488; 5.496; 5.498; 5.500

## Третье практическое занятие

### *Числовая последовательность. Предел числовой последовательности*

### *Пределы функций*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с понятием числовой последовательности, пределом числовой последовательности, с понятием предела функции, знанием основных определений предела функции одной переменной, умением раскрывать некоторые неопределенности.

Краткий конспект

### Пределы ФОП

### Предел последовательности. Предел функции в точке

Число $\left|\dfrac{a}{A}\right.$ называется пределом $\left|\dfrac{\{x_n\}}{f(x)\text{ в т. }x_0}\right.$ если $\forall\varepsilon>0$ $\exists\left|\dfrac{n_0(\varepsilon)\in N}{\delta(\varepsilon)>0}\right.$, что $\forall\left|\dfrac{n>n_0}{x\in D\left(|x-x_0|<\delta\right)}\right.$, выполняется неравенство $\left|\dfrac{|x_n-a|<\varepsilon}{|f(x)-A|<\varepsilon}\right.$.

Обозначение $\left|\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a}{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A}\right.$.

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)^n$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\varphi(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f(x)\lim_{x\to x_0}\varphi(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(C\,f(x)\right)=C\lim_{x\to x_0}f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}f\left(g(x)\right)=f\left(\lim_{x\to x_0}g(x)\right)=f\left(g(x_0)\right)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)^n$$

$$\lim_{x\to x_0}{}^{n}f(x)=\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)^n$$

***Первый*** | ***Второй***

***замечательный***

предел и его следствия

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{m}{n}$$

$$\boxed{\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e, \text{где } e=2,71828......$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$$

Бесконечно $\left|\dfrac{\text{малые}}{\text{большие}}\right.$ функции

$$\left|\dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0}{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty}\right. \Leftrightarrow \left|\dfrac{\alpha(x) - б.м.}{f(x) - б.б.}\right.$$

Связь б.м. и б.б.

| $x_n$ | $y_n$ | $\dfrac{x_n}{y_n}$ | $x_n y_n$ | $\dfrac{y_n}{x_n}$ |
|---|---|---|---|---|
| б.м. | огран. | 0 | 0 | $\infty$ |
| б.б. | огран. | $\infty$ | $\infty$ | 0 |

Если $x_n$ – б.б $\Leftrightarrow x_n$ – неограниченная

| $\Rightarrow$ | $\Leftarrow$ |
|---|---|
| верно | не всегда верно |
| $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n \ldots$ | $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots, (-1)^n n$ |
| $1, 2, 3, \ldots, n \ldots$ | $1, 2, \dfrac{1}{3}, 4, \dfrac{1}{5}, \ldots, (n)^{(-1)^n} \ldots$ |

*Аудиторные задачи:*

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.2 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 352 с.

Самостоятельная работа по теме «Основные понятия. Операции над комплексными числами» (стр 12).

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 25-28

№№ 5.213; 5.215; 5.217; 5.221; 5.225; 5.227; 5.230 б, г; 5.232; 5.236; 5.240; 5.242; 5.244;

5.437; 5.477; 5.485; 5.497; 5.499

стр. 28-35

№№ 5.273; 5.277; 5.279; 5.281; 5.283; 5.289.

*Задания для самостоятельного решения:*

№№ 5.214; 5.216; 5.218; 5.220; 5.222; 5.230 а; 5.234; 5.236; 5.238; 5.240; 5.242; 5.244; 5.246.

№№ 5.272; 5.276; 5.280; 5.282; 5.284; 5.288; 5.302.

## Четвертое практическое занятие

### *Замечательные пределы*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением раскрывать некоторые виды неопределенностей с применением формул замечательных пределов и их следствий.

*Аудиторные задачи:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 30-33

№№ 5.303; 5.305; 5.307; 5.309; 5.311; 5.313; 5.315; 5.320; 5.322; 5.324; 5.326; 5.328; 5.330; 5.332.

*Задания для самостоятельного решения:*

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.1 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 270 с.

Стр. 158- 167

Индивидуальные домашние задания к главе 5.

ИДЗ-5.1.

## Пятое практическое занятие

### *Функции действительной переменной. Построение графиков*

### *Непрерывность и точки разрыва функции*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с понятием функции, умением находить область определения функции, знанием основных элементарных свойств функции, знанием основных графиков элементарных функций и умением строить график сложной функции путем его преобразования, с умением находить односторонние пределы, находить точки разрыва и классифицировать их, исследовать функцию на непрерывность.

*Аудиторные задачи:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 17-25

№№ 5.95; 5.97; 5.103; 5.105; 5.107; 5.108; 5.110; 5.113; 5.117; 5.119; 5.134; 5.136;

5.157; 5.159; 5.161; 5.176 б; 5.179 а; 5.178 б

стр. 35-39

№№ 5.395; 5.402; 5.387.

*Задания для самостоятельного решения:*

№№ 5.175 б; 5176 а; 5.218 а; 5.114; 5.116; 5.135; 5.137; 5.156; 5.162.

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.1 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 270 с.

Стр. 167- 175

Индивидуальные домашние задания к главе 5.

ИДЗ-5.2.

## Шестое практическое занятие

### *Производная.*

### *Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование.*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных со знанием определения производной, знанием основных правил и формул дифференцирования, умением находить производную сложной функции, со знанием определения производной, знанием основных правил и формул дифференцирования, умением находить производную сложной функции. Применять логарифмирование при поиске производной.

*Аудиторные задачи:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 54-59

№№ 6.39; 6.32; 6.43; 6.45; 6.54; 6.65; 6.67; 6.69; 6.73.

стр. 57-63

№№ 6.81; 6.82; 6.89; 6.90; 6.91; 6.151; 6.154; 6.170; 6.173; 6.175; 6.177; 6.179; 6.185; 6.204; 6.231; 6.298 б

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк.,1997. – 304 с.

Стр. 151- 157

№№ 773; 775; 777; 779; 781; 783; 785; 787; 789; 791; 793.

*Задания для самостоятельного решения:*

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк.,1997. – 304 с.

Стр. 151- 157

№№ 772; 774; 776; 778; 780; 782; 784; 786; 788; 790; 792.

*Аудиторные задачи:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

№№ 6.62; 6.64; 6.76; 6.83; 6.86; 6.87; 6.146; 6.143; 6.174; 6.176; 6.178; 6.180; 6. 335; 6,339; 6,341.

**Седьмое практическое занятие**

***Дифференцирование неявных функций и функций, заданных параметрически***

***Производные высших порядков. Дифференциал функции.***

***Дифференциалы высших порядков***

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных со знанием формул дифференцирования неявной и параметрической функций, умением находить производную сложной функции, со знанием правил и формул дифференцирования функций, умением находить производную высшего порядка для сложной функции.

*Аудиторные задачи:*

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк.,1997. – 304 с.

стр. 161-163

№№ 901; 903; 905; 907; 910; 911; 901; 903.

стр. 64-77

№№ 6.185; 6.204; 6.202; 6.231; 6.233; 6.276; 6.286; 6.290; 6.298 б; 6.303; 6.315; 6.179; 6.185; 6.204; 6.231; 6.298 б

*Задания для самостоятельного решения:*

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк.,1997. – 304 с.

стр. 161-163

№№ 840; 855; 853.

стр. 166-167

№№ 984; 886; 888; 990; 991; 994; 996.

**Восьмое практическое занятие**

***Правило Лопиталя. Исследование поведения функций и их графиков.***

***Исследование поведения функций при помощи производной***

***и построение их графиков***

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением применять производные для вычисления пределов и исследования графика функции, связанных с умением применять производные для исследования графика функции.

*Аудиторные задачи:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 79-83; 86- 98

№№ 6.335; 6.337; 6.339; 6.341; 6.354; 6.360; 6.364; 6.369; 6.405; 6.407; 6.413; 6.425; 6.430.

стр. 92- 99

№№ 6.379; 6.397 б, г; 6.400 б, в; 6.441; 6.443; 6.445; 6.453; 6.455; 6.457.

*Задания для самостоятельного решения:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 79-83; 86- 98

№№ 6.334; 6.336; 6.338; 6.340; 6.342; 6.355; 6.357; 6.365; 6.404; 6.406; 6.414; 6.428; 6.429.

стр. 92- 99

№№ 6.380; 6.400 а; 6.442; 6.444; 6.454; 6.456.

## Девятое практическое занятие

### *Функции нескольких переменных. Частные производные. Производные сложных функций нескольких переменных*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить область определения функции многих переменных, умением находить частные производные, умением находить частные производные и полные производные сложной функции, в зависимости от вида заданной функции.

*Аудиторные задачи:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 186-205

№№ 8.5; 8.9; 8.13; 8.20; 8.55; 8.57; 8.114; 8.118; 8.120; 8.140; 8.146.

*Задания для самостоятельного решения:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 186-205

№№ 8.56; 8.58; 8.62; 8.64; 8.83; 8.117; 8.119; 8.142; 8.144.

## Десятое практическое занятие

***Дифференцирование неявных функций нескольких переменных.***

***Дифференциалы высших порядков неявных функций нескольких переменных***

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить производную неявной и параметрически заданной функции многих переменных, с умением находить дифференциалы функций многих переменных.

*Аудиторные задачи:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 205-209

№№ 8.148; 8.150; 8.152.

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.2 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 352 с.

Самостоятельная работа по теме «Дифференциал функции многих переменных и производные сложных функций» (стр.215-216).

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк.,1997. – 304 с.

стр. 198-199

№№ 1239; 1244; 1249.

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 215-216

№№ 8.177; 8.179; 8.181.

*Задания для самостоятельного решения:*

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 205-209

№№ 8.147; 8.149; 8.151.

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.2 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 352 с.

Индивидуальные домашние задания к главе 10

Стр. 222-231

ИДЗ-10.1.

**Одиннадцатое практическое занятие**

***Экстремум функций многих переменных***

Это практическое занятие отводится для упражнений, связаннымс контролем над работой по теме «Производные функции многих переменных».

*Аудиторные задачи:.*

*Семина М.А.*Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных: пособие для подготовки к тестированию. Казань: изд-во «Экоцентр», 2005.
Пройти соответствующий тест по заданной теме.

*Задания для самостоятельного решения:*

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк.,1997. – 304 с.

стр. 202-204

№№ 1280; 1283; 1287; 1209; 1220; 1260; 1262.

## Двенадцатое практическое занятие

### *Неопределенный интеграл*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить неопределенные интегралы, используя свойства и таблицу интегралов.

Краткий конспект

**НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

$$\forall\ f(x) \in C_{[x]}\ \exists F(x) \text{ - первообразная для } f(x)\ \ \forall x \in X : F'(x) = f(x)$$

**Свойства НИ**

$$1^\circ\ \left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \qquad 2^\circ\ d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

$$3^\circ\ \int dF(x) = F(x) + C\ \left(\int dx = x + C\right).$$

$$4^\circ\ \int\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right)dx = \sum_{i=1}^{n}\int f_i(x)dx.$$

$$5^\circ\ \int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ a = const.$$

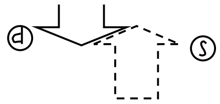
$$6^\circ\ \int f[\varphi(t)]d\varphi(t) = F[\varphi(t)] + C.$$

**Таблица основных интегралов**

I. Степенная и показательная функции

| № | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $\frac{a^x}{\ln a}$ | $e^x$ |
| $f(x)$ | $x^n,\ n\neq -1$ | $\frac{1}{x}$ | $a^x$ | $e^x$ |

$F'(x) = f(x)$



$\int f(x)dx = F(x)$

II. Тригонометрические функции

| № | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | $-\cos x$ | $\sin x$ | $\operatorname{tg} x$ | $-\operatorname{ctg} x$ | $-\ln\lvert\cos x\rvert$ | $\ln\lvert\sin x\rvert$ |
| $f(x)$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\frac{1}{\cos^2 x}$ | $\frac{1}{\sin^2 x}$ | $\operatorname{tg} x$ | $\operatorname{ctg} x$ |

III. Обратные тригонометрические функции

| № | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | $\arcsin x$, <br> $-\arccos x$ | $\arcsin\frac{x}{a}$ <br> $-\arccos\frac{x}{a}$ | $\operatorname{arctg} x$, <br> $-\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$, <br> $-\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}$ |
| $f(x)$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\frac{1}{a^2+x^2}$ |

VI. Логарифмические функции

| № | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|
| $F(x)$ | $\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert$ | $\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a-x}{a+x}\right\rvert$ | $\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\rvert$ |
| $f(x)$ | $\frac{1}{a^2-x^2}$ | $\frac{1}{x^2-a^2}$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$ |

V. Гиперболические функции

| № | 18 | 19 | 20 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | $\mathrm{ch}\,x$ | $\mathrm{sh}\,x$ | $\mathrm{th}\,x$ | $-\mathrm{cth}\,x$ |
| $f(x)$ | $\mathrm{sh}\,x$ | $\mathrm{ch}\,x$ | $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ | $\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$ |

**Методы интегрирования**

Непосредственное интегрирование

Замена переменной

Интегрирование по частям

$4°$, $5°$, таблица основных

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$\int u\,dv = uv - \int v du$$

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \begin{vmatrix} \varphi(x) = t, \\ \varphi'(x)dx = dt \end{vmatrix} = \int f(t)dt$$

*Семина.М.А.*Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан.гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

Стр. 11-22

**Понятие первообразной и неопределенного интеграла**

*Примеры решения*

1.1.1. Найти первообразную для $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$.

► По определению первообразной $F(x): F'(x) = f(x)$, т.е. $F'(x) = 4\,x^{\frac{1}{3}}$. Имеем производную степенной функции $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$. Значит $n - 1 = \dfrac{1}{3}, n = \dfrac{4}{3}$ и тогда $F(x) = 3x^{\frac{4}{3}}$.

Совокупность первообразных для $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$, будет $3\,x^{\frac{4}{3}} + C$. ◄

1.1.2. Показать, что $\dfrac{1}{2}\sin 2x + C -$ первообразная для

$$f(x) = \cos(\alpha + x)\cos(\alpha - x) + \sin(\alpha + x)\sin(\alpha - x).$$

► Нужно показать, что

$$\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C\right)' = \cos(\alpha + x)\cos(\alpha - x) + \sin(\alpha + x)\sin(\alpha - x). \quad (*)$$

Найдём производную: $\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C\right)' = \frac{1}{2}\cos 2x\, 2 = \cos 2x$. Правую часть равенства (*) преобразуем по формуле:

$$\cos(\beta-\gamma) = \cos\gamma\cos\beta + \sin\gamma\sin\beta; \quad \beta = \alpha + x, \quad \gamma = \alpha - x.$$

Имеем

$$\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x) + \sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x) = \cos(\alpha+x-\alpha+x) = \cos 2x,$$

что и требовалось показать. ◄

*Аудиторные задачи*

I. Найти первообразные следующих функций:

1.1.3. 1.1.4. 1.1.5.

II. Показать, что $F(x)+C$ − первообразные для $f(x)$:

1.1.6.1.1.7. 1.1.8.

1.1.12. 1.1.13. 1.1.14.

*Задание на дом*

I. Найти первообразные следующих функций:

1.1.9. 1.1.10. 1.1.11.

## Основные свойства неопределенных интегралов

*Примеры решения*

1.2.1. Вычислить интеграл $\int \cos 3x\, dx$.

► $\int \cos 3x\, dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x\, d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C$. При решении использованы свойство 6 и табличный интеграл № 6 (II. Тригонометрические функции). ◄

1.2.2. Вычислить интеграл $\int (2x-1)^{10} dx$.

► $\int (2x-1)^{10} dx = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{10} d(2x-1) = \frac{(2x-1)^{11}}{22} + C$. При решении использованы: свойство 6 и табличный интеграл № 1 (I. Степенная и показательная функции). ◄

1.2.3. Вычислить интеграл $\int \mathrm{e}^{2+x} dx$.

► $\int \mathrm{e}^{2+x} dx = \int e^{2+x} d(x+2) = e^{2+x} + C$. При решении использованы: свойство 6 и табличный интеграл № 4 (I. Степенная и показательная функции). ◄

*Аудиторные задачи*

Вычислить интегралы:

1.2.4. 1.2.5.

1.2.6. 1.2.7.

*Задание на дом*

Вычислить интегралы:

1.2.8. 1.2.10.

1.2.9. 1.2.11.

## Непосредственное интегрирование

*Примеры решения*

Непосредственным интегрированием вычислить интегралы:

1.3.1. $\int \frac{3x^4+5x^2-6x\sqrt[4]{x}+4}{x}dx.$

$$► \int\left(3x^4+5x^2-6x\sqrt[4]{x}+4\right)\frac{dx}{x}=3\int x^3dx+5\int xdx-6\int\sqrt[4]{x}dx+4\int\frac{dx}{x}=\frac{3x^4}{4}+$$

$$+\frac{5x^2}{2}-\frac{24x^{\frac{5}{4}}}{5}+4\ln|x|+C. ◄$$

1.3.2. $\int\frac{10^x+6^x}{2^x}dx.$

$$► \int\frac{10^x+6^x}{2^x}dx=\int\left(\frac{10}{2}\right)^x dx+\int\left(\frac{6}{2}\right)^x dx=\frac{5^x}{\ln 5}+\frac{3^x}{\ln 3}+C. ◄$$

1.3.3. $\int \mathrm{tg}^2 x dx.$

$$► \int \mathrm{tg}^2 x dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=\mathrm{tg}\, x-x+C. ◄$$

1.3.4. $\int\frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}dx.$

$$► \int \frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}dx = \int \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{(x^2-3)(x^2+3)}}dx -$$

$$-\int \frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{(x^2-3)(x^2+3)}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} =$$

$$= \ln\left| x+\sqrt{x^2+3}\right| - \ln\left| x+\sqrt{x^2-3}\right| + C = \ln\left| \frac{x+\sqrt{x^2+3}}{x+\sqrt{x^2-3}}\right| + C. ◄$$

*Аудиторные задачи*

Найти неопределённые интегралы:

1.3.5. 1.3.8.

