МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»
(КНИТУ-КАИ)
Чистопольский филиал «Восток»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

по дисциплине

«Теория вероятностей и математическая статистика»

Индекс по учебному плану: **Б1.О.07.03**
Направление подготовки: 09.03.01 Информатика и вычислительная техника
Квалификация: **Бакалавр**

Профиль подготовки: Автоматизированные системы обработки информации и управления

Типы задач профессиональной деятельности: **проектная, производственно-технологическая**

Рекомендованы УМК ЧФ КНИТУ-КАИ

Чистополь
2023 г.

ПРЕДМЕТ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Теория вероятностей – это математическая дисциплина, изучающая закономерности массовых случайных явлений.

Теория вероятностей не может предсказать результат отдельного опыта со случайными исходами, но она достаточно надежно предсказывает результат большого числа таких опытов.

Основными объектами изучения в теории вероятностей являются случайные события и случайные величины.

Случайное событие – это качественное понятие. Событие либо происходит, либо не происходит. *Случайная величина* – понятие количественное: в результате опыта случайная величина принимает одно из множества своих возможных значений.

Не все случайные явления (эксперименты) можно изучать методами теории вероятностей, а лишь те, которые могут быть воспроизведены в одних и тех же условиях. Случайность и хаос – не одно и то же. Оказывается, что и в случайных экспериментах наблюдаются некоторые закономерности, например, *свойство статистической устойчивости*: доля экспериментов, в которых рассматриваемое событие произошло, имеет тенденцию стабилизироваться с ростом общего числа экспериментов, приближаясь к некоторому числу. Это число служит объективной характеристикой *степени возможности* событию произойти.

Математической статистикой называется раздел прикладной математики, изучающий методы сбора, обработки и анализа статистических данных для научных и практических целей. Математическая статистика занимается изучением закономерностей, которым подчиняются массовые явления, на основе результатов наблюдений.

Предметом исследования в математической статистике является совокупность объектов, *однородных* относительно некоторых признаков, например, мальчики 12 лет г.Томска; бегуны – мастера спорта России.

Приведем примеры применения теории вероятностей и математической статистики [1].

Пример 1.1. Из разговора заводских менеджеров: «мастерская дает двадцать три процента брака». Одна единица продукции не может быть дефектна на 23%. Она может быть либо годной, либо дефектной. Видимо, имеется в виду, что в партии большого объема содержится примерно 23% дефектных единиц продукции. Тогда возникает вопрос, а что значит «примерно»? Если из 100 проверенных единиц продукции 30 окажутся дефектными, или из 1000 – 300, или из 100000 – 30000 и т.д., то как оценить это «примерно»?

Пример 1.2. *Контроль качества любой продукции*. Чтобы решить, соответствует или не соответствует контролируемая партия продукции установленным требованиям, из нее отбирается выборка. По результатам контроля выборки делается заключение о всей партии. В этом случае очень важно избежать субъективизма при формировании выборки, т.е. необходимо, чтобы каждая единица продукции в контролируемой партии имела одинаковую вероятность быть отобранной в выборку. В производственных условиях отбор единиц продукции в выборку обычно осуществляют не с помощью жребия, а по специальным таблицам случайных чисел или с помощью компьютерных датчиков случайных чисел.

Похожие проблемы обеспечения объективности сравнения возникают при сопоставлении различных схем организации производства, оплаты труда, при проведении тендеров и конкурсов, подбора кандидатов на вакантные должности и т.п. Всюду нужна жеребьевка или подобные ей процедуры.

Пример 1.3. *При любом измерении единиц продукции* (с помощью штангенциркуля, микрометра, амперметра и т.п.) имеются погрешности. Чтобы выяснить, есть ли систематические погрешности, необходимо сделать многократные измерения единицы продукции, характеристики которой известны (например, стандартного образца). При этом следует помнить, что кроме систематической погрешности присутствует и случайная погрешность.

Поэтому встает вопрос, как по результатам измерений узнать, есть ли систематическая погрешность. Если отмечать только, является ли полученная при очередном измерении погрешность положительной или отрицательной, то, сопоставив измерение с бросанием монеты (положительную погрешность – с выпадением герба, отрицательную – решетки (нулевая погрешность при достаточном числе делений шкалы практически никогда не встречается)), сведем задачу проверки отсутствия систематической погрешности к проверке симметричности монеты.

Пример 1.4. При статистическом регулировании технологических процессов на основе методов математической статистики разрабатываются правила и планы статистического контроля процессов, направленные на своевременное обнаружение разладки технологических процессов и принятия мер к их наладке и предотвращению выпуска продукции, не соответствующей установленным требованиям. Эти меры нацелены на сокращение издержек производства и потерь от поставки некачественных единиц продукции. При статистическом приемочном контроле на основе методов математической статистики разрабатываются планы контроля качества путем анализа выборок из партий продукции. Сложность заключается в том, чтобы уметь правильно строить вероятностно-статистические модели принятия решений. В математической статистике для этого разработаны вероятностные модели и методы проверки гипотез, в частности, гипотез о том, что доля дефектных единиц продукции равна определенному числу p_0, например, $p_0 = 0.23$ (см. пример 1.1).

1 СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

2.1. ИСПЫТАНИЯ И СОБЫТИЯ

Случайным событием (или просто *событием)* называется любой факт, который может иметь место при наличии определенной совокупности условий.

Каждое осуществление требуемой совокупности условий называется *испытанием* или *опытом.*

События, которые могут произойти в результате испытания, называются *исходами* данного испытания. События принято обозначать заглавными (прописными) буквами начала латинского алфавита: *A, B, C* и т.д. Словесное описание события часто дается в такой форме:

A = {выпадение "орла" при бросании монеты}.

2.2. ВИДЫ СОБЫТИЙ

В теории вероятностей различают виды событий.

Достоверное событие. Так называют событие, которое обязательно происходит в результате испытания.

Невозможное событие – событие, которое не может произойти в данном испытании.

Совместные и несовместные события. Два события называются несовместными, если они не могут произойти вместе в одном испытании, в противном случае их называют совместными. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$, называют *попарно несовместными,* если никакие два из них не могут произойти вместе в одном испытании.

Противоположным событию A называется событие $\bar{A}$, состоящее в непоявлении события A. Очевидно, что события A и $\bar{A}$ являются несовместными.

Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в некотором испытании образуют *полную группу,* если в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

Условимся полную группу несовместных исходов называть **пространством элементарных событий**.

Пример 2.1. Достоверным является событие A = {извлечение белого шара из урны, где все шары белые}.

Невозможным является событие B = {извлечение белого шара из урны, где все шары черные}.

Практически невозможное событие: *C1*={найти иголку в стоге сена};
C2=={вытащить белый шар из урны, где 1000 шаров черные, а 1 – белый}

Практически достоверное событие: *D*={вытащить белый шар из урны, где 999 шаров белые, а 1 – черный};

Пример 2.2. Испытание состоит в бросании игральной кости. Рассматриваем события:

A = {выпадение двух очков};

B = {выпадение трех очков};

С = {выпадение четного числа очков}.

События A и B, а также B и C являются несовместными. События A и С – совместные. Попарно несовместными события *A, B, C не* являются.

Пример 2.3. Производится бросание игральной кости.

A = {выпадение шести очков};

$\bar{A}$ = {выпадение любого числа очков, кроме шести}.

Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в некотором испытании образуют *полную группу,* если в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

Пример 2.4. Производится бросание монеты. Полную группу образуют события A = {выпадение "орла"}, B = {выпадение "решки"}.

2.3. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Исходы испытания называют *равновозможными,* если нет объективных причин считать, что какие–либо из них могут происходить чаще, чем другие.

Событие B называется *благоприятствующим событию A,* если появление события B означает одновременно появление события A.

Пример 2.5. Событие B={выпадение двух очков на игральной кости} благоприятствует событию A={выпадение четного числа очков}.

Определение (классическое). Вероятностью события A в данном опыте называется отношение числа m исходов опыта, благоприятствующих событию A, к общему числу n исходов опыта, образующих *полную группу попарно несовместных равновозможных событий*:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Пример 2.6. Опыт – бросание игральной кости. Событие –A={выпадение четного числа очков}. Исходы опыта – выпадение того или иного числа очков. Очевидно, что шесть возможных исходов опыта образуют полную группу попарно несовместных равновозможных событий (n=6) Благоприятствуют событию A три исхода: выпадение 2–х, 3–х и 6–и очков (m=3). Следовательно, $P(A)= m/n =3/6= 1/2$.

Из классического определения вероятности следует, что $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$, причем вероятность *невозможного события* равна нулю (*практически невозможного события* близка к нулю), а вероятность достоверного – единице (*практически достоверного события* близка к единице).

2.4. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика – это раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов конечного множества в соответствии с заданными правилами. В теории вероятностей формулы комбинаторики широко используются для подсчета числа исходов опыта.

Основной принцип комбинаторики. Пусть требуется выполнить одно за другим k действий, причем первое действие можно выполнить n_1, способами, второе – n_2 способами и т.д., тогда все k действий можно выполнить следующим числом способов:

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Все приводимые ниже формулы комбинаторики выводятся как следствия из этого основного правила.

Сочетания. Пусть Ω – множество из n элементов. Произвольное (*неупорядоченное*) m–элементное подмножество множества из n элементов называется *сочетанием из n элементов по m.* Сочетаниями из трёх элементов по два являются следующие неупорядоченные подмножества множества $\{a, b, c\}$: $\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$.

Число сочетаний из n элементов по m

$$C_n^m == \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Определение 2.1. Множество называется *упорядоченным,* если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n (n – число элементов множества) так, что различным элементам соответствуют различные числа.

Перестановки. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов (т. е. могут быть получены из того же самого множества), называются *перестановками* этого множества. Например, перестановками множества {*a, b, c*} являются упорядоченные множества (*a, b,* с), (*a, c, b*), (*b, a, c*), (*b, c, a*), (*c, a, b*), (*c, b, a*).

Число перестановок из *n* элементов

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)\ n = n!$$

Размещения. *Упорядоченное m*–элементное подмножество множества из *n* элементов называется размещением из *n* элементов по *m.* Например, размещениями из трёх элементов по два являются следующие упорядоченные подмножества множества (*a, b, c*): (*a, b*), (*b, a*), (*a, c*), (*c, a*), (*b, c*), (*c, b*).