1.3.6. 1.3.9.

1.3.7. 1.3.10

*Задание на дом*

Вычислить данные неопределённые интегралы:

1.3.13. 1.3.16.

1.3.14. 1.3.17.

1.3.15

**Интегрирование методом замены переменной**

Существуют два варианта метода замены переменной:

I. Метод «подведения»множителя под знак дифференциала

*Примеры решения*

1.3.19. Вычислить интеграл $\int \cos^5 x \sin x dx.$

► Имеем:

$$\int \cos^5 x \sin x dx = -\int \cos^5 x d(\cos x) = -\int u^5 du = -\left.\frac{u^6}{6}\right|_{u=\cos x} + C = -\frac{\cos^6 x}{6} + C. ◄$$

1.3.20. Вычислить интеграл $\int \frac{2x-3}{\left(x^2-3x+4\right)^2}dx.$

► $\int \frac{2x-3}{\left(x^2-3x+4\right)^2}dx=\int \frac{d\left(x^2-3x+4\right)}{\left(x^2-3x+4\right)^2}=\int \frac{du}{u^2}=-\frac{1}{u}\Bigg|_{u=x^2-3x+4}+C=$

$$=-\frac{1}{x^2-3x+4}+C. ◄$$

1.3.21. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx.$

► Имеем:

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx=\int \sin(\ln x)\,d(\ln x)=\int \sin u\,du=-\cos u\,\Big|_{u=\ln x}+C=-\cos(\ln x)+C. ◄$$

*Аудиторные задачи*

Вычислить интегралы с помощью подходящей замены:

1.3.22. 1.3.23.

1.3.24. 1.3.25.

1.3.26. 1.3.27.

1.3.28. . 1.3.29..

*Задание на дом*

Вычислить интегралы:

1.3.31. 1.3.32.

1.3.33. . 1.3.34.

1.3.35. 1.3.36.

II. Метод подстановки

*Примеры решения*

1.3.37. Вычислить интеграл: $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx.$

► В рассматриваемом случае $D(f)=[0,+\infty)$, где $f(x)=\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}$.

Произведём подстановку $x=\varphi(t)=t^2,\ t\in[0,+\infty)$. Тогда:

$$dx=2tdt,\quad t=\varphi^{-1}(x)=\sqrt{x},$$ откуда

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{t^3+t}{t+1}dt = 2\int \left(t^2 - t + 2\right)dt - 4\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= \left( 2\left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t \right) - 4\ln|t+1| \right)\Bigg|_{t=\sqrt{x}} + C \ = 2\left( \frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} \right) - 4\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C. ◄$$

1.3.38. Применяя подстановку $t = e^x$, найти интеграл $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx.$

► Имеем: $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = \left| \begin{matrix} t = e^x \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{t}{t+1}dt = \int dt - \int \frac{dt}{t+1} =$

$$= \left(t - \ln(t+1)\right)\Big|_{t=e^x} + C \ = e^x - \ln\left(e^x+1\right) + C. \ ◄$$

*Аудиторные задачи*

I. Найти интегралы, применяя указанные подстановки.

1.3.39. 1.3.40.

1.3.41.

II. Применяя подходящие подстановки, найти интегралы:

1.3.42. 1.3.43. 1.3.44.

*Задание на дом*

Найти интегралы, применяя подходящие подстановки:

1.3.45. 1.3.46.

1.3.47. 1.3.48.

1.3.49. 1.3.50.

## Интегрирование по частям

*Примеры решения*

1.3.52. Найти $\int \left(x^2-3\right)e^{2x}dx,$ используя интегрирование по частям.

► Полагаем $u = x^2 - 3$ и $dv = e^{2x}dx.$ Тогда $du = 2xdx$ и $v = \int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}$ (постоянную $C$ здесь полагаем равной 0, т.е. в качестве $v$ берём одну из первообразных). По формуле $\left(\int udv = uv - \int vdu\right)$ имеем:

$$\int \left(x^2-3\right)e^{2x}dx = \frac{\left(x^2-3\right)e^{2x}}{2} - \int xe^{2x}dx.$$

К стоящему справа интегралу снова применяем формулу интегрирования по частям, причём за $u$ снова принимаем многочлен (т.е. $x$).

Имеем:

$$u = x,\ dv = e^{2x}dx.$$

Отсюда

$$du = dx \ \text{ и } \ v = \int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}.$$

Окончательно:

$$\int (x^2-3)e^{2x}dx = (x^2-3)\frac{e^{2x}}{2} - \left( x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx \right) = (x^2-3)\frac{e^{2x}}{2} - x\frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C =$$

$$= \frac{1}{4}(2x^2 - 2x - 5)e^{2x} + C. \blacktriangleleft$$

1.3.53. Найти $\int x\cos x dx.$

► Имеем: $\int x\cos x\, dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \cos x dx, \\ du = dx, & v = \int \cos x dx = \sin x \end{vmatrix} =$

$$= x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C. \blacktriangleleft$$

1.3.50. Найти $\int x^2 \ln x dx.$

► Используя формулу и таблицу, имеем:

$$\int x^2 \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & dv = x^2 dx, \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \dfrac{x^3}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x}dx = \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + C. \blacktriangleleft$$

1.3.54. Найти $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

►Имеем:

$$\int x \operatorname{arctg} x dx = \begin{vmatrix} u = \operatorname{arctg} x, & dv = x dx, \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx =$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C. \blacktriangleleft$$

1.3.55. Найти $\int e^{ax}\sin bxdx.$

► Полагаем $u=e^{ax}$, $dv=\sin bx\,dx$. Тогда $du=ae^{ax}dx,\ v=-\frac{\cos bx}{b}$.

Используя формулу $\left(\int udv=uv-\int vdu\right)$, имеем:

$$\int e^{ax}\sin bxdx=-\frac{e^{ax}\cos bx}{b}+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx.$$

Теперь полагаем $u=e^{ax}$, $dv=\cos bxdx$. Тогда $du=ae^{ax}dx,\ \ v=\frac{\sin bx}{b}$ и

$$\int e^{ax}\sin bxdx=-\frac{e^{ax}}{b}\cos bx+\frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}}{b}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx\right).$$

В итоге получено уравнение относительно неизвестного интеграла

$$\int e^{ax}\sin bxdx.$$

Решая это уравнение, находим:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C,$$

или окончательно искомый интеграл запишется в виде

$$\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C. \blacktriangleleft$$

*Аудиторные задачи*

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы:

1.3.56. 1.3.57.

1.4.58. 1.3.59.

1.3.60. 1.3.61.

1.3.62. 1.3.63.

1.3.64. . 1.3.65.

1.3.66. 1.3.67.

1.3.68. 1.3.69.

1.3.70.

*Задание на дом*

Найти интегралы.

1.3.71. 1.3.72.

1.3.73. 1.3.74.

1.3.75. 1.3.76.

1.4.77. 1.3.78.

1.3.79.

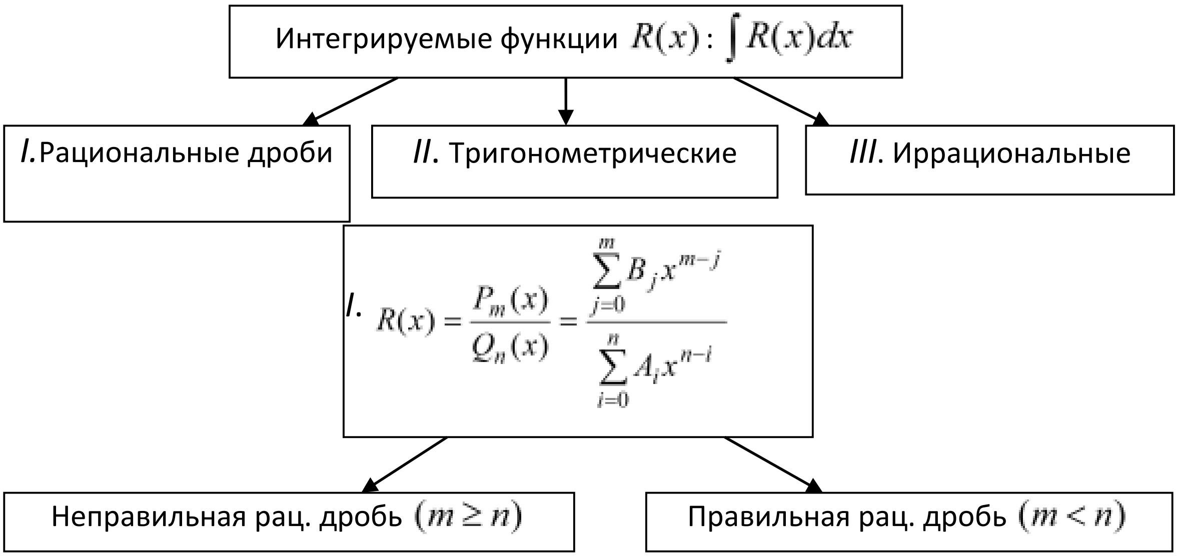
### Тринадцатое и четырнадцатое практические занятия

***Неопределенный интеграл***

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить неопределенные интегралы, используя свойства и таблицу интегралов, специальные методы интегрирования.

Краткий конспект

### КЛАССЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ



$$\begin{array}{l|l} P_m(x) & Q_n(x) \\ \cline{2-2} \dots\dots & L_{m-n}(x) \\ \hline \end{array}$$ -целая часть

$r_k(x)$ - остаток

- правильная рациональная дробь

$$Q_n(x)=\prod_{i=1}^{l}(x-a_i)(x-b)^k\left(x^2+px+q\right)\cdots\times$$

$$\times\left(x^2+px+q\right)^m \to$$

$$\to R(x)=\sum_{i=1}^{l}\frac{A_i}{x-a_i}+\sum_{J=1}^{k}\frac{B_j}{(x-b)^j}+$$

$$+\frac{Mx+N}{\phantom{x}}+\dots+\sum^{m}\frac{R_i x+S_i}{\phantom{x}}$$

$A_i\left(i=\overline{i,l}\right)$, $B_j\left(j=\overline{1,k}\right)$, $M,\ N,\ R_i,\ S_i\left(i=\overline{1,m}\right)\in R$ - неизвестные коэффициенты

Метод неопределённых коэффициентов

Метод частных значений

Простейшие рациональные дроби I – IV типов

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^k}\ (k\ge 2),\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}\ \left(k\ge 2,\ \frac{p^2}{4}-q<0\right)$$

*Семина М.А.* Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан.гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

Стр. 32-56

**Интегрирование рациональных дробей**

*Примеры решения*

2.1.1. Выделить целую часть дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{x\left(x^2-2x+1\right)}$.

► Дробь неправильная, так как $m>n\ (m=6, n=3)$. Для выделения целой части записываем числитель и знаменатель в каноническом виде: $\left(x^2+1\right)^3=x^6+3x^4+3x^2+1,\ x\left(x^2-2x+1\right)=x^3-2x^2+x,$ выполняем деление «уголком» первого многочлена на второй:

$$
\begin{array}{l|l}
\phantom{-}x^6+3x^4+x^2+1 & x^3-2x^2+x \\ \cline{2-2}
-\underline{x^6-2x^5+x^4} & x^3+2x^2+6x+10 \\
\phantom{-}2x^5+2x^4+3x^2+1 & \\
-\underline{2x^5-4x^4+2x^3} & \\
\phantom{-}6x^4-2x^3+3x^2+1 & \\
-\underline{6x^4-12x^3+6x^2} & \\
\phantom{-}10x^3-3x^2+1 & \\
-\underline{10x^3-20x^2+10x} & \\
\phantom{-}17x^2-10x+1 &
\end{array}
$$

получаем в частном $x^3+2x^2+6x+10,$ а в остатке $17x^2-10x+1.$ Следовательно, $\dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{x\left(x^2-2x+1\right)}=x^3+2x^2+6x+10+\dfrac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x}$, и выделение целой части закончено. ◄

2.1.2. Дробь $\dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)^2}$ разложить в сумму простейших.

► Искомое разложение имеет вид $\dfrac{(x+2)^2}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{D}{(x-1)^2}$ Приводя правую часть к общему знаменателю, получаем тождественное равенство $x^2+4x+4=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Dx.$ (*) Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях *x* даёт систему уравнений:

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 & A+B=1, \\
x & -2A-B+D=4, \\
x^0 & A=4,
\end{array}
$$

откуда получаем $A=4$, $B=-3$, $D=9$. Следовательно, искомое разложение имеет вид:

$$\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{9}{(x-1)^2}.$$

Можно определить коэффициенты *A, B,D* другим способом, полагая последовательно в тождестве (*) $x=0,$ $x=1$и, например, $x=-1$: при $x=0$ находим $A=4$, при $x=1$ получаем $D=9$, а при $x=-1$ имеем $4A+2B-D=1$, т.е. $B=-3$.

При решении этого примера лучше всего было бы комбинировать оба способа, т.е. найти $A=4$ при $x=0$, $D=9$ при $x=1$, а $B$ определить из равенства коэффициентов при $x^2$ в (*), т.е. из равенства $A+B=1$. ◄

2.1.3. Найти интеграл $\int \frac{x^4-x^2+2x-5}{x^2+1}dx.$

► Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Выполним деление многочлена на многочлен:

Следовательно,

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^4-x^2+2x-5 \\ x^4+4x^2 \qquad\quad \end{array} & \begin{array}{l} x^2+4 \\ \hline x^2-5 \end{array} \\ \cline{1-1} -\begin{array}{r} -5x^2+2x-5 \\ -5x^2 \qquad -20 \end{array} & \\ \cline{1-1} 2x+15 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^4-x^2+2x-5}{x^2+1}dx = \int\left(x^2-5+\frac{2x+15}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int x^2dx - 5\int dx + \int \frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4} + 15\int \frac{dx}{x^2+4} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 5x + \ln\left(x^2+4\right) + \frac{15}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C. ◄$$

2.1.4. Найти интеграл $\int \frac{5x^2-15x+16}{x^3-4x^2+x+6}dx.$

► Прежде всего, нужно разложить на множители многочлен, стоящий в знаменателе, а для этого необходимо найти корни этого многочлена. По теореме Виета известно, что произведение всех корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ многочлена с целыми коэффициентами $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ (для удобства полагаем $a_0 = 1$) удовлетворяют условию $\prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n a_n$. Отсюда следует, что корни многочлена являются делителями свободного члена $a_n$. У нас свободный член в знаменателе равен 6, поэтому корнями многочлена $x^3-4x^2+x+6$ могут быть числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ − делители числа 6. Непосредственно убеждаемся, что число $x_1 = -1$ является корнем: $(-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$. По следствию из теоремы Безу видно, что многочлен $x^3-4x^2+x+6$ делится без остатка на разность $x - x_1$, в нашем случае на $x+1$.

Действительно,

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^3-4x^2+x+6 \\ \underline{x^3+x^2} \end{array} & \begin{array}{l} x+1 \\ \hline x^2-5x+6 \end{array} \\ -\begin{array}{l} -5x^2+x \\ \underline{-5x^2-5x} \end{array} & \\ -\begin{array}{l} 6x+6 \\ \underline{6x+6} \end{array} & \\ 0 & \end{array}$$

Значит $x^3-4x^2+x+6=(x+1)\left(x^2-5x+6\right)$. Трёхчлен $x^2-5x+6$ имеет корни $x_2=2$ и $x_3=3$, поэтому $x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x-2)(x-3)$, и данный интеграл можно записать в виде $\int\frac{5x^2-15x+16}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx.$ Так как многочлен в знаменателе дроби разлагается только на линейные множители, то эта дробь представлена в виде суммы простейших дробей только*I* типа. Запишем разложение дроби на простейшие в общем виде

$$\frac{5x^2-15x+16}{(x+1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{D}{x-3}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители левой и правой частей, получим тождество

$$5x^2-15x+16=A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+D(x+1)(x-2).$$

Задавая $x=-1, x=2$ и $x=3$ получим $A=3$, $B=-2$, $D=4$ и

$$\frac{5x^2-15x+16}{(x+1)(x-2)(x-3)}=\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x-2}+\frac{4}{x-3},$$

значит,

$$\int\frac{5x^2-15x+16}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx=\int\frac{3}{x+1}dx-\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{4}{x-3}dx=$$

$$=3\ln|x+1|-2\ln|x-2|+4\ln|x-3|+C. ◄$$

2.1.5. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^3+2x^2+2x}$.

► Запишем знаменатель в виде произведения двух сомножителей $x^3+2x^2+2x=x\left(x^2+2x+2\right)$. Трёхчлен $x^2+2x+2$ имеет комплексные корни, так как

$D=\frac{p^2}{4}-q=1-2=-1<0$, значит его нельзя разложить на линейные множители с вещественными коэффициентами. Поскольку в знаменателе всего два множителя $x$ и $x^2+2x+2$, рациональная дробь разлагается в общем виде на простейшие дроби *I* и *III* типа следующим образом:

$$\frac{1}{x\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+D}{x^2+2x+2}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю и приравниваем числители полученных дробей:

$$1=A\left(x^2+2x+2\right)+Bx^2+Dx.$$

Коэффициент *A* определяем, задавая $x=0$: $1=2A,\ A=\frac{1}{2}$.

Коэффициенты *B* и *D* определяем, приравнивая коэффициенты при $x^2$ и $x$ в левой и правой частях:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & D=A+B,\ B=-A=-\frac{1}{2} \\ x & 0=2A+D \quad D=-2A=-1. \end{array}$$

Получаем $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $D=-1$ и

$$\int\frac{dx}{x\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{x+2}{x^2+2x+2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{2x+4}{x^2+2x+2}dx=\frac{\ln|x|}{2}-\frac{1}{4}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2x+2}=\frac{\ln|x|}{2}-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+2x+2\right)-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=\frac{\ln|x|}{2}-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+2x+2\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)+C. \blacktriangleleft$$

2.1.6. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)^2}$.

► Дробь $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)^2}$ правильная, её разложение в сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Имеем $1=A\left(x^2+1\right)^2+(Bx+D)x\left(x^2+1\right)+(Ex+F)x$. Полагая $x=0$, находим $A=1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получаем $0=A+B, 0=D$, $0=2A+B+E$, $0=D+F$, т.е. $B=-1$, $D=0$, $E=-1$, $F=0$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)^2}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)dx=\ln|x|-\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}+\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+C.$$

Заметим, что разложение дроби $\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)^2}$ на простейшие можно получить и не применяя метода неопределённых коэффициентов, а именно

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x\left(x^2+1\right)}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}.\blacktriangleleft$$

*Аудиторные задачи*

*I.* Выделить целые части следующих дробей:

2.1.7. .  2.1.8. .

2.1.9. .

*II.* Следующие дроби разложить в сумму простейших:

2.1.10. .  2.1.11. .

2.1.12. .

*III.* Найти интегралы:

2.1.13.  2.1.14.

2.1.15.  2.1.16.

2.1.17.  2.1.18.

*IV*. Найти интегралы, не применяя метода неопределённых коэффициентов:

2.1.19.  2.1.20.  2.1.21.

*Задание на дом*

2.1.22.  2.1.23  2.1.24.

II. $R(\sin x,\ \cos x)$ – рациональная функция

1. $\int R(\sin x, \cos x)dx$

$$\left| \begin{array}{c} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t,\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right|$$

$$\Downarrow$$

$$\int R^*(t)dt$$

2. $\int R(\sin x)\cos x\,dx$

$$\left| \sin x = t,\ \cos x dx = dt \right|$$

$$\Downarrow$$

$$\int R(t)dt$$

3. $\int R(\cos x)\sin x\,dx$

$$\left| \cos x = t,\ -\sin x dx = dt \right|$$

$$\Downarrow$$

$$-\int R(t)dt$$

4. $\int R(\operatorname{tg} x)dx$

$$\left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t, \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right|$$

5. $\int R(\sin^{2m} x, \cos^{2n} x)dx$

$$\left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}, \\ \cos^2 x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right|$$

$$\Downarrow$$

$$\int R^*(t)dt$$

6. $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$

$m = 2p+1,\ n = 2q+1$ $\Rightarrow$ $\cos x = t,\ \sin x = t$

$m = 2p,\ n = 2q$ $\Rightarrow$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$m = 2p,\ n = 2q,\ mn < 0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{tg} x = t,\ \operatorname{ctg} x = t$

$$\Downarrow$$

$$\int R^*(t)dt$$

$$\boxed{7.\ \int \sin mx \cos nx\,dx} \Rightarrow \frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(m+n)x}{m+n}+\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right)$$

$$\boxed{8.\ \int \cos mx \cos nx\,dx} \Rightarrow \frac{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right)$$

$$\boxed{9.\ \int \sin mx \sin nx\,dx} \Rightarrow \frac{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right)$$

2.2.3. Найти $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}$.

► Применяем подстановку $\operatorname{tg} x = t,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}$ (*КИФ, II.* $R(\sin x, \cos x)$ - рациональная функция, случай 4) и

$$\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4+t+\frac{4}{t}}=\int \frac{t}{(1+t^2)(4t+t^2+4)}dt==\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)(t+2)^2}$$

$$=\int\left(\frac{A}{t+2}+\frac{B}{(t+2)^2}+\frac{Ft+D}{1+t^2}\right)dt.$$

Определяем коэффициенты $A,\ B,\ F,\ D.$

$$t=A(t+2)(1+t^2)+B(1+t^2)+(Ft+D)(t+2)^2.$$

При $t=-2\ :\ -2=5B,\ B=-\frac{2}{5}$:

$$t=At+2A+At^3+2At^2+Bt^2+B+Ft^3+Dt^2+4Ft^2+4Dt+4Ft+4D.$$

$$t=t^3(A+F)+t^2(2A+B+D+4F)+t(A+4D+4F)+2A+B+4D.$$

$$\left.\begin{array}{l|l} t^3 & A+F=0 \\ t^2 & 2A+B+D+4F=0 \\ t & A+4D+4F=1 \\ t^0 & 2A+B+4D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A+F=0 \\ 2A+B+4F=\frac{2}{5} \\ A+4D+4F=1 \\ 2A+4D=\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{3}{25}, \\ F=\frac{3}{25}, \\ D=\frac{4}{25}. \end{cases}$$

Тогда:

$$\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}=-\frac{3}{25}\ln|t+2|+\frac{2}{5(t+2)}+\frac{3}{50}\ln\left(t^2+1\right)+\frac{4}{25}\operatorname{arctg} t+C=$$

$$=-\frac{3}{25}\ln|\operatorname{tg} x+2|+\frac{2}{5(\operatorname{tg} x+2)}+\frac{3}{50}\ln\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{4}{25}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)+C=$$

$$=-\frac{3}{25}\ln|\operatorname{tg} x+2|+\frac{2}{5(\operatorname{tg} x+2)}-\frac{3}{25}\ln|\cos x|+\frac{4x}{25}+C. \blacktriangleleft$$

2.2.4. Найти $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$.

► Используя случай 5 (*КИФ, II.* $R(\sin x, \cos x)$ - рациональная функция), имеем:

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}=\left|\begin{array}{l} \operatorname{tg} x=t,\quad \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}, \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right|=\int \frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(2-\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)}==\int \frac{dt}{2+t^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}+C. \blacktriangleleft$$

2.2.5. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}dx.$

► Используя случай 6 (*КИФ, II.* $R(\sin x, \cos x)$ - рациональная функция), $m=3$ – нечётно, имеем:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}}dx=\left|\begin{array}{l} \cos x=t,\quad \sin^2 x=1-\cos^2 x \\ -\sin x dx=dt \end{array}\right|=\int \frac{1-t^2}{\sqrt[4]{t}}dt=-\int \frac{dt}{\sqrt[4]{t}}+\int t^{\frac{7}{4}}dt=$$

$$=-\frac{4t^{\frac{3}{4}}}{3}+\frac{4t^{\frac{11}{4}}}{11}+C=-4\frac{\sqrt[4]{\cos^3 x}}{3}+4\frac{\sqrt[4]{\cos^{11} x}}{11}+C=$$

$$=-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3 x}+\frac{4}{11}\cos^2 x\sqrt[4]{\cos^3 x}+C. \blacktriangleleft$$

2.2.6. Найти $\int \sin^2 x\cos^4 x\, dx.$

► Так как $m=2, n=4$ – чётные положительные числа, то данный интеграл вида 6 (*КИФ, II.* $R(\sin x, \cos x)$). Сначала воспользуемся формулами

$$\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2},\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}:$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \left( \frac{\sin^2 2x}{4} \ \frac{1+\cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\, dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\, d(\sin 2x) = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \blacktriangleleft$$

2.2.7. Найти $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$

► Используя случай 6 (*КИФ, II.* $R(\sin x, \cos x)$), $n = -6 < 0$,

имеем:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2}{\dfrac{1}{1+t^2}} dt = \int t^2 \left(1+t^2\right) dt =$$

$$= \int \left(t^2 + t^4\right) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C. \blacktriangleleft$$

2.2.8. Найти $\int \cos 9x \cos 5x\, dx.$

► Следуя случаю 8 (*КИФ, II.* $R(\sin x, \cos x)$), имеем:

$$\int \cos 9x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 14x + \cos 4x) dx = \frac{\sin 14x}{28} + \frac{\sin 4x}{8} + C. \blacktriangleleft$$

*Аудиторные задачи*

Найти интегралы:

2.2.9.

2.2.10.

2.2.11.

2.2.12.

2.2.13.

2.2.14.

2.2.15.

2.2.16.

2.2.17.

2.2.18.

2.2.19.

2.2.20.

2.2.21.

2.2.22.

2.2.23.

2.2.24.

2.2.25.

2.2.26.

2.2.29.

2.2.30. .

*Задание на дом*

2.2.33.

2.2.34.

2.2.35.

2.2.36.

2.2.37.

2.2.38.

2.2.39.

2.2.40.

2.2.41.

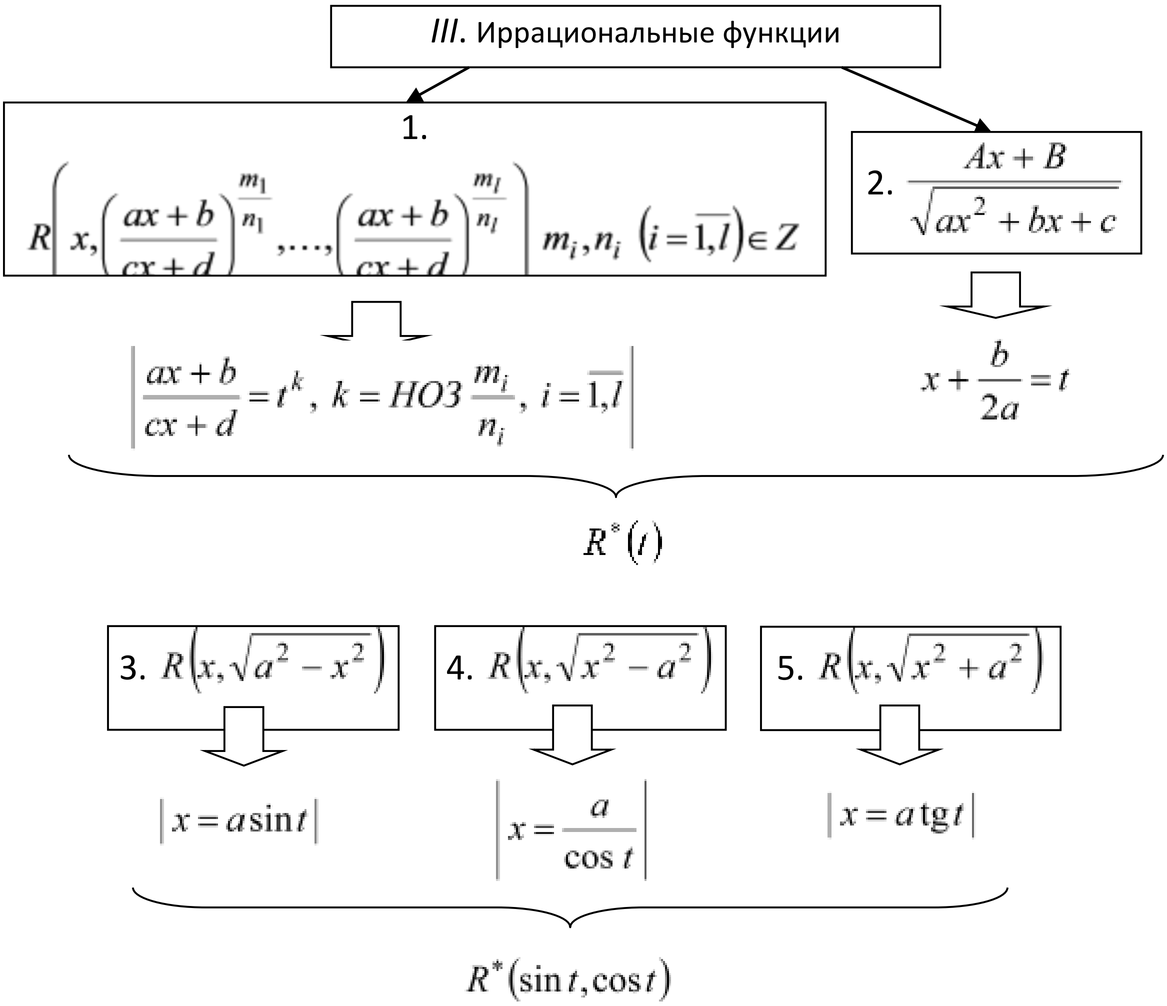
2.2.42.

## Пятнадцатое практические занятие

### *Неопределенный интеграл*

### *Интегрирование иррациональных функций*

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить неопределенные интегралы, используя свойства и таблицу интегралов, специальные методы интегрирования.




*Замечание.* $\exists$ НИ, не выражающиеся через элементарные функции: $\int e^{-x^2}dx$ – интеграл Пуассона, $\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм, $\int \frac{\sin x}{x}dx, \; \int \frac{\cos x}{x}dx$ – интегральныйсинус и косинус, $\int \sin x^2 dx, \; \int \cos x^2 dx$ - интегралы Френеля, $\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\, dx \; (k \geq 2), \; \int \frac{e^x}{x}dx, \; \int e^{\mathrm{arctg}\, x}dx, \; \int \sqrt[3]{x^3+1}dx, \; \int \sqrt{\sin x}\, dx, \; \int \ln \sin x \, dx$ и др.

*Семина М.А.* Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан.гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

Стр. 57-65

*Примеры решения*

2.3.1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2}$.

► Следуя случаю 1 (*КИФ*, *III*. Иррациональные функции), имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2}=\left|\begin{matrix} x=t^4, & dx=4t^3dt \\ \sqrt{x}=t^2, & \sqrt[4]{x}=t \end{matrix}\right|=\int \frac{4t^3}{t^2(t+1)^2}dt=4\int \frac{t}{(t+1)^2}dt==4\int \frac{t+1-1}{(t+1)^2}dt=$$

$$4\int\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)=4\ln|t+1|+\frac{4}{t+1}+C=$$

$$=4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)+\frac{4}{\sqrt{x}+1}+C. \text{ ◄}$$

2.3.2. Найти $\int \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}+2}{\left((x-1)^{\frac{1}{3}}+1\right)(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx.$

► Общим знаменателем дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ является число 6. Подстановка $x-1=t^6$, $dx=6\,t^5dt$ преобразует интеграл к виду:

$$\int \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}+2}{\left((x-1)^{\frac{1}{3}}+1\right)(x-1)^{\frac{2}{3}}}dx=\int \frac{\left(t^3+2\right)6t^5}{\left(t^2+1\right)t^4}dt=$$

$$=6\int \frac{t^4+2t}{t^2+1}dt=6\int\left(t^2-1+\frac{2t+1}{t^2+1}\right)dt=6\left(\frac{t^3}{3}-t+\ln\left(t^2+1\right)+\operatorname{arctg}t\right)+C=$$

$$=2\sqrt{x-1}-6\sqrt[6]{x-1}+6\ln|\sqrt[3]{x-1}+1|+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x-1}+C. \text{ ◄}$$

2.3.3. Найти $\int \sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\frac{dx}{x^2}$.

► Следуя случаю 1 (*КИФ*, *III*. Иррациональные функции), имеем:

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\frac{dx}{x^2}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{x+1}{x}=t^2,\quad x=\dfrac{1}{t^2-1}\\ dx=-\dfrac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt\end{array}\right|=\int\left(t^2-1\right)^2\,t\,\frac{(-2t)}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt=$$

$$=-2\int t^2dt=-\frac{2t^3}{3}+C=-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^3}+C=-\frac{2}{3}\frac{x+1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}+C. \blacktriangleleft$$

2.3.4. Найти $\int\dfrac{x-5}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx.$

► Следуя случаю 2 (*КИФ*, *III*. Иррациональные функции), имеем:

$$\int\frac{x-5}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx=\left|\begin{array}{l}t=\dfrac{\left(x^2-2x\right)'}{2}=x-1\\ x-5=t-4,\quad dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{t-4}{\sqrt{t^2-1}}\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2-1\right)}{\sqrt{t^2-1}}-4\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=$$

$$=\sqrt{t^2-1}-4\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+C=\sqrt{x^2-2x}-4\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right|+C. \blacktriangleleft$$

2.3.5. Найти $\int\dfrac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}\,dx.$

► Следуя случаю 3 (*КИФ*, *III*. Иррациональные функции), имеем:

$$\int\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}dx=\left|\begin{array}{l}x=2\sin t,\quad dx=2\cos t\,dt\\ \sqrt{\left(4-x^2\right)^3}=8\cos^3 t\end{array}\right|=\int 8\cos^3 t\,\frac{2\cos t}{64\sin^6 t}\,dt=\frac{1}{4}\int\frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\operatorname{ctg}^4 t}{\sin^2 t}\,dt=-\frac{1}{4}\int\operatorname{ctg}^4 t\,d\left(\operatorname{ctg} t\right)=-\frac{1}{4}\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 t+C=-\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^5}}{20x^5}+C. \blacktriangleleft$$

*Аудиторные задачи*

Найти интегралы:

.2.3.6. 2.3.8.

2.3.7. 2.3.9.

2.3.10. 2.3.11. 2.3.12. .

2.3.13. 2.3.14. 2.3.15.

2.3.18. 2.3.19. .3.20.

*Задание на дом*

Найти интегралы:

2.3.21. 2.3.24.

2.3.22. 2.3.25.

2.3.23. 2.3.26.