Число размещений из *n* элементов по *m*

$$A_n^m == \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример 2.7. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набран правильный номер.

Решение. Воспользуемся классическим определением вероятности. Общее число исходов испытания (выбор в определенном порядке двух цифр из десяти) равно числу вариантов извлечения двух элементов из десяти с учетом порядка следования их, т.е. числу размещений из десяти элементов по два:

$$n == A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 9 \cdot 10 = 90.$$

Благоприятный исход испытания только один, *m*=1. Следовательно, искомая вероятность равна *p*=1|90.

Пример 2.8. В партии из десяти деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу изделий 4 стандартных.

Решение. Общее число исходов испытания равно числу вариантов извлечения шести деталей из десяти без учета порядка извлечения, т.е. равно числу сочетаний из десяти элементов по шесть:

$$n == C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 3 \cdot 10 = 210.$$

Число благоприятных исходов согласно основному правилу комбинаторики равно произведению числа вариантов извлечения четырех деталей из семи стандартных на число вариантов извлечения двух деталей из трех нестандартных:

$$m = C_7^4 \cdot C_3^2 = \frac{7!}{4!\ \cdot\ 3!} \cdot \frac{3!}{2!\ \cdot\ 1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2} = 105.$$

Искомая вероятность равна *p*= 105/210= 1/2.

2.5. ПРОИЗВЕДЕНИЕ И СУММА СОБЫТИЙ

Произведением двух событий A я B называется событие *AB,* состоящее в том, что происходит каждое из этих событий.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в появлении всех этих событий.

Суммой двух событий A и B называется событие $A+B$, состоящее в том, что происходит хотя бы одно из этих событий.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Пример 2.9. Из урны, содержащей не менее двух белых и двух черных шаров, последовательно извлекаются два шара.

A = {белый шар при первом извлечении};

B = {белый шар при втором извлечении};

AB = {белые шары при первом и втором извлечениях};

$A+B$ = {первый шар – белый, второй – черный, или первый шар – черный, второй – белый, или первый и второй шары – белые}.

2.6. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБЫТИЙ

Определение 2.2. Вероятность события A, вычисленная при условии, что произошло событие B, называется *условной вероятностью события A при наличии события B* и обозначается $P(A|B)$.

Пример 2.10. Опыт: подбрасывание двух монет. События:

A = {выпадение «орла» на обеих монетах};

B = {выпадение «орла» на одной из монет}.

Найти вероятность $P(A)$. Общее число возможных исходов опыта n=4 (оо, ор, рр, ро), благоприятствующий исход один (оо), следовательно, $P(A)$=1/4.

Найти теперь условную вероятность $P(A|B)$. Поскольку известно, что произошло событие B, число возможных исходов испытания n–1 (оо, ор, ро), благоприятствующий исход по–прежнему один, следовательно, $P(A|B)$=1/3.

Теорема. Вероятность произведения двух событий A и B, равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого при наличии первого:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \text{ или } P(AB) = P(B)P(A|B). \qquad (2.1)$$

Эта теорема обобщается на любое конечное число событий следующим образом:

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2 \mid A_1)\cdot P(A_3 \mid A_1A_2)\cdot ...\cdot \\ = \cdot P(A_n \mid A_1A_2...A_{n-1}). \qquad (2.2)$$

Определение 2.3. Два события называются независимыми, если появление любого из них не изменяет вероятности другого, т.е. события A и B независимы, если $P(A|B)=P(A)$.

Из формул (2.1) следует, что если выполняется равенство $P(A|B)=P(A)$,.то выполняется и равенство $P(B\backslash A)=P(B)$.

Определение 2.4. Несколько событий, A_1, A_2, …, A_n, называются независимыми в совокупности (или просто независимыми), если появление любых из них не изменяет вероятностей остальных. Для независимых событий формула (2.2) принимает вид:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2\cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Пример 2.11. Из урны, содержащей 3 белых и 7 черных шаров, наудачу извлекают два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Считаем, что шары извлекаются поочередно. Пусть

A = {первый шар – белый}, B = {второй шар – белый}, тогда AB – {оба шара – белые}.

По теореме умножения вероятностей $P(AB)=P(A)P(B|A)$. Согласно классическому определению вероятности $P(A)=3/10$, $P(B|A)=2/9$. Следовательно, $P(AB)= (3/10)\cdot(2/9)$.

Пример 2.12. Два стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность поражения мишени первым стрелком равна 0.6, вторым – 0.8. Найти вероятность того, что в мишени будет две пробоины.

Решение. Введем в рассмотрение события, вероятности которых известны:

A = {поражение мишени первым стрелком},

B – {поражение мишени вторым стрелком}.

Интересующее нас событие выразим через эти события. Для того, чтобы имело место событие С={две пробоины в мишени}, надо, чтобы произошли вместе события A и B, т.е. $C=AB$.

Естественно считать события A и B независимыми, поэтому

$$P(C)=P(A)\cdot P(B)=0.6\cdot 0.8.$$

2.7. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ СОБЫТИЙ

Теорема 2.1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

Теорема 2.2. Для любого события A вероятность противоположного события A выражается равенством

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Теорема 2.3. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A)+ P(B) - P(AB).$$

Теорема сложения обобщается на любое конечное число событий следующим образом:

$$\begin{aligned} &P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - \\ &-P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - \ldots - P(A_{n-1}A_n) + P(A_1A_2A_3) + \ldots + \\ &+P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) - \ldots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n). \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *попарно несовместные*, то формула (2.3) принимает вид:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Замечание. При решении задач с использованием формулы (2.3) приходится производить громоздкие вычисления, поэтому часто выгоднее перейти к противоположным событиям, т.е. вместо вероятности суммы событий $A_1+A_2+\ldots+A_n$ находить вероятность произведения противоположного события $\overline{A_1}.\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}$. Очевидно, что эти два события противоположны, поэтому

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}.\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}) \qquad (2.4)$$

Пример 2.13. В условиях примера 2 предыдущего пункта найти вероятность появления *хотя бы одной* пробоины.

Решение. Данное событие есть сумма событий A и B, причем эти события совместные, поэтому вероятность интересующего нас события равна $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Ранее было найдено, что $P(AB)$=0.48, следовательно, $P(A + B)$ = 0.6 + 0.8 – 0.48 = 0.92.

Пример 2.14. Устройство содержит четыре независимо работающих элемента и сохраняет работоспособность, если работает хотя бы один из элементов. Вероятности безотказной работы элементов в течение определенного срока соответственно равны 0.9, 0.8, 0.7 и 0.6. Найти вероятность безотказной работы устройства.

Решение. Пусть события A_1 A_2, A_3 и A_4 означают безотказную работу соответственно первого, второго, третьего и четвертого элементов. Событие A={безотказная работа устройства} есть сумма событий: $A=A_1+A_2+A_3+A_4$. События A_1 A_2, A_3 и A_4 совместные, поэтому вероятность $P(A)$ надо вычислять по формуле (2.3). Чтобы упростить вычисления, воспользуемся формулой (2.4):

$$P(A_1) = P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}.\overline{A_2}...\overline{A_n}).$$

Так как события A_1 A_2, A_3 и A_4 независимые, то противоположные события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_4}$ также независимы, поэтому

$$P\left(\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}, \overline{A_4}\right) = P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)P\left(\overline{A_4}\right) =$$
$$= \left(1 - P\left(A_1\right)\right)\left(1 - P\left(A_2\right)\right)\left(1 - P\left(A_3\right)\right)\left(1 - P\left(A_4\right)\right) =$$
$$= (1 - 0.9)(1 - 0.8)(1 - 0.7)(1 - 0.6) = 0.0024; \text{ и}$$
$$P(A) = 1 - 0.0024 = 0.9976.$$

Пример 2.15. Производится три независимых выстрела по мишени. Вероятности попадания в мишень при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0.2, 0.5, 0.4. Найти вероятность того, что будет *ровно* два попадания в мишень.

Решение. Событие A={*ровно два* попадания в мишень} выражается через события A_1={попадание при первом выстреле}, A_2={попадание при втором выстреле), A_3={попадание при третьем выстреле} следующим образом:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Отсюда, учитывая несовместность суммируемых произведений событий и независимость событий A_1, A_2, A_3, находим

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) + P(A_1) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P(A_3) +$$
$$+ P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.26$$

Пример 2.16. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом: в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, во второй 10 белых, 8 черных и 6 красных. Из обеих урн наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что оба шара одного цвета.

Решение. Введем в рассмотрение следующие события:

B_1={извлечение белого шара из первой урны},

B_2={извлечение белого шара из второй урны},

C_1={извлечение черного шара из первой урны},

C_2={извлечение черного шара из второй урны},

D_1={извлечение красного шара из первой урны},

D_2={извлечение красного шара из второй урны}.

Выразим событие A= {извлечение шаров одного цвета} через эти события:

$$A= B_1 B_2+ C_1 C_2+ D_1 D_2$$

Следовательно,

$$P(A) = P(B_1)P(B_2) + P(C_1)P(C_2) + P(D_1)P(D_2).$$

Вероятности событий B, C, D найдем из классического определения: $P(B_1)$=5/24, $P(B_2)$=10/24, $P(C_1)$=11/24, $P(C_2)$=8/24, $P(D_1)$=8/24, $P(D_2)$=6/24.

Таким образом, получаем

$$P(A)=\frac{5}{24}\cdot\frac{10}{24}+\frac{11}{24}\cdot\frac{8}{24}+\frac{8}{24}\cdot\frac{6}{24}=\frac{186}{576}=0.323$$

2.8. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть A – некоторое событие, которое может появиться совместно с одним из ряда попарно несовместных событий H_1, H_2,…,H_n образующих *полную группу* ($P(H_i)\neq 0$). Будем называть события H *гипотезами.*

Теорема 2.4. Вероятность события A, которое может произойти вместе с одной из гипотез H_1, H_2,…,H_n, равна сумме парных произведений вероятностей этих гипотез на соответствующие им условные вероятности события A:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности.*

Пример 2.17. Первый станок производит 25%, второй – 35%, третий – 40% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 5%, 4% и 2%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие окажется бракованным.

Решение. Введем гипотезы:

H_1={взятое изделие изготовлено на первом станке},

H_2={взятое изделие изготовлено на втором станке},

H_3={взятое изделие изготовлено на третьем станке}.