**Шестнадцатое и семнадцатое практические занятие**

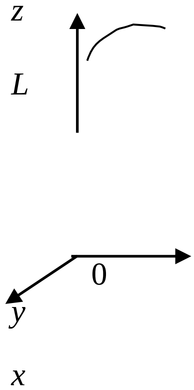
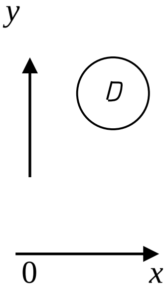
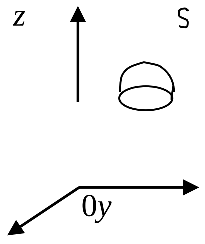
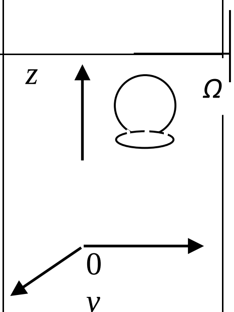
***Определенный интеграл***

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить определенные интегралы, используя их математическое и физическое приложения, знанием определения несобственных интегралов и умения их вычислять.

Краткий конспект

## ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### 1. Задача о массе математической фигуры и определенный интеграл

| Тип фигуры $\Phi$ | Прямой стержень $[a;b]$ | Кривой стержень $L$ | Плоская пластинка (область) $D$ | Изогнутая пластинка (поверхность) $S$ | Тело $\Omega$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Вид $\Phi$ в $R^n,\ n=\overline{1,3}$ |   |   |   |   |   |
| Разбиение на элементарные частицы: $\Delta\Phi_i \quad i=\overline{1,n}$ | $\Delta x$ | $\Delta l_i$ | $\Delta\sigma_i$ | $\Delta S_i$ | $\Delta V_i$ |
| Мера фигуры | длина | | площадь | | объём |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $_{\Delta}\Phi$ | | | | | |
| Выбор $M_{\text{i}} \in {}_{\Delta}\Phi_i \Rightarrow$ плотность $\rho(M_i)$ | $\rho(x)$ | $\rho(x,y,z)$ | $\rho(x,y,z)$ | $\rho(x,y,z)$ | $\rho(x,y,z)$ |
| Диаметр разбиения фигуры $\lambda$ | $\lambda = \max\limits_i \lambda_i = \max\limits_i \operatorname{diam}{}_{\Delta}\Phi,\ \lambda_i = \operatorname{diam}{}_{\Delta}\Phi_i = \max A_iB_i,\ A_i \in {}_{\Delta}\Phi_i,$ $B_{\text{i}} \in {}_{\Delta}\Phi_{\text{i}},\quad \Phi = \bigcup\limits_{i=1}^{n} {}_{\Delta}\Phi_i,\ {}_{\Delta}\Phi_i \cap {}_{\Delta}\Phi_j = 0,\ i \neq j$ | | | | |
| Масса фигуры $\Phi$ $m$ | $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(M_i)_{\Delta}\Phi_i \Rightarrow m = \lim\limits_{\lambda \to 0} S_n = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(M_i)_{\Delta}\Phi_i,\ M_{\text{i}} \in {}_{\Delta}\Phi_{\text{i}}$ $m \approx S_n$ | | | | |
| Необходимые операции | 1. $\Phi = \bigcup\limits_{i=1}^{n} {}_{\Delta}\Phi_i$ 2. $M_{\text{i}} \in {}_{\Delta}\Phi_{\text{i}}, i = \overline{1,n}$. 3. $f(M_i) \cdot {}_{\Delta}\Phi_i,\ i = \overline{1,n}$. 4. $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_{\text{i}})_{\Delta}\Phi_i$ | | | | |
| Понятие $ОИ$ | $\underbrace{\sum\limits_{i=1}^{\text{n}} f(M_{\text{i}})_{\Delta}\Phi_i = S_n}_{\text{интегральная сумма}} \Rightarrow \lim\limits_{\lambda \to 0} S_n = \int\limits_{\Phi} f(M)d\Phi$ | | | | |
| Типы $ОИ$ | $\int\limits_a^b f(M)dx$ | $\int\limits_{\smile AB} f(M)d\ell$ | $\iint\limits_D f(M)d\sigma$ | $\iint\limits_S f(M)dS$ | $\iiint\limits_{\Omega} f(M)dT$ |
| Название $ОИ$ | $ОИ$ | $КИ\ \ I\,р.$ | $ДИ$ | $ПИ\ \ I\,р.$ | $ТИ$ |
| Геометрический смысл | Площадь криволинейной трапеции | Площадь боковой поверхности цилиндра | Объём цилиндрического тела | — | — |

## 2. Свойства $ОИ$

1°. <u>Линейность</u>. $\exists \int\limits_{\Phi} f(M)d\Phi,\ \exists \int\limits_{\Phi} \varphi(M)\,d\Phi,$

$$\alpha,\ \beta - const \ \Rightarrow \int\limits_{\Phi} (\alpha\ f + \beta\,\varphi)\,d\Phi = \alpha \int\limits_{\Phi} f\ d\Phi + \beta \int\limits_{\Phi} \varphi\, d\Phi.$$

2°. <u>Аддитивность</u>. $\Phi = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Phi_i,\ \exists \int\limits_{\Phi} f(M)d\Phi \ \Rightarrow \int\limits_{\Phi} f\ d\Phi = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{\Phi_i} f(M)d\Phi.$

$3^\circ$. Мера фигуры. $f(M)=1 \ \Rightarrow \int\limits_{\Phi} d\Phi=\Phi.$

$4^\circ$. Монотонность.

$$\exists \int\limits_{\Phi} f(M)\,d\Phi,\ \exists \int\limits_{\Phi} \varphi(M)\,d\Phi,\ f(M)\geq\varphi(M)\geq 0\ \forall M\in\Phi \Rightarrow$$

$$\int\limits_{\Phi} f(M)\,d\Phi \geq \int\limits_{\Phi} \varphi(M)\,d\Phi.$$

$5^\circ$. Оценка модуля. $\exists \int\limits_{\Phi} f(M)\,d\Phi \quad \Rightarrow$

$$\exists \int\limits_{\Phi} \left| f(M)\right| d\Phi:\ \left|\int\limits_{\Phi} f(M)\,d\Phi\right| \leq \int\limits_{\Phi} \left| f(M)\right| d\Phi.$$

$6^\circ$. Теорема о среднем.

$$f(M)-\text{непрерывна в } \Phi \Rightarrow \exists\, C\in\Phi:\ \int\limits_{\Phi} f(M)\,d\Phi = f(C)\cdot\Phi.$$

## 3. Вычисление *ОИ*. Формула Ньютона - Лейбница

$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b}$ - формула Ньютона- Лейбница.

## 4. Методы интегрирования

Замена переменной

$$\int\limits_a^b f(x) = \left| \begin{array}{l} x=\varphi(t), dx=\varphi'(t)dt \\ (\exists\varphi'(t)\forall t\in(\alpha,\beta)) \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array} \right| =$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Интегрирование по частям

$$\exists u', v' \,\forall\, x\in(a,b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$$

## 5. Приближенное вычисление *ОИ*

(замена кривой $y = f(x)$ «близкой» к ней)

### Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+\frac{(b-a)i}{n}\right)\right)$$

$$\Delta \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2},\ M = \max|f''(x)|\ \ \forall x \in (a,b)$$

### Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6}\left( f(x_{i-1})+4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+f(x_i)\right)=$$

$$=\frac{b-a}{n}\left( f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

$$\Delta \le \frac{M(b-a)^3}{2880n^4},\ M = \max\left|f^{(4)}(x)\right|\ \ \forall x \in (a,b)$$

## 6. Несобственные интегралы (*Н^сИ*)

*Н^сИ* с бесконечными пределами интегрирования

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} + \int_{c}^{\infty}$$

*Н^сИ* от разрывных функций

$x = b$ - *т. р. IIр*

$$\int_a^b = \lim_{c\to b-o}\int_a^c$$

$x = a$ -*т. р. II р*

$$\int_a^b = \lim_{c\to a+o}\int_c^b$$

$x - x_0$ -*т р. IIр*

$$\int_a^b \lim_{c\to x_0-o}\int_a^c + \lim_{c\to x_0+o}\int_c^b$$

**Признаки сходимости $Н^сИ$**

1. $F'(x)=f(x)$

$$\exists \lim_{x\to+\infty} F(x)=F(+\infty),\quad \nexists \lim_{x\to+\infty} F(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)-F(a)\ -$$

сходится

$+\infty$

2. $\forall x\in[a,\infty)\ 0\le f(x)\le\varphi(x)$

$$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx - \text{сход.}\ \Downarrow \qquad \int_a^{+\infty} f(x)dx - \text{расх.}\ \Downarrow$$

3. $\forall x\in[a,\infty),\ f(x)>0,$

$$\varphi(x)>0,\ \exists \lim_{x\to\infty}\frac{f}{\varphi}\ne 0,\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx,\ \int_a^{\infty}\varphi(x)dx\ -$$

4. $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ – сходится

$$\Downarrow$$

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – сходится абсолютно

*Семина М.А.* Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан.гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

Стр. 79-108

## Свойства *ОИ*. Вычисление *ОИ*.

## Формула Ньютона – Лейбница

*Примеры решения*

3.1.1. Определить знак интеграла $\int_{-1}^{3}\sqrt[5]{x}dx,$ не вычисляя его.

► Используя свойство $2^\circ$ *ОИ*, геометрический смысл *ОИ* и нечётность функции $\sqrt[5]{x}$, имеем:

$$\int_{-1}^{3}\sqrt[5]{x}dx=\int_{-1}^{1}\sqrt[5]{x}dx+\int_{1}^{3}\sqrt[5]{x}dx=0+\int_{1}^{3}\sqrt[5]{x}dx>0.\ ◄$$

3.1.2. Не вычисляя, выяснить какой из интегралов $\int_0^1 x^2dx$ и $\int_0^1 x^3dx$ больше.

► Используя свойство $4^\circ$ *ОИ* и неравенство $x^3 \le x^2 \ \forall\, x \in [0,1]$ имеем, что

$$\int_0^1 x^3 dx < \int_0^1 x^2 dx. \ ◄$$

3.1.3. Оценить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

► Так как $1 \le 1 + x^4 \le 2 \ \forall x \in [0,1]$, используя свойства *ОИ* $4^\circ$ и $5^\circ$, имеем $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \le 1$, т.е. $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $M = 1$, $b - a = 1$ и $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. ◄

3.1.4. Сила переменного тока меняется по закону $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$, где $T$ - период. Найти среднее значение силы тока за полупериод.

► Используя теорему о среднем ($6^\circ$ *ОИ*) и формулу Ньютона – Лейбница, имеем

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) dt = \frac{2}{T} I_0 \frac{T}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{I_0}{\pi}\left(\cos\varphi - \cos(\pi + \varphi)\right) = \frac{2}{\pi} I_0 \cos\varphi. \ ◄$$

3.1.5. Вычислить интеграл $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$.

► Используя формулу Ньютона − Лейбница и таблицу *НИ*, получим

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\,\Big\|_e^{e^2} = \ln\ln e^2 - \ln\ln e = \ln 2 \approx 0{,}69. \ ◄$$

*Аудиторные задачи*

Вычислить интегралы:

3.1.6. 3.1.7. 3.1.8.

3.1.9. 3.1.10.

3.1.11. 3.1.12.

3.1.13.

3.1.14.

## Интегрирование заменой переменной и по частям в *ОИ*

*Примеры решения*

3.2.1. Вычислить $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$

► Сделаем подстановку $x=\sin t,\ dx=\cos t\,dt.$ По выбранной подстановке определяются новые пределы интегрирования. При $x=0$ и при $x=1$ имеем $0=\sin t$ и $1=\sin t,$ находим соответственно $t=0$ и $t=\frac{\pi}{2}$. Таким образом, изменению переменной $x$ от $x=0$ до $x=1$ соответствует изменение переменной $t$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$.

Используя случай 1 (Методы интегрирования. Замена переменной), получаем:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt=\left.\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4}. \blacktriangleleft$$

3.2.2. Вычислить $\int\limits_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

► Учитывая иррациональность функции и выбирая соответствующую замену, имеем:

$$\int\limits_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\left|\begin{array}{l} x=t^2,\quad dx=2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 4 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array},\quad \sqrt{x}=t \end{array}\right|=\int\limits_1^2 \frac{2tdt}{t+1}=2\int\limits_1^2 dt-2\int\limits_1^2 \frac{dt}{t+1}==2t\Big|_1^2-2\ln|1+t|\Big|_1^2=$$

$$2-2\ln\frac{3}{2}. \blacktriangleleft$$

3.2.3. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

► Интегрируем по частям, полагая $u=x,\ dv=\frac{dx}{\cos^2 x},$ находим

$$du = dx, \ v = \operatorname{tg} x.$$

Поэтому:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x} = \left(x \operatorname{tg} x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} xdx = \frac{\pi}{4} \ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 0 + \ln\left(\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 = -\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}. ◄$$

3.2.4. Вычислить $\int_1^e \ln xdx.$

► Следуя применению формулы интегрирования по частям, имеем:

$$\int_1^e \ln xdx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, \ v = x \end{array} \right| = \left(x \ln x\right)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{xdx}{x} = e - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1. ◄$$

*Аудиторные задачи*

*I.* Вычислить интегралы с помощью указанных подстановок:

3.2.5. 3.2.6.

3.2.7.

*II.* Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

3.2.8. 3.2.9.

3.2.10. 3.2.11.

3.2.12. 3.2.13.

*III.* Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

3.2.14. 3.2.15.

3.2.16. 3.2.17.

3.2.18. 3.2.19.

*Задание на дом*

3.2.20. 3.2.213. 2.22.

## Несобственный интеграл ($Н^сИ$)

*Примеры решения*

3.4.1. Вычислить $Н^сИ$ или установить его расходимость $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}dx.$

► Используя определение $Н^сИ$, имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{-3x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{-e^{-3x}}{3}\right|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{1-e^{-3b}}{3} = \frac{1}{3}. \blacktriangleleft$$

3.4.2. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x dx}{1+x^2}.$

► По определению

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\operatorname{arctg}x d(\operatorname{arctg}x) = \lim_{b\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}^2 b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}. \blacktriangleleft$$

3.4.3. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{1} xe^x dx.$

► Используя определение и формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{1} xe^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^1 xe^x dx = \left|\begin{matrix} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = e^x \end{matrix}\right| = \lim_{a\to-\infty}\left(\left(xe^x\right)\Big|_a^1 - \int\limits_a^1 e^x dx\right) =$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\left(e - ae^a - e + e^a\right) = \lim_{a\to-\infty} e^a(1-a) = (0\infty).$$

Приводим неопределённость $(0\cdot\infty)$ к виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{a\to-\infty}\frac{1-a}{e^{-a}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{a\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-a}} = \lim_{a\to-\infty} e^a = 0.$$

Значит

$$\int\limits_{-\infty}^{1} xe^x dx = 0. \blacktriangleleft$$

3.4.4. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}.$

► По определению $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

В силу чётности подынтегральной функции

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Поэтому:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=2\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=2\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=\left|\begin{array}{l} x=\operatorname{tg}t,\quad dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ 1+x^2=\dfrac{1}{\cos^2 t}\end{array}\right|=$$

$$=2\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}b}\cos^2 t\,dt=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg}b}(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg}b+\frac{1}{2}\sin\left(2\operatorname{arctg}b\right)\right)=\frac{\pi}{2}.\ ◄$$

3.4.5. Вычислить $\int\limits_{0}^{2}\frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^{\frac{4}{5}}}$.

► В т. $x=1$ подынтегральная функция терпит разрыв*II*рода. Имеем $Н^cИ$ от разрывной функции. По определению:

$$\int\limits_{0}^{2}\frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^{\frac{4}{5}}}=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2}\frac{d\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^{\frac{4}{5}}}=\lim_{b\to 1-0}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{5}}\Bigg|_{0}^{2}\frac{5}{2}+$$

$$+\frac{1}{2}\ 5\lim_{a\to 1+0}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{5}}\Bigg|_{a}^{2}=\frac{5}{2}+5\cdot\frac{\sqrt[5]{3}}{2}=\frac{5\left(\sqrt[5]{3}+1\right)}{2}.\ ◄$$

3.4.6. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5}+1}dx.$$

► Для исследования используем предельный признак сходимости $Н^cИ$.

В качестве интеграла, с которым будем сравнивать исследуемый, возьмём $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}\ln b=\infty,$ который расходится. Тогда

$$f(x)=\frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5}+1},\ g(x)=\frac{1}{x}$$

и предел отношения данных функций запишется в виде:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(3x^2+\sqrt{(x+1)^3}\right)x}{2x^3+\sqrt[3]{x^5}+1}=\frac{3}{2}$$

и по теореме исследуемый интеграл также расходится. ◄

3.4.7. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^2\frac{dx}{\ln x}$.

► Для сравнения с исследуемым интегралом возьмём $\int\limits_1^2\frac{dx}{x-1}$, который расходится:

$$\int\limits_1^2\frac{dx}{x-1}=\lim_{a\to1+0}\int\limits_a^2\frac{dx}{x-1}=\lim_{a\to1+0}\ln|x-1|\Big|_a^2=-\infty \text{ - расходится.}$$

При $x\to1$ функции $\frac{1}{\ln x}\sim\frac{1}{x-1}$ – эквивалентные бесконечно большие, так как

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\frac{1}{x}}=1.$$

Значит, расходится и исследуемый интеграл. ◄

*Аудиторные задачи*

*I.* Вычислить *Н^cИ* (или установить их расходимость):

3.4.8. 3.4.9. 3.4.10.

3.4.11. 3.4.12. 3.4.13.

3.4.14. 3.4.15. 3.4.16.

3.4.17. 3.4.18.

3.4.19.

3.4.20. 3.4.21. 3.4.22.

*II*. Исследовать на сходимость интегралы:

3.4.23. 3.4.24.

3.4.25. 3.4.26.

3.4.27. 3.4.28.

3.4.29. 3.4.30. 3.4.31.

*Задание на дом*

*I*. Вычислить $H^cИ$ (или установить их расходимость):

3.4.32. 3.4.33.

3.4.34. 3.4.35.

*II*. Исследовать на сходимость интегралы:

3.4.36. 3.4.37.

3.4.38. . 3.4.39.

3.4.40.

***Контрольная работа по теме «Неопределенные интегралы»***

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с контролем навыков нахождения неопределенных интегралов различными способами и методами.

*Аудиторные задачи*

*Семина.М.А.*Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан.гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

Стр. 71-78.

**Первое и второе практические занятия**

**ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ (*ДИ*)**

$$\iint\limits_D f(x,y)ds$$

Вычисление *ДИ*

1. В декартовых координатах

$D: y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x)<\varphi_2(x)), x=a,$ $x=b, (a<b)$

$$\Downarrow$$

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

$D: y=\psi_1(x), y=\psi_2(x)$ $(\psi_1(x)<\psi_2(x)), y=c,$ $y=d, (c<d)$

$$\Downarrow$$

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

2. В полярных координатах

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$$

$$J=\begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix}=r,\ ds=|J|\,drd\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dS=\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi=$$

$$=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f^*(r,\varphi)rdr$$

$$D:\varphi\in[\alpha,\beta], r=r_1(\varphi), r=r_2(\varphi)\ (r_2>r_1)$$

**Приложения *ДИ***

| Г е о м е т р и ч е с к и е | |
|---|---|
| *Площади* $S_D$ | $S_D=\iint\limits_D dS=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_D r\,drd\varphi$ |
| *Объемы* $V_\Omega$ | $V_\Omega=\iint\limits_D f(x,y)dS=\iint\limits_D f^*(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi$ |
| *Площади поверхности* $G$ | $G: z=f(x,y)$ $G=\iint\limits_D \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}dS$ |

| Ф и з и ч е с к и е | |
|---|---|
| *Статические моменты* | $S_x=\iint\limits_D y\rho(x,y)dS$, $S_y=\iint\limits_D x\rho(x,y)dS$ |

| | |
|---|---|
| *Координаты центра масс* | $x_o=\dfrac{S_x}{m}=\dfrac{\iint\limits_D x\rho\,dS}{\iint\limits_D \rho\,dS}$, $y_o=\dfrac{S_y}{m}=\dfrac{\iint\limits_D y\rho\,dS}{\iint\limits_D \rho\,dS}$ |
| *Моменты инерции* | $I_x=\iint\limits_D y^2\rho\,dS$, $I_y=\iint\limits_D x^2\rho\,dS$ <br> $\rho=\rho(x,y)$ |

## 5.1. Вычисление *ДИ* в декартовых координатах

*Примеры решения*

5.1.1. Расставить пределы интегрирования в двойных интегралах $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ от функции $f(x,y)$, непрерывной в указанных областях *D*:

1. $D: y=x^2,\ y=x.$ 2. $D: x^2-y^2=1,\ y=1,\ y=-2.$

► 1. Построим область *D* (рис. 5.1). Первая линия − парабола, симметричная относительно оси *OY*, вторая − прямая. Найдем точки пересечения этих линий. Решаем уравнения $y=x^2$ и $y=x$, находим: $x_1=0,\ y_1=0,\ x_2=1,\ y_2=1.$ Область интегрирования является правильной в направлении обеих осей.

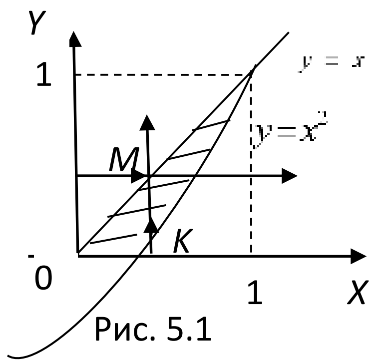



Рис. 5.1

Воспользуемся сначала формулой (вычисление *ДИ* в декартовых координатах)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy.$$

Здесь в повторном интеграле внутреннее интегрирование производится по переменной $y$, а внешнее − по $x$. Пределы интегрирования получены следующим образом. Область *D* была спроектирована на ось *OX* (область заключили в полосу, параллельную *OY*), тогда $x\in[0,1]$. Через произвольную точку $x\in(0,1)$ провели прямую, параллельную оси *OY* в положительном направлении, отметили точки входа (*K*) этой прямой в область и выхода (*M*). Функция $y=x^2$, которой удовлетворяют точки входа − нижний предел для $y$, функция $y=x$, которой удовлетворяют точки выхода − верхний предел. Таким образом,

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\quad x^2\le y\le x\}.$$

При внешнем интегрировании по $y$ область *D* заключаем в полосу, параллельную оси *OX*, тогда $D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,\quad y\le x\le \sqrt{y}\}.$

Применив формулу (вычисление *ДИ* в декартовых координатах), получим:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

2. Построим область *D* (рис. 5.2). Область *D* ограничена двумя прямыми и двумя ветвями гиперболы. Как видно из рисунка, область *D* является правильной в направлении оси *OX*.

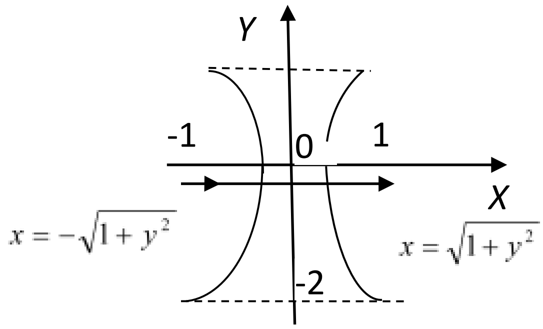



Рис. 5.2

По отношению к оси *OY* область *D* не является правильной (почему?). Тогда используя формулу (вычисление *ДИ* в декартовых координатах), получим:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-2}^{1} dy\int\limits_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x,y)dx. ◄$$

5.1.2. Записать в виде одного повторного интеграла следующие выражения

1. $\int\limits_0^2 dy\int\limits_y^{2y} f(x,y)dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_y^4 f(x,y)dx.$

2. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy+\int\limits_1^4 dx\int\limits_0^{\frac{4-x}{3}} f(x,y)dy.$

► 1. Область $D = D_1 \cup D_2$. Построим области $D_1$ и$D_2$, если $D_1=\{(x,y)|\ 0 \le y \le 2,\quad y \le x \le 2y\}$, $D_2 = \{(x,y)|\ 2 \le y \le 4,\quad y \le x \le 4\}$ (рис. 5.3).

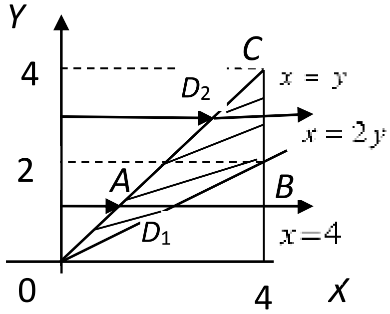



Рис. 5.3

Видно, что область $D$ − правильная в направлении оси $OX$. Левая часть границы области $D$ − одна линия, а именно $x = y$, а его правая часть состоит из двух линий $OB$ и $BC$, определяемых разными уравнениями: $x = 2y$ и $x = 4$. Поэтому область $D$ представлена суммой ($D_1 \cup D_2$) двух областей $D_1$ и $D_2$. Однако область$D$ является правильной в направлении оси $OY$. Если её заключить в полосу, параллельную оси $OY$, то $D = \left\{(x,y)|\ 0 \le x \le 4,\quad \frac{x}{2} \le y \le x\right\}$, а двойной интеграл запишется в виде одного повторного:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} f(x,y)dy.$$

2. Построим области $D_1 = \{(x,y)|\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$ и $D_2 = \{(x,y)| 1 \le x \le 4,\ 0 \le y \le \frac{4-x}{3}\}$ (рис. 5.4).

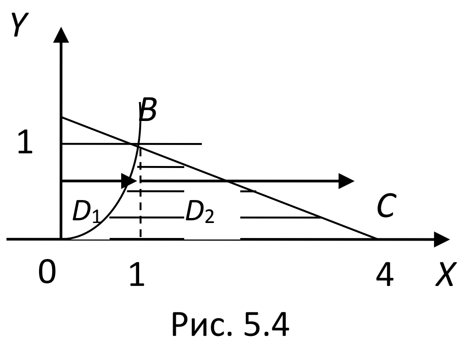



Рис. 5.4

Область $D = D_1 \cup D_2$ является правильной в направлении оси $OY$. Нижняя ее граница − одна линия $y = 0$, а верхняя состоит из двух линий $OB$ и $BC$, определяемых разными уравнениями: $y = x^2$ и $y = \frac{4-x}{3}$. Область является правильной и в направлении оси $OX$.

Если её заключить в полосу, параллельную оси *OX*, то $D=\{(x,y)|\ 0\le y\le 1,\ \sqrt{y}\le x\le 4-3y\}$. В этом случае двойной интеграл представляется в виде одного повторного:

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy+\int\limits_1^4 dx\int\limits_0^{\frac{4-x}{3}} f(x,y)dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{4-3y} f(x,y)dx. \blacktriangleleft$$

5.1.3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$$

► Построим область, ограниченную прямыми: $y-0$ - снизу, $y=1$ - сверху и линиями: $x=-\sqrt{1-y^2}$ - слева, $x=1-y$ - справа (рис. 5.5).

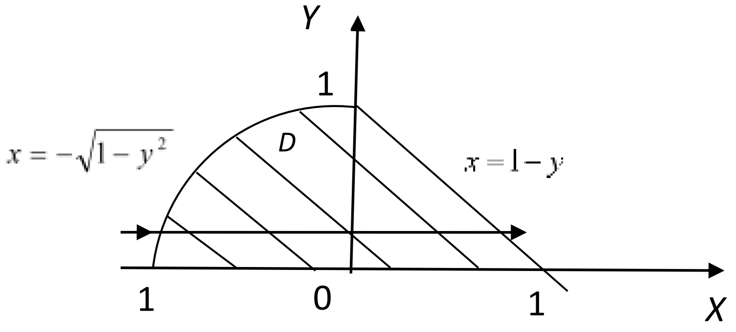



Рис. 5.5

Как нетрудно заметить, линия $x=-\sqrt{1-y^2}$ есть левая половина окружности $x^2+y^2=1$. Область *D*является правильной относительно каждой из осей *OX* и *OY*, но на разных отрезках оси *OX* она сверху ограничена разными линиями: на отрезке [−1, 0] − это верхняя половина окружности $y=\sqrt{1-x^2}$, а на отрезке [0,1] – это прямая $y=1-x$. Снизу область *D* ограничена осью абсцисс $y=0$. Следовательно, можно записать

$$\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} f(x,y)dy. \blacktriangleleft$$

5.1.4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy,\quad D:\ x=0,\ y=1,\ y^2=x.$

► В данном случае область интегрирования $D$ (рис. 5.6) является правильной как относительно оси $OY$, так и оси $OX$, поэтому нетрудно перейти к повторному интегралу двумя способами:

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} dy,$    2. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx.$

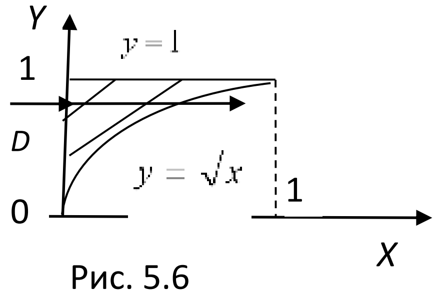



Рис. 5.6

Однако, второй способ предпочтительней, поскольку в первом случае для внутреннего интеграла первообразная не выражается через элементарные функции. Это замечание может быть полезно и в ряде других примеров, поскольку изменение порядка интегрирования часто упрощает вычисления. В данном случае будем иметь:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx = \int\limits_0^1 \left( ye^{\frac{x}{y}} \right)\Bigg|_0^{y^2} dy = \int\limits_0^1 \left( ye^y - y \right) dy = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

5.1.5. Найти среднее значение функции $f(x,y) = 3x + 2y$ в треугольнике $O$ (0, 0), $A$ (1, 0), $B$ (0, 1).

► Используя теорему о среднем ($6^\circ$), имеем $f_{cp} = \frac{1}{S_D} \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$ Площадь $_\Delta$OAB $S_D = OA\frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$ и

$$\iint\limits_D (3x + 2y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (3x + 2y)dy == \int\limits_0^1 \left( \left(3xy + y^2\right)\Big|_0^{1-x} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(3x(1-x) + 1 - x^2\right)dx = \left( \frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{(1-x)^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow f_{cp} = \frac{5}{6} : \frac{1}{2} = \frac{5}{3}. \blacktriangleleft$$

*Аудиторные задачи*

*I*. Расставить пределы интегрирования в двойных интегралах $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ от функции $f(x,y)$, непрерывной в указанных областях *D*:

5.1.6.

5.1.7.

5.1.8.

5.1.9.

*II*. Изменив порядок интегрирования, записать в виде одного повторного интеграла следующие выражения:

5.1.10.

5.1.11.

5.1.12.

5.1.13.

*III*. Вычислить интегралы:

5.1.14.

5.1.15.

5.1.16.

5.1.17.

5.1.18.

5.1.19.

5.1.21.

5.1.22.

*Задание на дом*

*IV*. Найти среднее значение функции:

5.1.20.

5.1.23. 5.1.24.

4.1.25.

**Третье и четвертое практические занятие**

## ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ (*ТИ*)

### 1. Вычисление *ТИ*

**В декартовых координатах**

$$\Omega: z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$$
$$(z_1 < z_2)\ D = \text{пр}_{XOY}\Omega$$
$$D: y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x),$$
$$(\varphi_1(x) < \varphi_2(x)), x = a, x = b$$
$$(a < b)$$

$$\iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz =$$
$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

**В цилиндрических координатах**

$$M(x,y,z) \Leftrightarrow M(r,\varphi,z)$$
$$\underbrace{x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z}$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r & 0 \\ x'_\varphi & y'_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$
$$dV = |J|\, dr d\varphi dz$$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dV =$$
$$= \iiint\limits_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dV =$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\, dr \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_1(r,\varphi)} f^*(r,\varphi,z)dz$$
$$D: r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi)\ (r_1 < r_2),$$
$$\varphi = \alpha, \varphi = \beta\ (\alpha < \beta)$$

**В сферических координатах**

$$M(x,y,z) \Leftrightarrow M(r,\varphi,\theta)$$
$$x = r\cos\varphi\sin\theta,$$
$$\underbrace{y = r\sin\varphi\sin\theta, z = z\cos\theta}$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r & z'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta,$$
$$dV = |J|\, dr d\varphi d\theta$$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dV =$$
$$= \iiint\limits_\Omega f^*(r,\varphi,\theta) r^2 \sin\theta\, dr d\varphi d\theta =$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta\, d\theta \int\limits_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f^*(r,\varphi,z)dz$$

### 2. Приложения *ТИ*

| Г е о м е т р и ч е с к и е |
|---|
| *Объем тела* $V_\Omega$<br>$V_\Omega = \iiint\limits_\Omega dV = \iiint\limits_\Omega dxdydz = \iiint\limits_\Omega r\, dr d\varphi dz = \iiint\limits_\Omega r^2 \sin\theta\, dr d\varphi d\theta$ |

| Ф и з и ч е с к и е |
|---|

| *Статистические моменты* | *Координаты центра масс* | *Моменты инерции* |
|---|---|---|
| $S_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z\,\rho(x,y,z)dV$ | $x_o = \dfrac{S_{xz}}{m} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho\,dV}{\iiint\limits_{\Omega} \rho\,dV}$ | $I_x = \iiint\limits_{\Omega} \left(y^2 + z^2\right)\rho(x,y,z)dV$ |
| $S_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x\,\rho(x,y,z)dV$ | $y_o = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho\,dV}{\iiint\limits_{\Omega} \rho\,dV}$ | $I_y = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + z^2\right)\rho\,dV$ |
| $S_{xz} = \iiint\limits_{\Omega} y\,\rho(x,y,z)dV$ | $z_o = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho\,dV}{\iiint\limits_{\Omega} \rho\,dV}$ | $I_z = \iiint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right)\rho\,dV$ |

### 6.1. Определение, свойства и вычисление *ТИ*

*Примеры решения*

6.1.1. Расставить пределы интегрирования в *ТИ* по области $\Omega$:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV;\ \Omega:\ z = 3x + y,\ z = 0,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0.$$

► Область $\Omega$ снизу ограничена плоскостью $z = 0$, сверху − плоскостью $z = 3x + y$, а с боков − плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ (рис. 6.1).

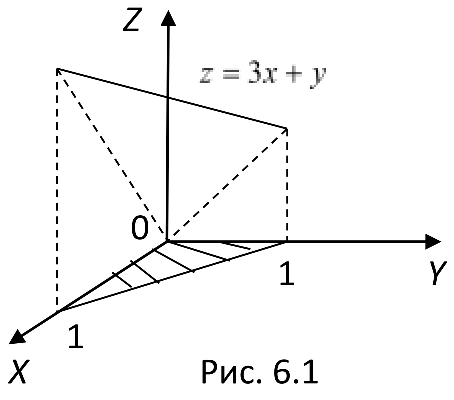



Рис. 6.1

Ортогональная проекция области на плоскости *XOY*− треугольник, ограниченный линиями $y = 0$, $y = 1 - x$ на [0, 1].