События H_1, H_2 и H_3 несовместные, образуют полную группу, и событие A ={взятое изделие – брак} происходит вместе с одним из них, следовательно, они действительно могут быть взяты в качестве гипотез для события A. Согласно формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3).$$

По условию задачи

$$P(H_1)= 0.25,\ P(H_2)=0.35,\ P(H_3)=0.40,\ P(A/H_1)=0.05,$$

$$P(A/H_2)=0.04,\ P(A/H_3)=0.02,$$

следовательно, $P(A) = 0.25 \bullet 0.05 + 0.35 \bullet 0.04 + 0.40 \bullet 0.02 = 0.0345$.

Замечание. Вероятности $P(H_i)$ характеризуют возможность осуществления некоторых условий H_i, а $P(A/H_i)$ возможность появления *A* при этих условиях.

2.9. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть событие *A* может произойти совместно с одной из гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Если до проведения опыта были известны вероятности гипотез $P(H_i)$, а в результате опыта произошло событие *A,* то условные вероятности гипотез $P(A/H_i)$ вычисляются по формуле Байеса:

$$P(H_i/A)=\frac{P(A/H_i)P(H_i)}{P(A)}=\frac{P(A/H_i)P(H_i)}{\sum\limits_j P(A/H_j)P(H_j)}$$

Пример 2.18. Первый станок производит 20%, а второй 80% всех деталей. Брак в их производстве составляет соответственно 4% и 2%. Взятая наугад деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на первом станке.

Решение. Введем две гипотезы для события *A*={взятая деталь оказалась бракованной}:

H_1={взятая деталь изготовлена на первом станке},

H_2={взятая деталь изготовлена на втором станке}.

Из условия задачи известно: $P(H_1)$= 0.2, $P(H_2)$=0.8, $P(A/H_1)$=0.04, $P(A/H_2)$=0.02.. По формуле Байеса находим

$$P(H_1/A)=\frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(A)}=\frac{P(A/H_1)P(H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)}=$$

$$=\frac{0.2\cdot 0.04}{0.2\cdot 0.04+0.8\cdot 0.02}=\frac{1}{3}=0.333.$$

Замечание. Формула Байеса указывает путь использования новых экспериментальных данных для коррекции *априорных* (доопытных) вероятностных представлений об исследуемом объекте.

2.10. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИСПЫТАНИЙ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Пусть производится ряд испытаний, в каждом из которых с определенной вероятностью *p* может произойти событие *A*. Если вероятность события *A* в каждом испытании не зависит от исходов предыдущих испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события A*. Если при этом вероятность события *A* в каждом испытании одна и та же, то последовательность испытаний называют *схемой Бернулли.* Вероятность того, что в *n* испытаниях по схеме Бернулли событие *A* произойдет *m* раз в любой последовательности, вычисляется по *формуле Бернулли:*

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\quad m=0,1,\ldots,n,$$

где $C_n^m == \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad q = 1 - p.$

Значение $m = m_0$ появлений события A в n испытаниях, при котором вероятность $P_n(m)$ принимает наибольшее значение, называется *наивероятнейшим числом успехов* и определяется из неравенств:

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Разность граничных значений в этом двойном неравенстве равна 1. Если $np + p$ не является целым числом, то наивероятнейшее число одно и равно m_0. Если $np + p$ – целое число, то имеется два наивероятнейших числа m_0: $np - q$ и $np + p$.

Пример 2.19. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.6. Найти вероятность двух попаданий при трех выстрелах.

Решение. Имеем дело с тремя независимыми испытаниями, в каждом из которых с вероятностью p=0.6 может произойти событие A={попадание в цель}. Вероятность двух попаданий (в любой последовательности) при трех выстрелах находим по формуле Бернулли:

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4 = 0.432.$$

Пример 2.20. Испытывается 15 одинаковых изделий. Вероятность того, что изделие выдержит испытание, равна 0.9. Найти наивероятнейшее число изделий, выдержавших испытание.

Решение. По условию имеем: $n = 15, \ p = 0.9, \ q = 0.1.$ Подставим эти данные в неравенства для m_0:

$15 \cdot 0.9 - 0.1 \le m_0 < 15 \cdot 0.9 + 0.9 \Rightarrow 13.4 < m_0 < 14.4.$

Отсюда следует, что m_0=14.

2.11. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

Если число испытаний n велико, то вычисления по формуле Бернулли становятся затруднительными. В то же время большие значения n позволяют заменять эту формулу приближенными асимптотическими формулами. Рассмотрим три такие формулы.

Теорема 2.5. (*формула Пуассона*) Если $n \to \infty, \ p \to 0$ так, что $np \to \lambda$, то

$$P_n(m) \cong P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}. \qquad (2.5)$$

Формула (2.5) дает хорошие результаты, если npq<9. Если же npq>9, то для вычисления вероятности $P_n(m)$ можно воспользоваться локальной теоремой Лапласа.

Теорема 2.6. (*локальная теорема Муавра–Лапласа*). Вероятность появления события m раз в n независимых испытаниях при больших значениях n приближенно определяется по формуле

$$P_n(m) \cong \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad (2.6)$$

где $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}, \quad x=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}.$

Теорема 2.7. (*интегральная теорема Муавра–Лапласа*). Вероятность того, что число появлений события в n независимых испытаниях находится в пределах $m_1 \le m \le m_2$ и при больших значениях n приближенно определяется по формуле

$$P_n(m_1,m_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1), \tag{2.7}$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt,\ \ x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}},\ \ x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\Phi(x)$ называется *функцией Лапласа*. Для функций $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ имеются таблицы ее значений. Функция $\varphi(x)$ является четной, а функция $\Phi(x)$ – нечетной, т.е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$; $\Phi(-x)=-\Phi(x)$;

Из интегральной теоремы Лапласа можно вывести формулу для вероятности отклонения относительной частоты m/n события в серии испытаний от постоянной вероятности p этого события в одном испытании:

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}=2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right). \tag{2.8}$$

Пример 2.21. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0.002. Найти вероятность того, что в пути будут повреждены три изделия.

Решение. Можно считать, что имеем дело со схемой Бернулли, в которой испытания проводятся 500 раз. Так как число n=500 достаточно велико, а вероятность p=0.002 мала (причем $npq=500\cdot0.002\cdot0.998\approx2<9$), то воспользуемся приближенной формулой (2.5), где $\lambda=np=500\cdot0.002=1$:

$$P_{500}(3)\cong\frac{1^3}{3!}\cdot e^{-1}=0.0613.$$

Пример 2.22. Найти вероятность того, что событие происходит 80 раз в 400–х испытаниях, если вероятность этого события в каждом испытании равна 0.2.

Решение. Здесь n=400 достаточно велико, но величина npq также велика ($npq=400\cdot0.2\cdot0.8=64>9$), поэтому воспользуемся формулой (2.6). Вычисляем

$$x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-400\cdot0.2}{\sqrt{400\cdot0.2\cdot0.8}}=0.$$

По таблице функции $\varphi(x)$ находим $\varphi(0)=0.3989$. Окончательно получаем:

$$P_{400}(80)\cong\frac{\varphi(0)}{\sqrt{400\cdot0.2\cdot0.8}}=\frac{0.3989}{8}=0.0499.$$

Пример 2.23. Найти вероятность того, что в 400–х испытаниях событие произойдет не более 70–ти раз, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0.2.

Решение. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа для вычисления вероятности $P_{400}(0;\ 70)$:

$$x_1 = \frac{0-400\cdot 0.2}{\sqrt{400\cdot 0.2\cdot 0.8}} = -10, \quad x_2 = \frac{70-400\cdot 0.2}{\sqrt{400\cdot 0.2\cdot 0.8}} = -1.25,$$

$$P_{400}(0;\ 70) \cong \Phi(-1.25) - \Phi(-10) = \Phi(10) - \Phi(1.25) =$$
$$= 0.500 - 0.394 = 0.106.$$

Пример 2.24. Определим, сколько надо провести испытаний, чтобы с вероятностью 0.95 относительная частота выпадения «орла» отличалась от вероятности p=0.5 этого события не более чем на 5%.

Решение. Воспользуемся формулой (2.8). В нашем случае p=0.5, q=0.5, ε=0.5 0.05=0.025. По условию задачи

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = 0.95$$

или $\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n}/\sqrt{pq}\right) = 0.475.$ Пользуясь таблицей функции Лапласа, по значению функции находим значение аргумента:

$$\left(\varepsilon\sqrt{n}/\sqrt{pq}\right) = 1.96, \text{ т.е. } 0.025\cdot\sqrt{n}/\sqrt{0.5\cdot 0.5} = 1.96.$$

Отсюда находим, что n=1536.64. Таким образом, надо провести не менее чем 1537 испытаний.

2 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

3.1. ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Случайной величиной называется величина, которая в результате испытаний, проводимых в одних и тех же условиях, принимает различные, вообще говоря, значения, зависящие от не учитываемых случайных факторов. Примеры случайных величин: число выпавших очков на игральной кости, число дефектных изделий в партии, отклонение точки падения снаряда от цели, время безотказной работы устройства и т.п. Различают дискретные и непрерывные случайные величины. *Дискретной* называется случайная величина, возможные значения которой образуют счетное множество, конечное или бесконечное (т.е. такое множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Непрерывной называется случайная величина, возможные значения которой непрерывным образом заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал числовой оси. Число значений непрерывной случайной величины всегда бесконечно.

Случайные величины будем обозначать заглавными буквами конца латинского алфавита: X, Y, ...; значения случайной величины – строчными буквами: x, y, ... Таким образом, X обозначает всю совокупность возможных значений случайной величины, а x – некоторое ее конкретное значение.

3.2. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Законом распределения дискретной случайной величины называется задаваемое в любой форме соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Пусть возможными значениями случайной величины X являются $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$. В результате испытания случайная величина примет одно из этих значений, т.е. *произойдет одно событие из полной группы попарно несовместных событий.*

$$\{X = x_1\}, \{X = x_2\},\ \ldots, \{X = x_n\}.$$

Пусть также известны вероятности этих событий:

$$p_1 = P(X = x_1), p_2 = P(X = x_2),\ \ldots, p_n = P(X = x_n).$$

Закон распределения случайной величины X может быть записан в виде таблицы, которую называют *рядом распределения* дискретной случайной величины:

X	x_1	x_2	...	x_3
p	p_1	p_2	...	p_3

Для ряда распределения имеет место равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ (условие нормировки).