Тогда согласно формуле (вычисление *ТИ* в декартовых координатах) получим $\iiint\limits_{\Omega} f dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{3x+y} f\, dz.$ ◄

6.1.2. Вычислить трехкратный интеграл $I = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x}^{1} dy \int\limits_{0}^{2} (4+z) dz$ и построить его область интегрирования.

► Последовательно вычисляем три однократных *ОИ*, начиная с внутреннего:

$$I_1 = \int\limits_0^2 (4+z)dz = \left.\frac{(4+z)^2}{2}\right|_0^2 = \frac{36-16}{2} = 10;$$

$$I_2 = \int\limits_x^1 I_1 dy = 10\int\limits_x^1 dy = 10y\Big|_x^1 = 10\left(1-x^2\right);$$

$$I_3 = I = \int\limits_{-1}^{1} I_2 dx = 10\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx = 10\left.\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1} = \frac{40}{3}.$$

Здесь, как и при вычислении двукратного интеграла, можно пользоваться более краткой записью:

$$I = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x}^{1} dy \int\limits_{0}^{2} (4+z)dz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x}^{1} \left.\frac{(4+z)^2}{2}\right|_0^2 dy = 10\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x}^{1} dy = \int\limits_{-1}^{1} 10dx \cdot y\Big|_x^1 =$$

$$= 10\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx = 10\left.\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1} = \frac{40}{3}.$$

Для построения области интегрирования $\Omega$ данного трехкратного интеграла пишем вначале уравнение поверхностей, ограничивающих эту область. Приравнивая переменную интегрирования каждого интеграла к его пределам, получим следующие уравнения:

$$x=-1,\ x=1,\ y=x^2,\ \ y=1,\ z=0,\ z=2.$$

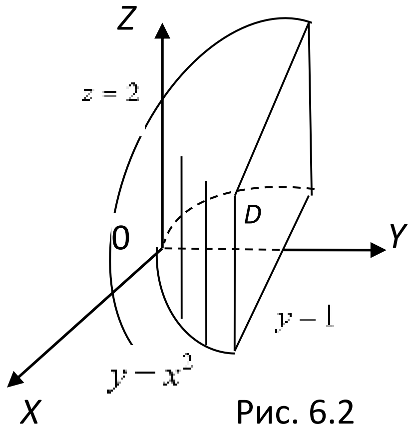


Рис. 6.2

Построив в системе координат *OXYZ* полученные плоскости и поверхность $y = x^2$ (рис. 6.2), видим, что ограниченная ими область $\Omega$ есть прямой цилиндр, образующие которого параллельны оси *OZ*. ◄

6.1.3. Вычислить *ТИ* $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$, где область $\Omega$ определяется неравенствами

$$0 \le x \le \frac{1}{2},\ x \le y \le 2x,\ 0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

► По условию задачи уже имеем пределы всех трех переменных *x, y,z*. Поэтому можем сразу (без рисунков областей $\Omega$ и *D*) применить формулу (вычисление *ТИ* в декартовых координатах);

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_x^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_x^{2x} z^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_x^{2x} \left(1 - x^2 - y^2\right) dy = = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left( y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_x^{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left( 2x - 2x^3 - \frac{8x^3}{3} - x + x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left( x - \frac{10x^3}{3} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left( \frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{6} \right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left( \frac{1}{8} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{16} \right) = \frac{7}{192}. \ ◄$$

6.1.4. Вычислить *ТИ*

$$I = \iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz,\ D:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ \ (x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0).$$

► Область $\Omega$ − часть шара, расположенная в 1 октанте (рис. 6.3). Сверху область ограничена сферической поверхностью $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, а снизу − плоскостью $z=0$. Ортогональная проекция области $\Omega$ на плоскость *XOY* – четверть круга, ограниченного линиями $x=0,\ y=0,\ y=\sqrt{1-x^2}$.

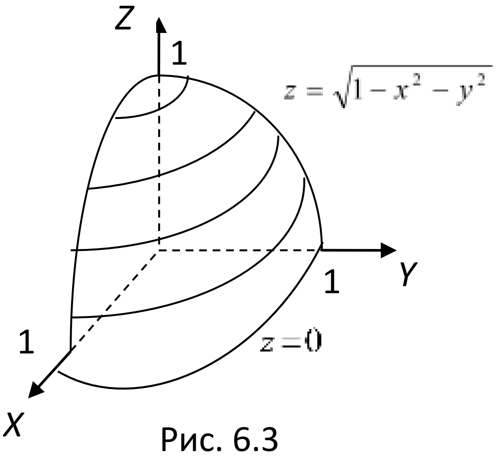



Рис. 6.3

Тогда согласно формуле (вычисление *ТИ* в декартовых координатах) получим,

$$I=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz=\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)ydy=$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^1\left(y^2\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)^2 d\left(1-x^2\right)=\frac{1}{48}.$$ ◄

6.1.5. Вычислить *ТИ* $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dV,\ \Omega:\ z=2,\ 2z=x^2+y^2$ с помощью перехода к цилиндрическим координатам.

► Область $\Omega$ (рис. 6.4) ограничена снизу параболоидом $2z=x^2+y^2$, а сверху плоскостью $z=2$.

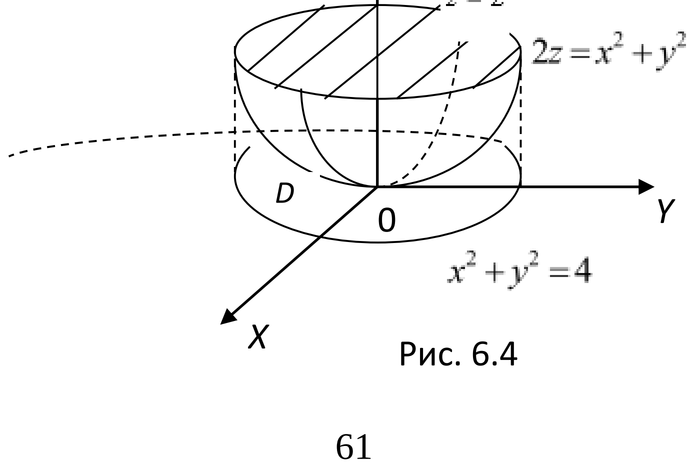



Рис. 6.4

Эта область проектируется в область *D* плоскости *XOY*, ограниченную окружностью $x^2+y^2=4$, которая получена от пересечения параболоида $x^2+y^2=2z$ с плоскостью $z=2$, т.е. от совместного решения двух уравнений

$$\begin{cases} z=2, \\ 2z=x^2+y^2. \end{cases}$$

Введем цилиндрические координаты, используя формулы перехода (вычисление *ТИ* в цилиндрических координатах). Так как $x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2$ и переменные $\varphi,\ r,\ z$ имеют следующие пределы: $0\le\varphi\le2\pi,\ 0\le r\le2,\ \frac{r^2}{2}\le z\le2$ (нижняя граница области $\Omega$ − параболоид $z=\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{r^2}{2}$, то данный интеграл по формуле примет вид

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 r^3dr\int\limits_{\frac{r}{2}}^{2}dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 r^3dr\,z\Big|_{\frac{r}{2}}^{2}=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2 r^3\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\left(2r^3-\frac{r^5}{2}\right)dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{2}-\frac{r^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi=\frac{8}{3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{8\varphi}{3}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{16\pi}{3}.\ ◄$$

6.1.6. Вычислить интеграл $I=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz,\ \Omega:\ x^2+y^2+z^2=2Rz,\ x^2+y^2=z^2$, с помощью перехода к цилиндрическим или сферическим координатам.

► 1. Перейдем к цилиндрическим координатам, тогда уравнения поверхностей, ограничивающих область $\Omega$, запишутся в виде $r^2+z^2=2Rz,\ r^2=z^2$. Переменная $\varphi$ не входит в уравнения, следовательно, $\varphi\in[0,2\pi]$. Для того чтобы расставить пределы интегрирования по *r* и *z*, достаточно нарисовать область интегрирования в переменных *r, z* (рис. 6.5).

Таким образом, все сводится к расстановке пределов в *ДИ* по области $D$:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\iint\limits_D rdrdz=2\pi\left(\int\limits_0^R dz\int\limits_0^z rdr+\int\limits_R^{2R}dz\int\limits_0^{\sqrt{2Rz-z^2}}rdr\right)=$$

$$=\pi\left(\int\limits_0^R z^2dz+\int\limits_R^{2R}\left(2Rz-z^2\right)dz\right)dz=\pi R^3.$$

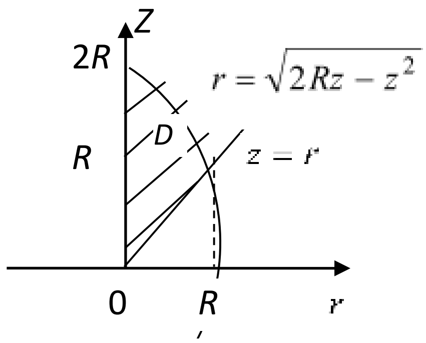


Рис. 6.5

2. Перейдём к сферическим координатам. Тогда уравнения поверхностей, ограничивающих область интегрирования, запишутся $r = 2r\cos\theta,\ \sin^2\theta = \cos^2\theta.$ Сделаем чертёж в переменных $r,\ \theta$ (рис. 6.6).

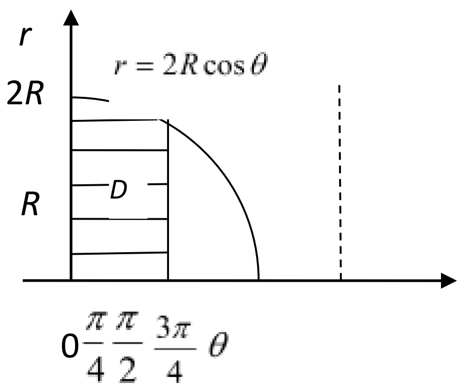


Рис. 6.6

Здесь $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ и $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ - решения уравнения $\sin^2\theta = \cos^2\theta$ из промежутка $[0,\pi]$. Тогда можно записать

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \iint_D \sin\theta dr d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} r^2 \sin\theta dr = \frac{16}{3}\pi R^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \cos^2\theta d(\cos\theta) = \pi R^3. \blacktriangleleft$$

6.1.7. Вычислить $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdydz,$ где $\Omega$ – половина шара $x^2+y^2+z^2 \le R^2,\ y \ge 0.$

► В сферической системе координат уравнение сферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$ записывается в виде $r^2 = R^2$, т.е. $0 \le r \le R$, а условие $y \ge 0$ – в виде $r\sin\varphi\sin\theta \ge 0,$ так как $\sin\theta \ge 0$ $(0 \le \theta \le \pi)$, то $\sin\varphi \ge 0$ и $\varphi \in [0,\pi].$

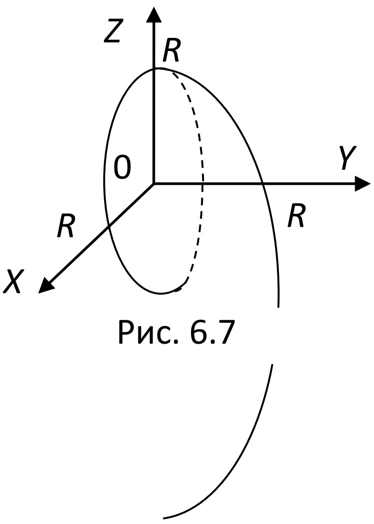



Рис. 6.7

Таким образом, в сферических координатах данная область задаётся следующим образом:

$$\Omega' = \left\{ (r, \varphi, \theta) \middle| 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le \pi \right\}$$

(что видно и из рисунка 6.7), а подынтегральная функция равна $\sqrt{1 + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{1 + r^3}$.

По формуле (вычисление *ТИ* в сферических координатах) получаем:

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} \sqrt{1 + r^3}\, r^2 \sin\theta\, drd\varphi\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{R} \sqrt{1 + r^3}\, r^2 dr = \frac{1}{3} \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{R} \left(1 + r^3\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + r^3\right) =$$

$$= \frac{2}{9} \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \left(1 + r^3\right)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^R = \frac{2}{9} \left( \left(1 + R^3\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \varphi \Bigg|_0^{\pi} \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4\pi}{9} \left( \left(1 + R^3\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right). \blacktriangleleft$$

*Аудиторные задачи*

*I*. Расставить пределы интегрирования в *ТИ* $\iiint\limits_{\Omega} f\, dxdydz$ для указанных областей $\Omega$:

6.1.8.

6.1.9.

*II*. Вычислить трехкратные интегралы и построить их области интегрирования:

6.1.10. 6.1.11.

*III*. Вычислить *ТИ*:

6.1.12. 6.1.13. 6.1.14

*IV*. Вычислить интегралы, переходя к цилиндрическим или сферическим координатам:

6.1.15. 6.1.17. 6.1.19. .

6.1.16. 6.1.18. 6.1.20.

*Задание на дом*

Вычислить *ТИ*:

6.1.21. 6.1.22. 6.1.23.

## Пятое и шестое практические занятие

## ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ (ЧР)

ЧР: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$

1.Знакоположительные ЧР

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n, \;\; U_n > 0 \;\; \forall n \in N$

2. Знакочередующиеся ЧР

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n, \;\; U_n > 0 \;\; \forall n \in N$

3. Знакопеременные ЧР

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n, \;\; U_n > 0 \;\; \forall n \in N$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k, \qquad S = \lim_{n \to \infty} S_n = A \neq \infty \quad \vee \;\nexists \;\; \rightarrow \text{ЧР сходится}$$

$\boxed{S - \text{сумма ряда; } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q^n} - \text{сход. при } |q|<1, \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} - \text{сход. при } p>1}$

<u>Свойства ЧР:</u>$1^\circ$. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \quad \leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-k} = S - S_k, \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} U_i.$

$2^\circ$. $S = \sum_{n=1}^{\infty} U_n, \quad \delta = \sum_{n=1}^{\infty} V_n, \quad W_n = aU_n + bV_n \quad \to \quad \exists \sum_{n=1}^{\infty} W_n = aS + b\delta.$

$\boxed{\text{Необходимый признак сходимости: } \lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0}$

1. Достаточные признаки сходимости

- Признаки сравнения
  - Сравнения: $\exists N: 0 \le U_n \le V_n$ $\forall n$ $N$
    - $\overbrace{\sum V_n - \text{сх.} \quad \sum U_n - \text{расх.}}$
    - $\sum U_n - \text{сх.}$ $\sum V_n - \text{расх.}$
  - Предельный: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = A \ne 0 \ (\infty)$
    - $\sum U_n, \sum V_n - \text{сход.}$ (расх.) одновременно
- Признак Д' Аламбера: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$
  - $\overbrace{l<1 \quad l>1 \quad l=1}$
  - сх. расх. доп.
- Признаки Коши
  - Радикальный: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = l$
    - $\overbrace{l<1 \quad l>1}$
    - сх. расх.
  - Интегральный: $I = \int_1^{\infty} f(x)dx, \ U_n = f(n)$
    - $\overbrace{I - \text{сх.} \quad I - \text{расх.}}$
    - $\sum U_n - \text{сх.}$ $\sum U_n - \text{расх.}$

2. Признак Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n - \text{сх.}, \quad 0<S\le U_1$$

$$\Updownarrow$$

1. $U_1 > U_2 > \ldots > U_n > \ldots$ .

2. $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n,\ U_n \underset{<}{\overset{>}{-}} 0 - \text{сх.}$

3. Сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n, \quad U_n \underset{<}{\overset{>}{-}} 0$

абсолютная

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|U_n|$ – сход.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n,\ U_n \underset{<}{\overset{>}{-}} 0 - \text{сх.}$

абсолютно (+ +)

условная

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|U_n|$ – расх. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ – сх.

условно (+ –)

### 3.1. Знакоположительные ЧР. Признаки сходимости

<u>Примеры решений</u>

3.1.1. Показать, что ЧР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ сходится, и найти его сумму.

► Так как дробь $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ можно представить в виде разности $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$, то $n$ – ю частичную сумму ряда можно записать как

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$=0{,}5\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)==0{,}5\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 0{,}5\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = 0{,}5,$$

т. е. заданный ряд сходится и его сумма равна 0,5.◄

3.1.2. Зная, что ЧР $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ сходится, установить сходимость ЧР $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

► Так как $\forall n\in N$ $\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, то по признаку сравнения (см. таблицу) будет сходиться и исследуемый ЧР. ◄

3.1.3. Исследовать сходимость ЧР, для которого $U_n=\frac{1}{n!}$.

► Члены данного ряда меньше соответствующих членов заведомо сходящегося ряда (геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}$) или равны им: $V_n=\frac{1}{2^{n-1}}$. Это следует из того, что $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\geq 2^{n-1}$, т. е. $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$ Значит исследуемый ЧР сходится по признаку сравнения. ◄

3.1.4. Исследовать сходимость ряда с $U_n=\frac{2n-1}{n^2+n-1}$.

► Используем для исследования предельный признак сравнения. В качестве известного ряда возьмём гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который сходится. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{U_n}{V_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2-n+1}:\frac{1}{n}=2\neq0$ $(\infty)$, т. е. ЧР $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ расходится. ◄

3.1.5. Исследовать сходимость ЧР с $U_n=\frac{n^5}{3^n}$.