Пример 3.1. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений «орла» при двух бросаниях монеты.

Решение. Возможные значения случайной величины: $0,\ 1,\ 2$. Вероятности этих значений находим по формуле Бернулли:

$$p_0 = P(X = 0) = P_2(0) = C_2^0 p^0 q^2 = \frac{2!}{0! \cdot 2!} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^2 = 0.25;$$

$$p_1 = P(X = 1) = P_2(1) = C_2^1 p^1 q^1 = \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot 0.5^1 \cdot 0.5^1 = 0.50;$$

$$p_2 = P(X = 2) = P_2(2) = C_2^2 p^2 q^0 = \frac{2!}{2! \cdot 0!} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^0 = 0.25.$$

Записываем ряд распределения:

X	0	1	2
p	0.25	0.50	0.25

3.3. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Функция распределения является универсальной формой задания закона распределения как дискретных, так и непрерывных случайных величин.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, определенная на всей числовой оси следующим образом:

$$F(x) = P(X < x),$$

т.е. $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем x.

Функцию распределения можно представить графически. Для дискретной случайной величины график имеет ступенчатый вид. Построим, например, график функции распределения случайной величины, заданной следующим рядом (рис. 3.1):

X	0	1	2
p	0.3	0.5	0.2

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ 0.3, & 0<x\le 0;\\ 0.8, & 1<x\le 2;\\ 1, & x>2 \end{cases}$$

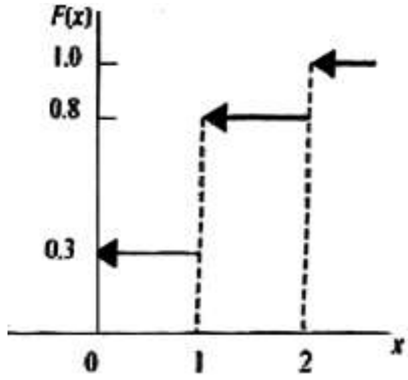


Рис. 3.1. График функции распределения дискретной случайной величины

Скачки функции происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, и равны вероятностям этих значений. В точках разрыва функция $F(x)$ непрерывна слева.

График функции распределения непрерывной случайной величины представляет собой непрерывную кривую.

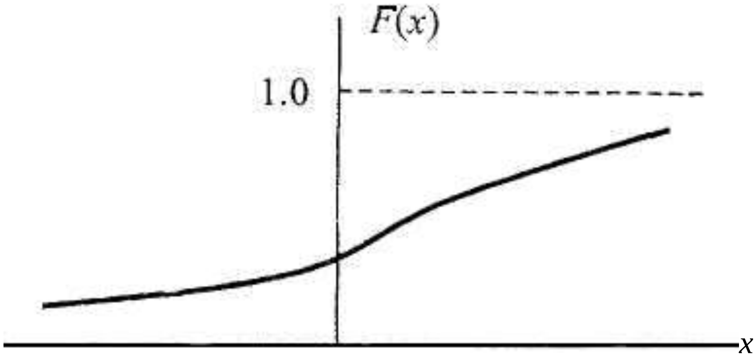


Рис. 3.2. График функции распределения непрерывной случайной величины

Функция распределения обладает следующими очевидными свойствами:

1) $0\le F(x)\le 1$, 2) $F(-\infty)=0$, 3) $F(+\infty)=1$,

4) $F(x_1)<F(x_2)$ при $x_1<x_2$.

3.4. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ НА ЗАДАННЫЙ ИНТЕРВАЛ

Будем называть событие, состоящее в том, что случайная величина X принимает значение x, принадлежащее некоторому полузамкнутому интервалу $\alpha\le x<\beta$, попаданием случайной величины на интервал $[\alpha, \beta)$.

Теорема 3.1. Вероятность попадания случайной величины на интервал $[\alpha, \beta)$ равна приращению функции распределения на этом интервале:

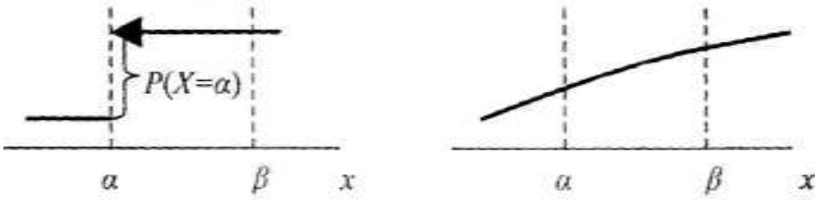
$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \qquad (3.1)$$

Если уменьшать интервал [α, β), полагая, что $\beta \to \alpha$, то в пределе формула (3.1) вместо вероятности попадания на интервал дает вероятность попадания в точку, т.е. вероятность того, что случайная величина примет значение α:

$$P(X = \alpha) = \lim_{\beta \to \alpha} P(\alpha \le X < \beta) = \lim_{\beta \to \alpha} \left[F(\beta) - F(\alpha) \right] \qquad (3.2)$$

Если функция распределения имеет разрыв в точке α, то предел (3.2) равен значению скачка функции $F(x)$ в точке $x=\alpha$, т.е. вероятности того, что случайная величина примет значение α (рис. 3.3, *а*). Если же случайная величина непрерывна, т.е. непрерывна функция $F(x)$, то предел (3.2) равен нулю (рис. 3.3, *б*)

Таким образом, вероятность любого конкретного значения непрерывной случайной величины равна нулю. Однако это не означает невозможности события $X=\alpha$, а лишь говорит о том, что относительная частота этого события будет стремиться к нулю при неограниченном увеличении числа испытаний.



а) *б*)

Рис. 3.3. Скачок функции распределения

3.5. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Для непрерывных случайных величин наряду с функцией распределения используется еще одна форма задания закона распределения – плотность распределения.

Если $\Delta F(x) = F(x + \Delta x) - F(x)$ – вероятность попадания на интервал $(x, x + \Delta x)$, то отношение $\Delta F(x) / \Delta x$ характеризует плотность, с которой вероятность распределена в окрестности точки x . Предел этого отношения при $\Delta x \to 0$,т.е. производная $dF(x)/dx$, называется *плотностью распределения* (плотностью распределения вероятностей, плотностью вероятности) случайной величины X. Условимся плотность распределения обозначить

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x).$$

Таким образом, плотность распределения характеризует вероятность попадания случайной величины в окрестность точки x.

График плотности распределения называют *кривой распределения* (Рис. 3.4).

Рис. 3.4. Вид плотности распределения

Исходя из определения и свойств функции распределения $F(x)$, нетрудно установить следующие свойства плотности распределения $f(x)$:

1) $f(x)\geq 0$

2) $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$

3) $F(\infty)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

4) $P(\alpha \leq X \leq \beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

Для непрерывной случайной величины в силу того, что вероятность попадания в точку равна нулю, имеют место следующие равенства:

$$P(\alpha \leq X < \beta)=P(\alpha < X \leq \beta)=P(\alpha \leq X \leq \beta)=P(\alpha < X < \beta).$$

Пример 3.2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos x, & -\pi/2\leq x\leq \pi/2, \\ 0, & x<-\pi/2, \quad x>\pi/2 \end{cases}$$

Требуется:

а) найти значение коэффициента a;

б) найти функцию распределения;

в)найти вероятность попадания случайной величины на интервал (0, $\pi/2$).

Решение, а) Воспользуемся свойством 3:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a\cdot\cos x\cdot dx = a\cdot\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=a\cdot(1-(-1))=2a=1.$$

Отсюда получаем: $a=1/2$.

б) Если $x\leq\pi/2$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0;$$

если $-\pi/2\leq x\leq \pi/2$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-\pi/2} 0\cdot dt+\int\limits_{-\pi/2}^{x}\frac{1}{2}\cdot\cos t\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\sin t\Big|_{-\pi/2}^{x}=\frac{1}{2}\cdot(\sin x+1);$$

если $x>\pi/2$, то

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{-\pi/2} 0\cdot dt+\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}\cdot\cos t\cdot dt+\int\limits_{\pi/2}^{x} 0\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\sin t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=1;$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-\pi/2, \\ \frac{1}{2}\cdot(\sin x+1), & -\pi/2\leq x\leq \pi/2, \\ 1, & x>\pi/2. \end{cases}$$

в) По свойству 4:

$$P\left(0< X <\pi / 4\right)=F\left(\pi / 4\right)-F\left(0\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\left(\pi / 4\right)+1\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\sin 0+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

3.6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Функция распределения или плотность распределения полностью описывают случайную величину. Часто, однако, при решении практических задач нет необходимости в полном знании закона распределения, достаточно знать лишь некоторые его характерные черты. Для этого в теории вероятностей используются числовые характеристики случайной величины, выражающие различные свойства закона распределения. Основными числовыми характеристиками являются *математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение*.

Математическое ожидание характеризует положение случайной величины на числовой оси. Это некоторое среднее значение случайной величины, около которого группируются все ее возможные значения.

Математическое ожидание случайной величины X обозначают символами $M(X)$ или m. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма парных произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений:

$$M\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot x_i.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется с помощью несобственного интеграла:

$$M\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f\left(x\right)dx.$$

Исходя из определений, нетрудно убедиться в справедливости следующих свойств математического ожидания:

1. $Mc=c$ (математическое ожидание неслучайной величины c равно самой неслучайной величине).
2. Если $X\geq 0$, то $MX\geq 0$.
3. $M(aX+bY)=a\cdot MX+b\cdot MY$.
4. Если X и Y *независимы*, то $M\left(X\cdot Y\right)=M\left(X\right)\cdot M\left(Y\right)$.

Пример 3.3. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, заданной рядом распределения:

X	0	1	2	3
p	0.2	0.4	0.3	0.1

Решение.

$$M\left(X\right)=\sum_{i=1}^{4} p_i x_i.=0\cdot 0.2+1\cdot 0.4+2\cdot 0.3+3\cdot 0.1=1.3.$$

Пример 3.4. Найти математическое ожидание случайной величины, заданной плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases} x/2, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x<0,\quad x>2\end{cases}.$$

Решение. $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{0}^{2} x\cdot x/2\cdot dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x^2\cdot dx=\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=\frac{8}{6}=1.33.$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение являются характеристиками рассеивания случайной величины, они характеризуют разброс ее возможных значений относительно математического ожидания.

Дисперсией *D(X)* случайной величины *X* называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания Для дискретной случайной величины дисперсия выражается суммой:

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2 \qquad (3.3)$$

а для непрерывной – интегралом

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx \qquad (3.4)$$

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Характеристикой рассеивания, *совпадающей по размерности со случайной величиной*, служит среднее квадратическое отклонение.

Свойства дисперсии:

1) $D(a+bX)=b^2D(X),\ a,\ b$ – постоянные. В частности,

2) $D(a)=0,\ D(bX)=b^2D(X).$

3) $$D(X+Y)=M\left((X-MX)+(Y-MY)\right)^2= \\ =DX+DY+2M(X-MX)\cdot(Y-MY).$$

В частности,

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2=M\left(X^2-2\cdot X\cdot M(X)+\left(M(X)\right)^2\right)= \\ =M\left(X^2\right)-2\cdot M(X)\cdot M(X)+\left(M(X)\right)^2=M\left(X^2\right)-\left(MX\right)^2. \qquad (3.5)$$

Заметим, что вычисление дисперсии по формуле (3.5) часто оказывается более удобным, чем по формуле (3.3) или (3.4).

Величина $\mathrm{cov}(X,\ Y)=M(X-MX)\cdot(Y-MY)$ называется *ковариацией* случайных величин X è Y.

Если $DX\ge 0,\ DY\ge 0$, то величина

$$\rho(X,\ Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,\ Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}$$

называется *коэффициентом корреляции* случайных величин X è Y.

Можно показать, что если $\rho(X, Y) = \pm 1$, то величины X è Y линейно зависимы: $\eta = aX + b,$ где $a > 0,$ åñëè $\rho(X, Y) = 1,$ è $a < 0,$ åñëè $\rho(X, Y) = -1.$

Отметим, что если X è Y независимы, то
$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M\left(X - M\xi\right)\cdot\left(\eta - M\eta\right) = 0$ и $D(X + Y) = DX + DY.$

Пример 3.5. Найти дисперсию случайной величины, заданной рядом распределения из примера 1.

Решение. Чтобы вычислить дисперсию, необходимо знать математическое ожидание. Для данной случайной величины выше было найдено: m=1.3. Вычисляем дисперсию по формуле (3.5):

$$D(X) = M\left(X^2\right) - m^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - m^2 =.$$

$$= 0^2 \cdot 0.2 \ + \ 1^2 \cdot 0.4 + \ 2^2 \cdot 0.3 \ + \ 3^2 \ \cdot 0.1 - 1.3^2 \ = 0.81.$$

Пример 3.6. Случайная величина задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} (1/2)\cdot\cos x, & |x| \le \pi/2, \\ 0, & |x| > \pi/2. \end{cases}$$

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Находим сначала математическое ожидание:

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cdot\cos x\cdot dx = 0$$

(как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку).

Теперь вычисляем дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\cdot\cos x\cdot dx =$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} x^2\cdot\cos x\cdot dx = x^2\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2} - 2\cdot\int_0^{\pi/2} x\cdot\sin x\cdot dx =$$

$$= x^2\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2} + 2x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2} - 2\cdot\int_0^{\pi/2} x\cdot\cos x\cdot dx =$$

$$= x^2\cdot\sin x\Big|_0^{\pi/2} + 2x\cdot\cos x\Big|_0^{\pi/2} - 2\sin x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{\pi^2 - 8}}{2}.$$

3.7. ПРИМЕРЫ ДИСКРЕТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1. **Биномиальное распределение**. Случайная величина X, равная числу «УСПЕХОВ» в схеме Бернулли, имеет биномиальное распределение:

$P(x) = C_n^x p^x q^{n-x}$, $x = 0,\ 1,\ \ldots,\ n$.

Математическое ожидание случайной величины, распределённой по биноминальному закону, равно

$$MX = \sum_{x=0}^{n} x C_n^x p^x q^{n-x} = np.$$

Дисперсия этого распределения равна $DX = npq$.

2. **Распределение Пуассона** $P(x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$, $x = 0,1,2,\ldots$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины с распределением Пуассона $\grave{I}\ X = \lambda$, $DX = \lambda$.

Распределение Пуассона часто используется, когда мы имеем дело с числом событий, появляющихся в промежутке времени или пространства, например: число машин, прибывших на автомойку в течении часа, число остановок станков в неделю, число дорожных происшествий и т.д.

3. **Геометрическое распределение**

Случайная величина X имеет *геометрическое распределение* с параметром $p \in (0,1)$, если X принимает значения $k = 1,2\ldots$ с вероятностями $\mathsf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. Случайная величина с таким распределением имеет смысл *номера первого успешного испытания* в схеме Бернулли с вероятностью успеха p. Таблица распределения X имеет вид:

X	1	2	$\ldots$	k	$\ldots$
P	p	$p(1-p)$	$\ldots$	$p(1-p)^{k-1}$	$\ldots$

3.8. ПРИМЕРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1. **Равномерное распределение.** Плотность *равномерного* или *прямоугольного* распределения:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ 1/(\beta-\alpha), & x \in [\alpha, \beta], \\ 0, & x > \beta \end{cases}$$

т.е. вероятности $P(x_i)$ всех возможных значений $x_1, x_2, \ldots, x_m$ случайной величины X одинаковы и равны $c = 1/(\beta - \alpha)$.

Математическое ожидание случайной величины с *равномерным* распределением равно

$$MX = \int_\alpha^\beta x f_X(x)dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta x dx = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

дисперсия $DX = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(x - \frac{\alpha+\beta}{2} \right)^2 f_X(x) dx = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$.

Функция распределения имеет вид $F(x) = \int\limits_{\alpha}^{x} f_X(t) dt = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$, $x \in (\alpha, \beta)$ (рис. 3.5).

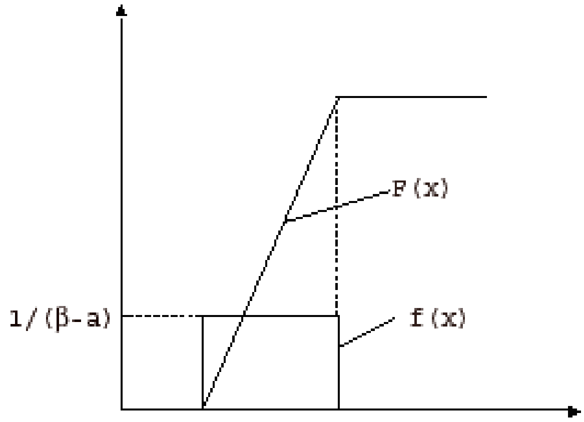


Рис. 3.5. Графики плотности и функции равномерного распределения

2. **Показательное (экспоненциальное) распределение –** закон, функция плотности распределения которого имеет вид: $f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$, где параметр распределения $\lambda > 0$ есть действительное число (постоянный параметр) (рис. 3.6).

Функция распределения показательного закона имеет вид:

$$F(x) = \int\limits_{0}^{x} f(x) dx = \int\limits_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x},$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по показательному закону, равны соответственно $MX = \frac{1}{\lambda}$, $DX = \frac{1}{\lambda^2}$.

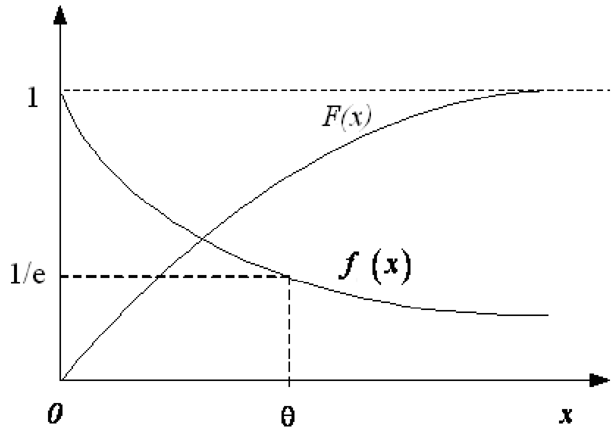


Рис. 3.6. Графики плотности и функции показательного распределения

3. **Нормальное распределение.** Нормальный закон распределения вероятностей занимает особое место среди других законов распределения. В теории

вероятности доказывается, что плотность вероятности суммы независимых или *слабо зависимых*, равномерно малых (т.е. играющих примерно одинаковую роль) слагаемых при неограниченном увеличении их числа как угодно близко приближается к нормальному закону распределению независимо от того, какие законы распределения имеют эти слагаемые (центральная предельная теорема А. М. Ляпунова).

Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины ξ имеет вид: $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, где m и σ – вещественные параметры распределения, имеющие конечные значения, при этом часто используют обозначение $\xi \sim N(m,\sigma^2)$.

Функция распределения записывается в виде

$$\Phi_{m,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy = \Phi_{0,1}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Здесь $\Phi_{0,1}(z)$ – табулированный интеграл вероятности (значения интеграла можно найти во всех учебниках и задачниках по теории вероятностей). Функция и плотность нормального распределения изображены на рис. 3.7.

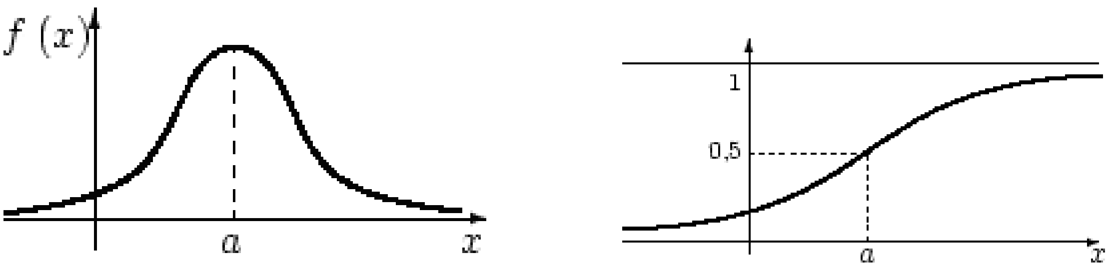


Рис. 3.7. Графики плотности и функции нормального распределения

Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины равно Ì $X = m$, дисперсия $DX = \sigma^2$. Таким образом, параметры m и σ имеют смысл математического ожидания и среднеквадратического значения (отклонения) случайной величины.