► Если выражение для $U_n$ содержит показательную функцию (в нашем случае $3^n$), удобно для исследования использовать признак Д' Аламбера (см. таблицу). Для $U_{n+1}$ имеем: $U_{n+1}=\frac{(n+1)^5}{3^{n+1}}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^5}{3^{n+1}}:\frac{n^5}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5}{(3n)^5}=\frac{1}{3}<1.$$

Значит данный ряд сходится. ◄

3.1.6. Исследовать сходимость ЧР с $U_n = \dfrac{4^n n!}{n^n}$.

► По признаку Д' Аламбера имеем $U_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{4}{e} > 1,$$

т. е. исследуемый ряд расходится. ◄

3.1.7. Исследовать сходимость ЧР с $U_n = \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

► Если выражение для $U_n$ позволяет извлечь корень $n-$ой степени,то обычно применяют радикальный признак Коши (см. таблицу). Имеем

$$\sqrt[n]{U_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \text{ и } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Можно говорить о том, что данный ряд сходится. ◄

3.1.8. Исследовать сходимость ЧР $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, если $U_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$.

► Если выражение для $U_n = f(n)$ позволяет достаточно легко ответить на вопрос о сходимости НсИ $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx,$ то применяют интегральный признак Коши (см. таблицу). В данном случае:

$$I = \int_1^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{2xdx}{x^2+1} == \lim_{b\to\infty} \ln\left(1+x^2\right)\Big|_1^b = \infty,$$

т. е. НсИ расходится, а значит расходится и исследуемый ЧР.◄

3.1.9. Исследовать сходимость ЧР с $U_n = \dfrac{1}{n\ln^3 n}, \quad n \geq 2.$

► Имеем:

$$f(x)=\frac{1}{x\ln^3 x} \quad \text{и}$$

$$I=\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x\ln^3 x}==\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_2^b=\frac{1}{2\ln^2 2}\ -$$

сходится.

Согласно интегральному признаку будет сходиться и заданный ЧР. ◄

Аудиторные задачи

*I.* Доказать сходимость и найти сумму для ЧР:

3.1.10. 3.1.11.

3.1.12.

*II.* Используя признаки сравнения, исследовать на сходимость ЧР:

3.1.13. 3.1.14. 3.1.15.

*III.* Исследовать на сходимость при помощи признака Д’ Аламбера ЧР:

3.1.16.

3.1.17.

3.1.18.

*IV*. Пользуясь радикальным признаком, исследовать на сходимость ЧР:

3.1.19.

3.1.20.

3.1.21.

*V*. При помощи интегрального признака исследовать сходимость ЧР:

3.1.22.

3.1.23.

3.1.24.

Задание на дом

3.1.25. Найти $S_n$ и $S$, доказав сходимость ЧР

Исследовать на сходимость ЧР:

| | | |
|---|---|---|
| 3.1.26. | 3.1.29. | 3.1.32. |
| 3.1.27. | 3.1.30. | 3.1.33 |
| 3.1.28. | 3.1.31. | |

**Знакочередующиеся ЧР. Признак Лейбница**

Примеры решений

3.2.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

► Так как $U_n = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n+1} = U_{n+1} \quad \forall\, n \in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1} = 0,$ то выполнены условия 1 и 2 признака Лейбница (см. таблицу), и данный ряд сходится. ◄

3.2.2. Исследовать на сходимость ряд $\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\ldots$ .

► В признаке Лейбница существенным требованием является монотонное убывание (условие 1). Если оно не выполнено, то знакочередующийся ЧР может оказаться расходящимся. В данном примере $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0,$ но ЧР расходится, так как его частичная сумма с номером $2n$ $S_{2n} = \frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{1}-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{2}{n}-\frac{1}{n}$ является $n-$й частичной суммой гармонического ряда и, следовательно, неограниченно возрастает при $n \to \infty$. ◄

Аудиторные задачи

Исследовать на сходимость следующие знакочередующиеся ЧР:

3.2.3. 3.2.5.

3.2.4. 3.2.6.

3.2.7. 3.2.8.

Задание на дом

Вычислить, какие из данных рядов сходятся и какие расходятся:

3.2.9.

3.2.10.

3.2.11.

## Седьмое практическое занятие

## СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ (СР)

Функциональные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$

Степенные ряды $U_n(x) = a_n (x - x_0)^n$

Тригонометрические ряды

$U_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ (1), $x_0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \in R -$ СР

Т (Абеля): (1) сход. в $x_1 \neq x_0 \Rightarrow (1)$ сход. абсолютно $\forall x : |x - x_0| < |x_1 - x_0|$

(1) расх. в $x_1 \neq x_0 \Rightarrow (1)$ расх. $\forall x : |x - x_0| > |x_1 - x_0|$

Радиус сходимости $R = \begin{cases} 0 \Rightarrow x = x_0 - \text{т.сходимости} \\ \infty \Rightarrow x \in R \quad \text{Интервал сходимости} : x \in (x_0 - R, x_0 + R) \\ A \Rightarrow x \in (x_0 - A, x_0 + A) \end{cases}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}.$$

<u>Свойства СР:</u> $1^\circ$. $S=S(x)-$ сумма СР, непр. $\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$.

$2^\circ$. $S(x)-$ сумма (1) $\Rightarrow\exists\ S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$.

$3^\circ$. $S(x)-$ сумма (1) $\Rightarrow\exists\int\limits_a^b S(x)dx\ \forall\,[a,b]\subset(x_0-R,x_0+R)$.

$4^\circ$. $S(x)$, $\int\limits_a^b S(x)dx-$ сход. $\forall x\in(x_0-R,x_0+R)$.

## 2. Ряды Тейлора и Макларена

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!}\quad(2)$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}\quad(3)$$

Т: $f(x)=S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)\ \leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$,

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}\qquad R_n(x)=f(x)-S_n(x)$$

$R_n(x)=f^{(n+1)}(\xi)\cdot\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, $\xi\in(x_0,x)-$ остаток в форме Лагранжа

Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена:

1. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$. 2. $\exists R:\ \forall x\in(-R,R)(3)-$сход. 3. $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$x \in R$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-1}$$
$$x \in R$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$
$$x \in R$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\frac{x^n}{n!} + \ldots,$$
$$x \in (-1, 1), \quad m \in R$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$
$$x \in (-1, 1)$$

$$\arcsin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)x^{2n-1}}{2^{n-1}(n-1)!(2n-1)}, \quad x \in (-1, 1)$$

3. Применение СР к приближенным вычислениям

Вычисление значений функций

$$x_1 \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$$
$$f(x_1) \approx S_n(x_1),$$
$$\Delta = |\ f(x_1) - S_n(x_1)| = R_n(x_1)$$

Вычисление корней

Вычисление логарифмов

$$\ln(N+1) = \ln N + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2N+1)^{2n-1}}$$
$$x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$$

Вычисление пределов

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$$

Вычисление определенных интегралов

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x - x_0)^n dx$$

## 4.1. Функциональный и степенной ряд. Радиус и интервал сходимости СР

4.1.1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$.

► Для определения области сходимости функциональных рядов обычно используется признак Д' Аламбера. Затем те значения $x$, для которых этот признак не решает вопроса о сходимости ряда $(l=1)$, исследуются особо, исходя из других признаков сходимости рядов. В данном примере $U_n(x)=\dfrac{1}{n(x+2)^n}$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\dfrac{1}{|x+2|}$. Ряд сходится при $\dfrac{1}{|x+2|}<1$, тогда $|x+2|>1$ или $-1>x+2>1$, отсюда $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,\infty)$. При $x=-3$ получим знакочередующийся ряд с $U_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$, который сходится по признаку Лейбница. При $x=-1$ получим гармонический расходящийся ряд. Область сходимости данного ряда состоит из двух интервалов

$$x\in(-\infty,-3)\cup(-1,\infty).$$ ◄

4.1.2. Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$.

► Данный ряд сходится (как ряд Дирихле) для значений $x>1$ и расходится для значений $x\le 1$. Следовательно, область сходимости есть интервал $(1,+\infty)$. ◄

4.1.3. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sqrt[3]{\sin x}$.

► Воспользуемся радикальным признаком Коши $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n(x)}=\sqrt[3]{\sin x}<1$ что выполняется $\forall x\ne x_k=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$. При $x=x_k$ $\sin x=\pm 1$ и исследуемый ряд расходится. ◄

4.1.4. Найти радиус и интервал сходимости СР с $U_n=\dfrac{x^n}{(n+1)5^n}$.

► Определить радиус сходимости СР $R$, используя формулу (см. таблицу) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, полученную из признака Д' Аламбера. Имеем:

$$a_n=\frac{1}{(n+1)5^n},\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+2)5^{n+1}},\ R=\lim_{n\to\infty}5^{n+1}\frac{n+2}{(n+1)\,5^n}=5.$$

Следовательно, СР сходится $\forall x\in(-5,5)$ – интервалу сходимости. ◄

4.1.5. Найти интервал сходимости и сумму СР $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, используя его свойства.

► Воспользуемся свойством 2 СР (см. таблицу), по которому СР можно почленно дифференцировать внутри интервала его сходимости. Найдём $S'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}1\cdot\left(-x^2\right)^{n-1}$ – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с $b=1$, $q=-x^2<1$, для которой $S=\frac{b}{1-q}=\frac{1}{1+x^2}=S'(x)$. Интегрируя, имеем $S(x)=\int_0^x S'(x)dx=\operatorname{arctg}x$. СР сходится при $|x|<1$. ◄

<u>Аудиторные задачи</u>

*I.* Определить область сходимости функциональных рядов:

4.1.6. 4.1.7. 4.1.8.

*II.* Определить радиус и интервал сходимости СР:

4.1.9. 4.1.12.

4.1.10. 4.1.13.

4.1.11. 4.1.14.

*III.* Используя свойства СР, найти интервал сходимости и сумму $S(x)$:

4.1.15. 4.1.16. 4.1.17.

<u>Задание на дом</u>

4.1.18. 4.1.19. 4.1.20.

**Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена**

4.2.1. Разложить в ряд по степеням $x$ функцию $f(x)=e^x\sin x$.

► Находим производные функции $f(x)$ и их значения в т. $x=0$:

$$f(0)=0;\ f'(x)=e^x(\cos x+\sin x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right);\ f'(0)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4};$$

$$f''(x)=\left(\sqrt{2}\right)^2 e^x\sin\left(x+\frac{2\pi}{4}\right);\ f''(0)=\left(\sqrt{2}\right)^2\sin\frac{2\pi}{4};$$

$$f^{(n)}(x)=\left(\sqrt{2}\right)^n e^x\cdot\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)\ f^{(n)}(0)=\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Оценим абсолютную величину остаточного члена $R_n(x)$ при $n\to\infty$:

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\left|\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}e^{\xi}\,\frac{\sin(\xi+(n+1)\pi/4)\,x^{n+1}}{(n+1)!}\right|<U_n=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}e^x\,|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ имеем:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+2}e^x|x|^{n+2}}{(n+2)!}:\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}e^x\,|\,x\,|^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{\sqrt{2}\,|\,x\,|}{n+2}\to 0,\ R<1\quad\forall x.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ сходится (по признаку Д' Аламбера), а его общий член $U_n\to 0$ при $n\to\infty$ (в силу необходимого признака сходимости), поэтому и остаточный член $R_n(x)$, по модулю меньший $U_n$, тем более стремится к нулю при $n\to\infty$. Поэтому имеем:

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!},\ x\in R.\ ◄$$

4.2.2. Написать ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ функции $f(x)=\ln(x+2)$.

► Находим производные функции $f(x)$ и их значение в точке $x=1$:

$$f(x)=\ln(x+2);\quad f(1)=\ln 3;\quad f'(x)=\frac{1}{x+2};\quad f'(1)=\frac{1}{3};\ \dots;$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(x+2)^{-n};\quad f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{3^n}.$$

Следовательно, ряд Тейлора для $f(x)=\ln(x+2)$ имеет вид $\ln 3+\frac{x-1}{3}-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 3^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}+\ldots$ . ◄

4.2.3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=x\ln(1+x^2)$.

► Заметим, что

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad (x\in(-1,1]).$$

Заменяя в последнем равенстве $x$ на $x^2$, будем иметь $(x\in[-1,1])$:

$$\ln(1+x^2)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}+\ldots,$$

а поэтому

$$x\ln(1+x^2)=x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{x^7}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{n}+\ldots \qquad (x\in[-1,1]).$$ ◄

4.2.4. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=\frac{1}{x+2}$ по степеням $(x-1)$.

► Преобразуем эту функцию так, чтобы можно было использовать разложение функции $\frac{1}{1-x}$. Полагая $\frac{1}{x+2}=\frac{a}{1+b(x-1)}$, из тождества $1+b(x-1)=a(x+2)$ найдём $a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{3}$. Следовательно, $\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3\left(1+\frac{x-1}{3}\right)}$. Заменив в разложении функции $\frac{1}{1+x}$ величину $x$ на $\frac{x-1}{3}$, получим:

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{x-1}{3}+\frac{(x-1)^2}{3^3}-\ldots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^n}+\ldots\right).$$

Это разложение справедливо, когда $\left|\frac{x-1}{3}\right|<1$ или $x\in(-2,\ 4)$. ◄

4.2.5. Разложить функцию $f(x)=\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$ в ряд Маклорена.

► Известно, что $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,1).$ Поэтому

$$\ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n},\ x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\ \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,1).$$

Отсюда $\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}=\frac{1}{3}(\ln(1+2x)-\ln(1-x))=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^{n+1}2^n+1\right)x^n}{n}=$

$$=\frac{1}{3}\left(3x-\frac{3x^2}{2}+\frac{9x^3}{3}-\frac{15x^4}{4}+\ldots\right)=x-\frac{x^2}{2}+x^3-\frac{5x^4}{4}+\ldots,\ x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$ ◄

<u>Аудиторные задачи</u>

*I*. Разложить данные функции в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$:

4.2.6. 4.2.7.

4.2.8.

*II*. Разложить функции в ряд Маклорена:

4.2.9.

4.2.10.

4.2.11.

Задание на дом

4.2.12. 4.2.14. 4.2.16.

4.2.13. 4.2.15. 4.2.17

## Шестое и седьмое практические занятия

## Ряды Фурье

Тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,\ a_0,\ a_n,\ b_n \in R\ \ \forall n \in N$ (1)

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ - сход. равномерно $\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon): n>N \Rightarrow |R_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$

$\forall x \in X$ $\forall x \in X$

Свойства (1): $1^\circ.\ S(x)$ - непр. и период. с $\mathrm{T}=2\pi$.

$$2^\circ.\quad \forall \varphi(x) \in \{1, \cos kx,\ \sin kx\}_{k=1}^{n} \Rightarrow \left|\varphi(x) \sum_{n=N+1}^{\infty} U_n(x)\right| < |R_n(x)| < \varepsilon.$$

$$3^\circ.\ \exists \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty}(x)dx.$$

Признак равномерной сходимости (Вейерштрасса): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сход. $a_n>0$,

$\exists N: \forall n \geq N\ \forall x \in X: |U_n(x)| \leq a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ - сх. равномерно

$\Downarrow$

Ряд Фурье для $f(x)$

$$(1)\qquad \text{с } a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx,\qquad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right)dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)dx,\ T - \text{период}. \qquad (2)$$

Т (Дирихле): $f(x) = f(x \pm T)\ \forall x \in [a, a \pm T]$:

1. $f(x) \in C_{[a,a\pm T]} \vee \exists (x_1, ..., x_k) - \text{т.р.} I \text{ р.}$
2. $\exists\, f(x)\ \forall x \in [a, a \pm T],\ a = x_0, x_1, ... x_k = a + T$: $f(x)$ – мнотонна и огрничення $\forall (x_{i+1}, x_i)$ $i = \overline{1,k}$

ряд Фурье сходится:

$$\Rightarrow S(x) = \begin{cases} f(x), & x - \text{т. непр.} \\ \frac{1}{2}\left(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right) & x_0 - \text{т.р. } I \text{ р} \end{cases}$$

$f(x) = f(x \pm T),\ T = 2\pi$

$f(x) = f(-x)$ → (3)

$f(x) = -f(-x)$ → 1

$f(x) = f(x \pm T),\ T = 2l$

$f(-x) = f(x)$ → 2

$f(-x) = -f(x)$ → $f(x) = f(-x) \vee f(x) = -f(-x)$

$f(x) \neq f(x \pm T)$ ⇒ $x \in [0, l] \Rightarrow \forall x \in [-l, 0]$:

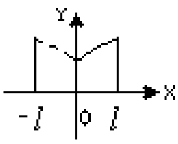
$$\left.\begin{aligned} &\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \\ &a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \\ &a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \end{aligned}\right\}(3)$$

1

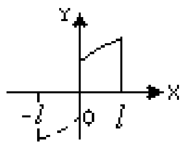
$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \\ &b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cdot \\ &\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx \end{aligned}\right\}(6)$$

2

$f(x) = f(-x) \quad \vee \quad f(x) = -f(-x)$




(5)




(6)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \\ &b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \end{aligned}\right\}(4)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \\ &a_0 = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)dx, \\ &a_n = \frac{2}{1}\int_0^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \end{aligned}\right\}(5)$$

## 5.1. Коэффициенты Фурье. Ряд функций с периодом $2\pi$

5.1.1. Разложить периодическую с $T=2\pi$ функцию $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,\ \pi),\\ 0, & x\in(-\pi,\ 0)\end{cases}$ в ряд Фурье, построить графики его первых частичных сумм $S_0(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$ и $S_3(x)$ и найти значение $S(x_0)$ суммы полученного ряда в заданной точке $x_0=\pi$.