Распределение, описываемое функцией $\Phi_{m,\sigma^2}(x)$, называется *нормальным* или *распределением Гаусса*.

На рис.3.8 изображены кривые нормального распределения случайных погрешностей для различных значений среднеквадратического отклонения $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

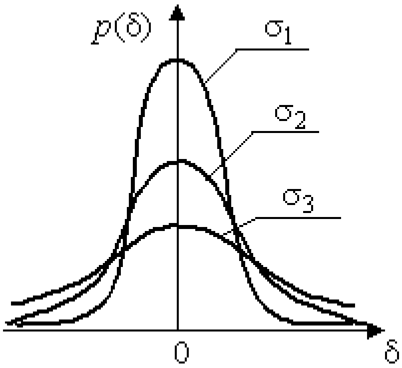


Рис. 3.8. Кривые нормального распределения, $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Из рис. 3.8 видно, что по мере увеличения среднеквадратического отклонения распределение все более и более расплывается, вероятность появления больших значений погрешностей возрастает, а вероятность меньших погрешностей сокращается, т.е. увеличивается рассеивание результатов наблюдений.

Широкое распространение нормального распределения погрешностей в практике измерений объясняется *центральной предельной теоремой* теории вероятностей, являющейся одной из самых замечательных математических теорем, в разработке которой принимали участие многие крупнейшие математики – Муавр, Лаплас, Гаусс, Чебышев и Ляпунов.

Центральная предельная теорема утверждает, что распределение случайных погрешностей будет близко в нормальному всякий раз, когда результаты наблюдения формируются под влиянием большого числа независимо действующих факторов, каждый из которых оказывает лишь незначительное действие по сравнению с суммарным действием всех остальных.

Свойства нормального распределения.

A. Если случайная величина $\xi \sim N\left(m,\sigma^2\right)$, òî $\eta = \dfrac{\xi - m}{\sigma} \sim N\left(0,1\right)$.

B. Если случайная величина $\xi \sim N\left(m,\sigma^2\right)$, то

$$\mathbf{P}\left(x_1 < \xi < x_2\right) = \Phi_{m,\sigma^2}\left(x_2\right) - \Phi_{m,\sigma^2}\left(x_1\right) = \Phi_{0,1}\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi_{0,1}\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right).$$

В частности, $\mathbf{P}\left(\left|\xi - m\right| < l\right) = 2 \cdot \Phi_{0,1}\left(\dfrac{l}{\sigma}\right)$.

Таким образом, вычисление любых вероятностей для нормально распределённой случайной величины сводится к вычислению функции распределения $\Phi_{0,1}\left(x\right)$. Она обладает следующими свойствами: $\Phi_{0,1}\left(0\right) = 0.5$; $\Phi_{0,1}\left(-x\right) = 1 - \Phi_{0,1}\left(x\right)$.

C. Если $\xi \sim N\left(0,1\right)$, то для любого $x > 0$

$$\mathbf{P}\left(\left|\xi\right| < x\right) = 1 - 2\Phi_{0,1}\left(-x\right) = 2\Phi_{0,1}\left(x\right) - 1.$$

D. *Правило трех сигм*. Если $\xi \sim N\left(m,\sigma^2\right)$, то

$$\mathbf{P}\left(\left|\xi - m\right| \geq 3\sigma\right) = 0.0027.$$

Большого смысла в запоминании числа 0.0027 нет, но полезно помнить, что почти вся масса нормального распределения сосредоточена в границах от $(a-3\sigma)$ до $(a+3\sigma)$.

Пример 3.7. Дана случайная величина $X \sim N(1,4)$. Найти $P(2 < X < 3)$.

Решение. По формуле свойства **В** при $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ \ m = 1,\ \sigma = 2$ получаем $P(2 < X < 3) = \Phi(1) - \Phi(0.5).$ По таблице для функции Лапласа находим $\Phi(0.5) = 0.1915,\ \Phi(1) = 0.3413.$

$P(2 < X < 3) = 0.3413 - 0.1915 = 0.1498.$

Пример 3.8. Случайная величина *X* – отклонение размера изделия от нормы – нормально распределенная, причём M (X)= 0. Найти σ (X), если известно, что P(– 3 < *X* < 3) = 0.7.

Решение. P(– 3 < *X* < 3) = P(| *X* | < 3) = $2 \cdot \Phi_{0,1}\left(\frac{3}{\sigma}\right)$= 0.7. Отсюда следует, что

$\Phi_{0,1}\left(\frac{3}{\sigma}\right) = 0.35$, и, используя табличные данные (приложение 1), получаем 3/σ =1.4, или σ = 3/1.4 ≈ 2.14.

4 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Основные задачи математической статистики:

1. Разработка методологии сбора и группировки статистического материала, полученного в результате наблюдений за случайными процессами.
2. Разработка методов анализа полученных статистических данных. Этот анализ включает оценку вероятностей события, функции распределения вероятностей или плотности вероятности, оценку параметров известного распределения, а также оценку связей между случайными величинами.

4.1. ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

4.1.1. ГЕНЕРАЛЬНАЯ СОВОКУПНОСТЬ И ВЫБОРОЧНАЯ

Статистические данные представляют собой данные, полученные в результате обследования большого числа объектов или явлений.

Экспериментальные данные - это результаты измерения некоторых признаков объектов, выбранных из большой совокупности объектов.

Часть объектов исследования, определенным образом выбранная из более обширной совокупности, называется *выборкой*, а *вся* исходная совокупность, из которой взята выборка,- *генеральной (основной) совокупностью*.

Исследования, в которых участвуют все без исключения объекты, составляющие генеральную совокупность, называются *сплошными исследованиями*. Может использоваться *выборочный метод*, суть которого в том, что для обследования привлекается часть генеральной совокупности (*выборка*), но по результатам этого обследования судят о свойствах всей генеральной совокупности.

Предметом изучения в статистике являются варьирующиеся признаки (называемые *статистическими*). Они делятся на качественные и количественные.

Качественными признаками объект обладает либо не обладает. Они не поддаются непосредственному измерению (спортивная специализация, квалификация, национальность, территориальная принадлежность и т. п.).

Количественные признаки представляют собой результаты подсчета или измерения. В соответствии с этим они делятся на *дискретные и непрерывные*.

Например, измеряемая температура воздуха в некотором пункте – непрерывная случайная величина (может меняться на сколь угодно малую величину), и соответствующая генеральная совокупность представляет собой бесконечное множество значений.

Повторной называют выборку, при которой объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность. *Бесповторной* называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Если выборка правильно отражает соотношения в генеральной совокупности, то ее называют *репрезентативной* (представительной). Например, результаты социологического опроса населения будут зависеть от того, в каком месте он проводится, среди каких групп.

4.1.2. ВАРИАЦИОННЫЙ РЯД. ПОЛИГОН ЧАСТОТ И ГИСТОГРАММА ЭМПИРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть X — некоторый признак изучаемого объекта или явления (срок службы электролампы, вес студента, диаметр шарика для подшипника и т.п.). Генеральной совокупностью является множество всех возможных значений этого признака, а результаты n наблюдений над признаком X дадут нам выборку объема n — первоначальные статистические данные, значения $x_1, x_2, ..., x_n$ (простая выборка, не сгруппированные данные)

При этом значение x_1 получено при первом наблюдении случайной величины X, x_2 – при втором наблюдении той же случайной величины и т.д.

Выборку преобразуют в *вариационный ряд*, располагая результаты наблюдений в порядке возрастания: $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)}$.Каждый член $x_{(i)}$ вариационного ряда называется *вариантой*.

Пример 4.1.

1. Измерена масса тела 10-ти детей 6-ти лет. Полученные данные образуют простой статистический ряд: 24 22 23 28 24 23 25 27 25 25.

2. Из 10000 выпущенных на конвейере электрических лампочек отобрано 300 штук для проверки качества всей партии. Здесь $N = 10000,$ а $n = 300.$

Отдельные значения статистического ряда называются *вариантами*. Если варианта x_i появилась m раз, то число m называют *частотой*, а ее отношение к объему выборки m/n – *относительной частотой*.

Последовательность вариант, записанная в возрастающем (убывающем) порядке, называется *ранжированным рядом*.

Пример 4.2. Для ранжированного ряда: 23 23 24 24 25 25 25 27 28 в нижеприведенной таблице в первой строке записаны все значения величины (варианты), во второй – соответствующие им частоты (безынтервальный вариационный ряд), в третьей – накопленные частоты, в четвертой – относительные частоты (табл.4.1).

Таблица 4.1. Значения вариант и их частот

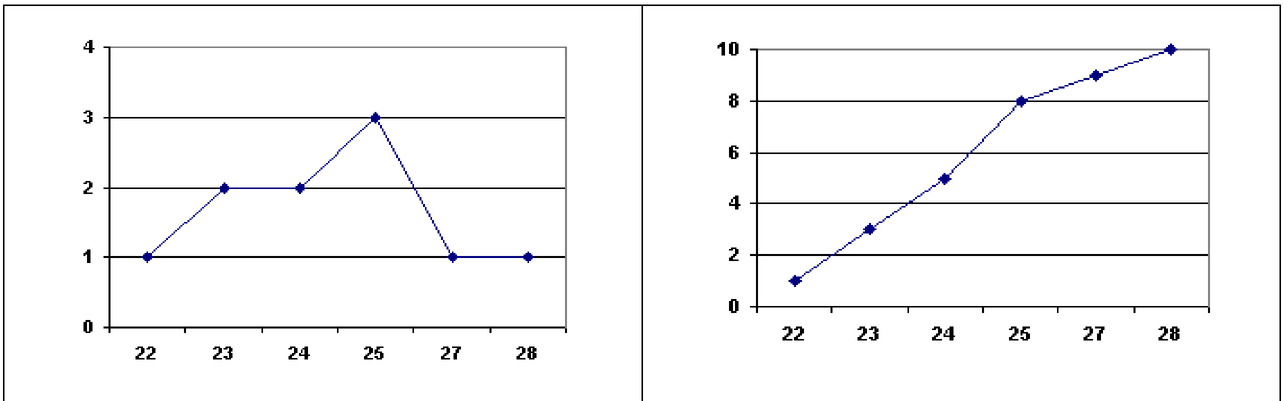
X	22	23	24	25	27	28
n_i	1	2	2	3	1	1
$n_н$	1	3	5	8	9	10

$\frac{n_i}{n}$	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1

Полигоном частот называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_i; n_i) (рис. 4.1).

Отметим, что сумма частот статистического ряда равна объему выборки. Часто статистический ряд составляют, используя относительные частоты вариант: $h_i = \frac{n_i}{n}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots, m$ (m — количество различных вариант). Сумма относительных частот равна единице.

Полигоном относительных частот называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_i; h_i).



а) б)

Рисунок 4.1. Полигон частот а), кумулятивная кривая б)

Эмпирическим аналогом графика интегральной функции распределения является *кумулятивная кривая* (*кумулята*). Для ее построения на оси *OX* откладывают значения вариант, на оси *OY* – накопленные частоты или относительные частоты. Полученная плавная кривая называется кумулятой.

В том случае, если выборка представлена большим количеством различных значений непрерывной случайной величины, то группировку данных проводят в виде интервального вариационного ряда (ИВР). Для этого диапазон варьирования признака разбивают на несколько (5–10) равных интервалов и указывают количество вариант, попавших в каждый интервал.

Алгоритм построения интервального вариационного ряда.

1. Исходя из объема выборки (n), определить количество интервалов (k) (см. табл. 4.2).

Таблица 4.2. Рекомендуемое соотношение объем выборки−число интервалов

n	25–40	40–60	60–100	100–200	>200
k	5–6	6–8	7–10	8–12	10–15

2. Вычислить размах ряда: $R = X_{max} - X_{min}$

3. Определить ширину интервала: $h = R/(k-1)$

4. Найти начало первого интервала $X_0 = X_{min} - h/2$

5. Составить интервальный вариационный ряд.

Графическим изображением ИВР является *гистограмма*. Для ее построения на оси OX откладывают интервалы шириной h, на каждом интервале строят прямоугольник высотой m/h. Величина m/h называется *плотностью частоты*. **Гистограмма** является эмпирическим аналогом графика дифференциальной функции распределения.

Пример 4.3. Измерена масса тела 100 женщин 30 лет, получены значения от 60 до 90 кг. Построить интервальный вариационный ряд (табл. 4.3) и гистограмму.

Таблица 4.3. Интервальный вариационный ряд

Интервал	Середина интервала	m	m/h
60–65	62.5	14	2.8
65–70	67.5	32	6.4
70–75	72.5	28	5.6
75–80	77.5	14	2.8
80–85	82.5	7	1.4
85–90	87.5	2	0.4

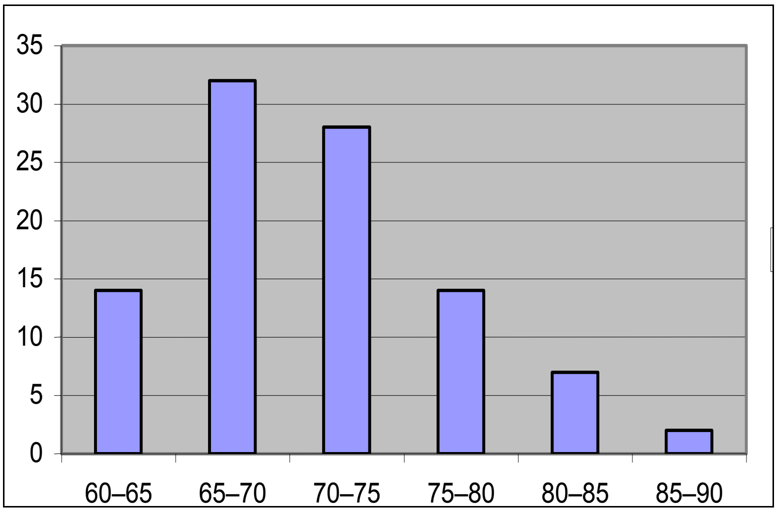


Рисунок 4.2. Гистограмма

Эмпирическая функция распределения находится по следующей формуле (отношение накопленных частот к объему выборки):

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ \dfrac{n_1}{n}, & x_1 < x \le x_2, \\ \dfrac{n_1 + n_2}{n}, & x_2 < x \le x_3, \\ \dfrac{n_1 + n_2 + n_3}{n}, & x_3 < x \le x_4, \\ \ldots & \ldots \\ n = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \dfrac{n_i}{n}, & x_{m-1} < x \le x_m, \\ 1, & x > x_m. \end{cases} \tag{4.1}$$

4.2. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

4.2.1. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ. ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА И ЕЕ СВОЙСТВА

Числовые характеристики генеральной совокупности называются *параметрами* генеральной совокупности.

Например, для нормального распределения это математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение (СКО), для равномерного распределения – это границы интервала, в котором наблюдаются значения этой случайной величины

Оценка параметра – соответствующая числовая характеристика, рассчитанная по выборке. Если оценка определяется одним числом, она называется *точечной оценкой*.

Например, среднее арифметическое выборочных значений служит оценкой математического ожидания. Выборочные значения случайны, поэтому оценки можно рассматривать как случайные величины. Построим точечную оценку параметра θ по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как значение некоторой функции и перечислим «желаемые» свойства оценки θ^*.

Определение 4.1. Оценка θ^* называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемого параметра: $M\theta^* = \theta$.

Данное свойство характеризует отсутствие *систематической ошибки*, т.е. при многократном использовании вместо параметра θ его оценки θ^* среднее значение ошибки приближения $|\,\theta - \theta^*\,|$ равно нулю.

Так, выборочное среднее арифметическое $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ является *несмещенной оценкой* математического ожидания, а выборочная дисперсия $\bar{D} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ – *смещенная оценка* генеральной дисперсии *D*. Несмещенной оценкой генеральной дисперсии является оценка («исправленная дисперсия») $S^2 = \dfrac{1}{n-1} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

Определение 4.2. Оценка $\theta^*(X_1, X_2, ..., X_n)$ называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру θ при $n \to \infty$: $\theta^* \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta.$

Данное свойство характеризует улучшение оценки с увеличением объема выборки.

Сходимость по вероятности означает, что при большом объеме выборки вероятность больших отклонений оценки от истинного значения мала.

Определение 4.3.. Несмещенная оценка является *эффективной*, если она имеет наименьшую среди всех несмещенных оценок дисперсию.

Пример 4.4.:

1. Вычислить среднее значение массы тела детей 6 лет.

$$\overline{X} = \frac{24+22+23+28+24+23+25+27+25+25}{10} = 24.6$$

2. Если выборочное среднее вычисляется по вариационному ряду, то находят сумму произведений вариант на соответствующие частоты, и делят на количество элементов в выборке: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i$.

$$\overline{X} = \frac{22+23\cdot 2+24\cdot 2+25\cdot 3+27+28}{10} = 24.6$$

3. В том случае, когда статистические данные представлены в виде интервального вариационного ряда, при вычислении выборочного среднего значениями вариант считают середины интервалов. Так, для вычисления среднего значения массы тела женщин 30 лет из примера 4.3. используют формулу:

$$\overline{X} = \frac{62.5\cdot 14+67.5\cdot 32+72.5\cdot 14+77.5\cdot 14+82.5\cdot 7+87.5\cdot 2}{100} = 71.5\ \hat{e}\tilde{a}.$$

Другими характеристиками являются **мода** и **медиана**.

В теории вероятностей ***модой*** M_o дискретной случайной величины называется ее значение, которое имеет максимальную вероятность. Модой непрерывной случайной величины называется такое ее значение, при котором достигается максимум плотности распределения $f(x)$. Закон распределения называется унимодальным, если мода единственна. В математической статистике мода M_o определяется по выборке, как *варианта с наибольшей частотой*.

Медианой называется варианта, расположенная в центре *ранжированного ряда*. Если ряд состоит из четного числа вариант, то медианой считают среднее арифметическое двух вариант, расположенных в центре ранжированного ряда.

Пример 4.5. Найти моду и медиану выборочной совокупности по массе тела детей 6 лет.

Ответ: $M_o = 24$; $M_e = 24$.

Основные числовые характеристики выборочной совокупности:

1) *размах вариационного ряда* $R = X_{max} - X_{min}$. Этот показатель является наиболее простой характеристикой рассеяния и показывает диапазон варьирования величины. Этой характеристикой пользуются при работе с малыми выборками;

2) *выборочное среднее* находится как взвешенное среднее арифметическое $\overline{x}_{в} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i}{n}$, которое характеризует среднее значение признака *X* в пределах рассматриваемой выборки;

3) *выборочная дисперсия* определяется по формуле: $D_{в} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x}_{в}\right)^2 \cdot n_i}{n}$, которая является мерой рассеяния возможных значений показателя *X* вокруг своего среднего значения, и ее размерность совпадает с квадратом размерности варианты;

4) *выборочное среднее квадратическое отклонение* $\sigma_{в}(X) = \sqrt{D_{в}}$ описывает абсолютный разброс значений показателя *X*. Его размерность совпадает с размерностью варианты;

5) «*исправленная*» *дисперсия* (вычисляют при малых *n*, *n*<30) $S^2(X) = \dfrac{n}{n-1} D_{в} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x}_{в}\right)^2 \cdot n_i}{n-1}$ и «*исправленное*» *стандартное отклонение* $S(X) = \sqrt{S^2(X)}$;

6) *коэффициент вариации* $V = \dfrac{\sigma_{в}(X)}{\overline{x}_{в}} \cdot 100\%$ характеризует относительную изменчивость показателя *X*, то есть относительный разброс вокруг его среднего значения $\overline{x}_{в}$. Коэффициент вариации является безразмерной величиной, поэтому он пригоден для сравнения рассеяния вариационных рядов, варианты которых имеют различную размерность.

Пример 4.6.: Измерена длина (*X*) и масса тела (*Y*) девочек 10-ти лет. Получены следующие показатели: *X*=130 см, σ_X = 5 см, *Y* = 32 кг, σ_Y = 4 кг. Какая величина имеет большую вариативность?

Так как длина и масса тела измеряются в разных единицах, то вариативность нельзя сравнить при помощи СКО. Необходимо вычислить относительный показатель вариации.

$$V_X = \frac{5}{130} \cdot 100\% = 3.8\%;$$

$$V_Y = \frac{4}{32} \cdot 100\% = 12.5\%.$$

Таким образом, масса тела имеет большую вариативность, чем длина тела.