► График заданной функции имеет вид, изображённый на рис. 5.1 (сплошная линия), т.е. $f(x)$- произвольного вида и ряд Фурье имеет вид (1) с коэффициентом (2). Имеем

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}1dx=\frac{x}{\pi}\bigg|_0^{\pi}=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=$$

$$=\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right).$$ Тогда

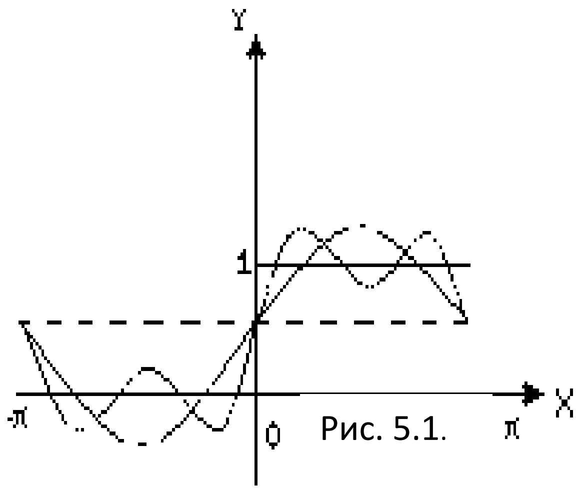


Рис. 5.1.

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)\sin nx}{n}=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\dots\right).$$

Для первых частичных сумм получим:

$$S_0(x)=\frac{1}{2},\ S_1(x)=\frac{1}{2}+2\sin\frac{x}{\pi},\ S_2(x)=S_1(x),\ S_3(x)=\frac{1}{2}+\frac{2\sin nx}{\pi}+\frac{2\sin 3x}{3\pi}.$$

Построим графики этих сумм, обозначая $S_0(x)=$ ——,

$S_1(x)=S_2(x)-\cdot-$ и $S_3(x)-\cdot\cdot-$ (рис.5.1). В т. $x_0=\pi$ $\sin(2n-1)=0$ и $S_1(x_0)=\frac{1}{2}$. ◄

Аудиторные задачи

5.1.2.

5.1.3.

5.1.4.

Задание на дом

5.1.5.

5.1.6.

## Ряд Фурье для чётных и нечётных функций

5.2.1. Разложить в ряд Фурье $2\pi$ - периодическую функцию $f(x)$, заданную на отрезке $x\in[-\pi,\pi]$ следующим образом: $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,\ \pi),\\ -1, & x\in(-\pi,\ 0).\end{cases}$

► Эта функция кусочно монотонна и ограничена на отрезке $x\in[-\pi,\pi]$ и по теореме разложения может быть представлена радом Фурье. Вычислим коэффициенты ряда Фурье. Поскольку функция $f(x)$ нечётная, воспользуемся формулой (4). Получаем:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)=\frac{4}{(2n-1)\pi},\ n\in N.$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

С помощью рядов Фурье можно находить суммы многих интересных ЧР. Например подставляя в полученный ряд $x=\frac{\pi}{2}$, обнаружим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.\ ◄$$

5.2.2. Разложить в ряд Фурье $2\pi$ - периодическую функцию $f(x)=x^2$, заданную на отрезке $x\in[-\pi,\pi]$.

► Эта функция кусочно монотонна, ограниченна на отрезке $x\in[-\pi,\pi]$ и по теореме разложения может быть представлена рядом Фурье. Поскольку эта функция чётная, воспользуемся формулой (3). Получаем:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2x^3}{3\pi}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3},\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\begin{vmatrix}u=x^2,\ dv=\cos nxdx\\ du=2xdx,\ v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}\frac{x\sin nxdx}{n}\right)=\begin{vmatrix}u=x,\ dv=\sin xdx\\ du=dx,\ v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx dx}{n}\right)=\frac{4x\cos nx}{\pi n^2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4\cos n\pi}{n^2}=\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Таким образом, ряд Фурье для данной функции имеет вид:

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}.$$

Этот ряд сходится во всех точках и его сумма равна $f(x)$. ◄

<u>Аудиторные задачи</u>

Указанные функции разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$. Определить сумму ряда в точках разрыва и на концах интервала $(-\pi,\pi)$, построить график функции и суммы соответствующего ряда (также и вне интервала $(-\pi,\pi)$):

5.2.4.

5.2.3. 5.2.5.

5.2.6.

<u>Задание на дом</u>

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом $T=2\pi$, если:

5.2.7. 5.2.8.

**Ряд Фурье для функций с периодом** $2l$.

**Разложение в ряд Фурье непериодических функций**

5.3.1. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную несколькими формулами

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-1,\ -1+\alpha),\\ 0, & x\in(-1+\alpha,\ 0),\\ 1, & x\in(0,\ \alpha),\\ 0, & x\in(\alpha,\ 1),\end{cases}$$ где $\alpha$ – некоторое число, $\alpha\in(0,\ 1)$.

► Разложим заданную функцию в ряд

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{l}\left(\int_{-l}^{l+\alpha}dx+\int_{-l+\alpha}^{0}0\,dx+\int_0^{\alpha}dx+\int_{\alpha}^{1}0\,dx\right)=\frac{2\alpha}{l}.$$

Легко видеть, что

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{n\pi}\left((-1)^n + 1\right)\sin\frac{n\pi\alpha}{l},$$

$$b_n = \frac{1}{l}\left(\int_{-l}^{-l+\alpha}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx + \int_{0}^{\alpha}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right) = \frac{1}{n\pi}\left((-1)^n + 1\right)\left(1 - \cos\frac{n\pi\alpha}{l}\right),$$

таким образом, при $n = 2k+1$ (нечётном) все $a_{2k+1} = b_{2k+1} = 0$, тогда как $a_{2k} = \frac{1}{k\pi}\sin\frac{2k\pi\alpha}{l}$, $b_{2k} = \frac{1}{k\pi}\left(1 - \cos\frac{2k\pi\alpha}{l}\right)$, $k \in N$. Особенно простой результат получается, если $\alpha = \frac{l}{2}$. Тогда

$$a_{2k} = \frac{1}{k\pi}\sin k\pi = 0,\ b_{2k} = \frac{1}{k\pi}\left(1 - \cos k\pi\right) = \frac{1-(-1)^k}{k\pi},$$

и ряд принимает вид:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{6\pi x}{l} + \ldots\right). \blacktriangleleft$$

5.3.2. Разложить функцию $f(x) = x(\pi - x)$ в ряд синусов в интервале $(0,\ \pi)$. Использовать полученный результат для нахождения суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

► Так как по условию задачи заданная непериодическая функция $f(x)$ доопределяется на интервале $(-\pi, 0)$ нечётным образом, воспользуемся формулой (6):

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx dx = \left| \begin{array}{c} u = \pi x - x^2,\ dv = \sin nx dx \\ du = (\pi - 2x)dx,\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x(\pi - x)\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\right)\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos nx dx = \left| \begin{array}{c} u = \pi - 2x,\ dv = \cos nx dx \\ du = -2dx,\ v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left((\pi - 2x)\sin nx\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\sin nx dx\right) = -\frac{4}{\pi n^3}\cos nx\Bigg|_0^{\pi} = 4\frac{1-(-1)^n}{\pi n^3}$$

и ряд принимает вид:

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

При $x=\frac{\pi}{2}$ получим

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{\pi^2}{4}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Тогда сумма заданного ЧР $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}$. ◄

Аудиторные задачи

*I*. Разложить в ряд Фурье функции $f(x)$ с периодом $T=2l$:

55.3.4.

5.3.3.

5.3.5.

*II*. Доопределяя заданную на $(0,\ l)$ функцию $f(x)$, получить для неё ряд Фурье:

5.3.6.

по косинусам.

5.3.7.

по синусам.

5.3.8.

Задание на дом

5.3.9.

5.3.10.

## Восьмое практическое занятие

### *Дифференциальные уравнения первого порядка*

### *Диф. уравнения с разделяющимися переменными*

Пример 1. Решить уравнение $y' = x\left(y^2+1\right)$.

Решение: $\dfrac{dy}{y^2+1} = x\,dx \quad \Rightarrow \operatorname{arg\,tg} y = \dfrac{x^2}{2} + C$.

Пример 2. Решить уравнение $y' - xy^2 = 2xy$.

Решение:

$$y' = xy(2+y)$$

$$\frac{dy}{dx} = xy(2+y)$$

$$\frac{dy}{y(2+y)} = xdx$$

$$\int \frac{dy}{y(2+y)} = \int xdx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y+2} = \frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|2+y| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{2+y}\right|$$

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{2+y}\right| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $y - y' = y^2 + xy'$
2. $x\dfrac{dx}{dt} + t = 1$

Пример 3. Решить уравнение $xydx+(x+1)dy=0$.

Решение:

$$\frac{x\,dx}{x+1}+\frac{dy}{y}=0$$

$$\int\frac{x\,dx}{x+1}+\int\frac{dy}{y}=\ln C$$

$$\int dx-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dy}{y}=\ln C \quad .$$

$$x-\ln|x+1|+\ln|y|=\ln C$$

$$\ln|y|=\ln|x+1|-\ln e^{x}+\ln C$$

$$y=C(x+1)e^{-x}$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $\sqrt{y^2+1}dx=xydy$
2. $\left(xy-xy^3\right)dx+dy=0$

Пример 4. Решить уравнение $y'=\cos(y-x)$.

Решение:

$$z=y-x \quad \Rightarrow z'=y'-1 \quad \Rightarrow y'=z'+1$$

$$z'+1=\cos z$$

$$\frac{dz}{dx}=\cos z-1$$

$$\int\frac{dz}{\cos z-1}=\int dx+C$$

$$\int\frac{dz}{\cos z-1}=-\int\frac{dz}{2\sin^2\frac{z}{2}}=-\int\frac{d\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^2\frac{z}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{z}{2}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{z}{2}=x+C \quad .$$

$$z=y-x\Rightarrow\operatorname{ctg}\frac{y-x}{2}=x+C$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $(x+y)^2 + y' = 1$

Пример 5. При начальных условиях $y(0)=1$решить задач Коши для дифференциального уравнения $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$.

Решение:

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = \frac{2xdx}{1-x^2} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{2xdx}{1-x^2} \Rightarrow -\frac{1}{y} = -\ln\left|1-x^2\right| - \ln C \quad .$$

$$1 = y\ln\left|C(1-x^2)\right|$$

Подставляя в общее решение $x_0 = 0\ y_0 = 1$

$$1 = y\ln\left|C(1-0^2)\right| \Rightarrow 1 = \ln C$$

$$C = e$$

$$1 = y\ln\left|e(1-x^2)\right|$$

$$y = 1 + \ln\left|1-x^2\right|$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $y'\mathrm{ctg}x + y = 2; \quad y(0) = -1$
2. $y'x + y = y^2; \quad y(1) = 0{,}5$

## Девятое практическое занятие

### *Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним*

Пример 1. Проверить, что функция $f(x,y) = \dfrac{x^4 \ln \frac{x}{y}}{x + y\,\mathrm{argtg}\frac{y}{x}}$ является однородной функцией и определить ее измерение.

Решение:

$$f(xt,yt) = \frac{(xt)^4 \ln \frac{xt}{yt}}{xt + yt\,\mathrm{argtg}\frac{yt}{xt}} = \frac{t^4 x^4 \ln \frac{x}{y}}{t\left(x + y\,\mathrm{argtg}\frac{y}{x}\right)} = t^3 \frac{x^4 \ln \frac{x}{y}}{x + y\,\mathrm{argtg}\frac{y}{x}} = t^3 f(x,y)$$

Пример 2. Найти решение уравнение $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

Решение: Решением это уравнение, относительно $y'$

$$y' = \frac{y^2}{x(y-x)}.$$

Т.к. $f(x,y) = \frac{y^2}{x(y-x)}$, стоящая в правой части этого уравнения, является однородной функцией нулевого измерения, поскольку $f(xt,yt) = f(x,y)$, то уравнение является однородным. Сделаем замену $y = ux$, $y' = u'x + u$

$$u'x + u = \frac{u^2 x^2}{x(ux - x)}$$

$$u'x = \frac{u^2}{u-1} - u$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1}$$

$$\int \frac{u-1}{u} du = \int \frac{dx}{x} - \ln C$$

$$\int du - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} - \ln C$$

$$u - \ln|u| = \ln|x| - \ln C$$

$$ux = Ce^u$$

$$y = Ce^{\frac{y}{x}}$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $xy' - y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$;

2. $y'x - y = (y+x)\ln\frac{x+y}{x}$

Пример 3. Найти решение уравнение $(x+2y)dx - xdy = 0$.

Решение: Сделаем замену $y = ux$, $dy = udx + xdu$

$$(x+2ux)dx - x(udx + xdu)$$
$$x((1+u)dx - xdu) = 0$$
$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad (1+u)dx - xdu = 0$$

Разделяя в последнем уравнении переменные и интегрируя, найдем его решение

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{1+u} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u} + \ln C$$
$$\ln|x| = \ln|1+u| + \ln C$$
$$x = C(1+u)$$
$$x = C\left(1+\frac{y}{x}\right)$$
$$x^2 = C(x+y)$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$
2. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$

## Десятое практическое занятие

### *Метод Лагранжа (вариации)*

Пример 1. Решить уравнение $xy' - 2y = 2x^4$.

Решение: $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^3$.Запишем ЛОУ $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} + \ln C$$
$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C$$
$$y = Cx^2$$

Затем общее решение ЛНУ будем искать в виде $y = C(x)x^2$.

$$\frac{d(C(x))}{dx}x^2+2xC(x)-\frac{2}{x}C(x)x^2=2x^3$$
$$\frac{d(C(x))}{dx}=2x$$
$$C(x)=2\int xdx+C=x^2+C$$
$$y=\left(x^2+C\right)x^2$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $2x\left(x^2+y\right)dx=dy$
2. $y'+ytgx=\dfrac{1}{\cos x}$
3. $x^2y'+xy+1=0$

***Метод Бернулли***

Пример 2. Решить уравнение $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$.

Решение: $y'+\dfrac{(x+1)}{x}y=3xe^{-x}$.

$$y=uv$$

$$v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}+\frac{x+1}{x}uv=3xe^{-x}$$
$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}+\frac{x+1}{x}v\right)=3xe^{-x}$$
$$\frac{dv}{dx}+\frac{x+1}{x}v=0$$
$$\frac{dv}{dx}=-\frac{x+1}{x}v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v}=-\frac{x+1}{x}dx$$
$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{x+1}{x}dx$$
$$\ln|v|=-x-\ln|x| \quad \Rightarrow \quad v=\frac{e^{-x}}{x}$$

$$\frac{e^{-x}}{x}\frac{du}{dx}=3xe^{-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=3x^2$$
$$u=3\int x^2dx+C=x^3+C$$

$$y = uv = \frac{x^3 + C}{xe^x}$$

$$y = \left(x^2 + C\right)x^2$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $y \sin x + y' \cos x = 1$

### Уравнения Бернулли

Пример 3. Решить уравнение $y' + xy = x^3 y^3$.

Решение: $y' + xy = x^3 y^3 \quad \Big| : y^3$

$$y' y^{-3} + x y^{-2} = x^3$$

$$z = y^{-2} \quad \Rightarrow \quad z' = -2y^{-3} y'$$

$$z' - 2xz = -2x^3$$

$$z' - 2xz = 0 \ \Rightarrow \ \frac{dz}{z} = 2x dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln|z| = x^2 + \ln C \Rightarrow \quad z = Ce^{x^2}$$

$$z = C(x) e^{x^2}$$

$$z' = C' e^{x^2} + 2xCe^{x^2} \quad \Rightarrow$$

$$C'(x) e^{x^2} = -2x^3$$

$$dC = -2x^3 e^{-x^2} dx \quad \Rightarrow \quad C(x) = -\int 2x^3 e^{-x^2} dx + C$$

$$C(x) = \left(x^2 + 1\right)e^{-x^2} + C$$

$$z = \left(x^2 + 1\right) + Ce^{x^2} \ \Rightarrow \ \frac{1}{y^2} = 1 + x^2 + Ce^{x^2}$$

### Одиннадцатое практическое занятие

### *Уравнения в полных дифференциалах*

Пример 1. Решить уравнение $\left(1 + y^2 \sin 2x\right)dx - 2\cos^2 x dy = 0$ .

Решение:

$$M(x,y)=1+y^2\sin 2x;\ N(x,y)=-2y\cos^2 x$$
$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y\sin 2x;\ \frac{\partial N}{\partial x}=-2y(-2\cos x\sin x)=2y\sin 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1+y^2\sin 2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y\cos^2 x$$
$$u(x,y)=\int\left(1+y^2\sin 2x\right)dx+C(y)x=x-\frac{1}{2}y^2\cos 2x+C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-y\cos 2x+\frac{d(C(y))}{dy}=-2y\cos^2 x$$
$$\frac{d(C(y))}{dy}=y\left(\cos 2x-2\cos^2 x\right)=y\left(\cos^2 x-\sin^2 x-2\cos^2 x\right)=-y$$
$$C(y)=-\int ydy+C=-\frac{y^2}{2}+C$$
$$u(x,y)=x-\frac{1}{2}y^2\cos 2x-\frac{y^2}{2}+C=x-\frac{y^2}{2}(1+\cos 2x)+C=x-y^2\cos^2 x+C$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $xy^2y'=x^2+y^3$
2. $\left(2x^2y\ln y-x\right)y'=y$
3. $e^y dx-\left(2y+xe^y\right)dy=0$
4. $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}dx=\dfrac{2x^3+5y}{y^3}dy$
5. $(\cos x-x\sin x)ydx+(x\cos x-2y)dy=0$