4.2.2. ОЦЕНКА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРВАЛОВ

Оценка параметров с помощью интервалов заключается в нахождении интервалов, называемых *доверительными*, между границами которых с определенными вероятностями (доверительными) находятся истинные значения оцениваемых параметров. *Интервальная оценка* определяется двумя числами – концами интервала.

Пусть найденная по данным выборки величина θ^* служит оценкой неизвестного параметра θ. Оценка θ^* определяется тем точнее, чем меньше $|\theta - \theta^*|$, т. е. чем меньше δ в неравенстве $|\theta - \theta^*| < \delta$, $\delta > 0$.

Доверительной вероятностью (*надежностью*) оценки θ^* параметра θ называется вероятность Υ, с которой оценивается неравенство $|\theta - \theta^*| < \delta$.

Число $\alpha = 1 - \Upsilon$ называется *уровнем значимости*, определяющим вероятность того, что оцениваемый параметр не попадет в доверительный интервал.

Обычно задается надежность Υ и определяется δ. Чаще всего вероятность Υ задается значениями от 0.95 и выше. Неравенство $|\theta - \theta^*| < \delta$ можно записать в виде

$$-\delta < \theta - \theta^* < \delta \text{ или } \theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta.$$

Доверительным интервалом называется интервал ($\theta^* - \delta$, $\theta^* + \delta$), который покрывает неизвестный параметр θ с заданной надежностью.

Определение доверительного интервала для среднего значения нормально распределенной измеряемой случайной величины X при известной дисперсии σ_X^2.

Нам уже известно, что $\bar{m} = \bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Можно показать [1-5], что $M(\bar{m}) = m$, $\sigma^2[\bar{m}] = \dfrac{\sigma_X^2}{n}$ (сумма $\bar{m}$ нормально распределенных случайных величин X_i сама является нормальной).

Зададим доверительную вероятность Υ и найдем доверительный интервал ($\bar{m} - \delta$, $\bar{m} + \delta$), который покрывал бы неизвестный параметр $\bar{m}$ с заданной надежностью Υ.

Согласно формуле **В (**свойства нормального распределения, раздел 3)

$$\mathbf{P}\left(|\bar{m} - m| < \delta\right) = 2 \cdot \Phi_{0,1}\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_X}\right) = 2 \cdot \Phi_{0,1}\left(t_\gamma\right) = \gamma. \qquad (4.1)$$

Таким образом, для отыскания величины *доверительной границы* случайного отклонения результатов наблюдений по *доверительной вероятности* Υ имеем уравнение:

$$2 \cdot \Phi_{0,1}\left(t_\gamma\right) = \gamma, \text{ где } t_\gamma = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_X},$$

где значение t_γ находим по таблице Лапласа (приложение 1), $t_\gamma : \Phi_{0,1}\left(t_\gamma\right) = \gamma / 2$.

Пример 4.7. По результатам наблюдений была найдена оценка неизвестного математического ожидания m случайной величины $\xi \sim N\left(m, \sigma^2\right)$, если точечная оценка $\bar{m}$=10.2, а дисперсия оценки σ_X=4. Требуется оценить доверительный интервал для оценки математического ожидания по 36-ти наблюдениям с заданной надежностью Υ=0.99.

Решение. Из (4.1) следует, что $\Phi_{0,1}\left(t_\gamma\right) = \dfrac{0.99}{2} = 0.495$. Отсюда получаем, что $t_\gamma = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_X}$=2.58 и половина искомого интервала $\delta = \dfrac{2.58 \cdot 4}{\sqrt{36}} = 1.89$. Так как $\bar{m} - \delta < m < \bar{m} + \delta$, то с вероятностью 0.99 доверительный интервал для оценки математического ожидания: $8.31 < m < 12.09$.

Со случаем, когда распределение результатов наблюдений нормально, но их дисперсия неизвестна, можно ознакомится в [3, 4, 6].

4.3. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Статистическая гипотеза — это предположение

о виде закона распределения («данная генеральная совокупность нормально распределена»);

о значениях его параметров («генеральное среднее равно нулю»);

об однородности данных («эти две выборки извлечены из одной генеральной совокупности»).

Статистическая проверка гипотезы состоит в выяснении того, согласуются ли результаты наблюдений (выборочные данные) с нашим предположением.

Результатом проверки может быть отрицательный ответ: выборочные данные противоречат высказанной гипотезе, поэтому от нее следует отказаться. В случае ответа неотрицательного (выборочные данные не противоречат гипотезе) гипотезу принимают в качестве *одного из допустимых решений* (не единственно верного).

Различают *основную* (нулевую) гипотезу (гипотеза, которая проверяется, H_0) и альтернативную (конкурирующую, противопоставленную основной, H_1). Например, если нулевая гипотеза H_0: $MX = 10$ (т. е. математическое ожидание нормально распределенной величины равно 10), тогда гипотеза H_1, может иметь вид H_1: $MX \neq 10$.

Цель статистической проверки гипотез: на основании выборочных данных принять решение о справедливости основной гипотезы или отклонить в ее пользу альтернативной.

Так как проверка осуществляется на основании выборки, а не всей генеральной совокупности, то существует вероятность, возможно, очень малая, ошибочного заключения.

Так, нулевая гипотеза может быть отвергнута, в то время как в действительности в генеральной совокупности она является справедливой. Такую ошибку называют *ошибкой первого рода*, а её вероятность — *уровнем значимости* и обозначают α (стандартные значения α: 0.1, 0.05, 0.01, 0.001). Возможно, что нулевая гипотеза принимается, в то время как в генеральной совокупности справедлива альтернативная гипотеза. Такую ошибку называют *ошибкой второго рода*, а её вероятность обозначают β Проверка статистических гипотез осуществляется с *помощью статистического критерия K* — правила (функции от результатов наблюдений), определяющего меру расхождения результатов наблюдений с нулевой гипотезой. Вероятность $1-\beta$ называют *мощностью* критерия.

Замечание. Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Например, основная гипотеза состоит в том, что предприятие получает прибыль. Если это правильная гипотеза, то ошибка первого рода состоит в том, что данная гипотеза отвергается. Если принимается решение о том, что прибыль предприятие не получает, то это ошибка второго рода.

Иногда ошибку первого рода называют «альфа-риск» (α-риск) а ошибку второго рода «бета-риск» (β-риск).

Из двух критериев, характеризующихся одной и той же вероятностью α, выбирают тот, которому соответствует меньшая ошибка 2-го рода, т.е. большая мощность. Уменьшить вероятности обеих ошибок α и β одновременно можно, увеличив объем выборки.

Значения критерия *K* разделяются на две части: область ***допустимых значений*** (область принятия гипотезы H_0) и ***критическую область*** (область принятия гипотезы

H_1). Критическая область состоит из тех же значений критерия *K*, которые маловероятны при справедливости гипотезы H_0. Если значение $K_{\text{набл}}$ критерия *K*, рассчитанное по выборочным данным, попадает в критическую область, то гипотеза H_0 отвергается в пользу альтернативной H_1 в противном случае мы утверждаем, что нет оснований отклонять гипотезу H_0.

Пример 4.7. Для подготовки к зачету преподаватель сформулировал 100 вопросов (генеральная совокупность) и считает, что студенту можно поставить «зачтено», если тот знает 60 % вопросов (критерий). Преподаватель задает студенту 5 вопросов (выборка из генеральной совокупности) и ставит «зачтено», если правильных ответов не меньше трех. Гипотеза H_0: «студент курс усвоил», а множество $\{3,\ 4,\ 5\}$ — область принятия этой гипотезы. Критической областью является множество $\{0,\ 1,\ 2\}$ — правильных ответов меньше трех, в этом случае основная гипотеза отвергается в пользу альтернативной H_1 «студент курс не усвоил, знает меньше 60 % вопросов».

Студент *А* выучил 70 вопросов из 100, но ответил правильно только на два из пяти, предложенных преподавателем, — зачет не сдан. В этом случае преподаватель совершает ошибку первого рода.

Студент *Б* выучил 50 вопросов из 100, но ему повезло, и он ответил правильно на 3 вопроса — зачет сдан, но совершена ошибка второго рода.

Преподаватель может уменьшить вероятность этих ошибок, увеличив количество задаваемых на зачете вопросов.

Алгоритм проверки статистических гипотез сводится к следующему:

1) сформулировать основную H_0 и альтернативную H_1 гипотезы;

2) выбрать уровень значимости α;

3) в соответствии с видом гипотезы H_0 выбрать статистический критерий для ее проверки, т.е. случайную величину *K*, распределение которой известно;

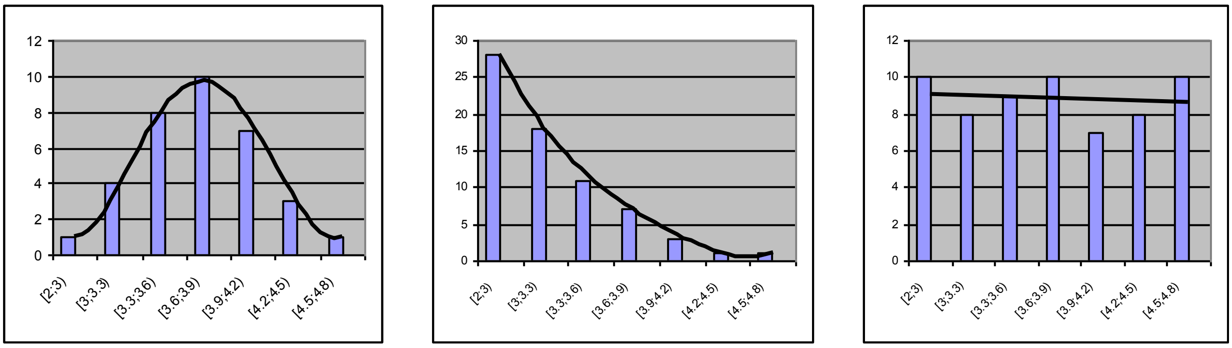
4) по таблицам распределения случайной величины *K* найти границу критической области $K_{\text{кр}}$ (вид критической области определить по виду альтернативной гипотезы H_1);

5) по выборочным данным вычислить наблюдаемое значение критерия $K_{\text{набл}}$;

6) принять статистическое решение: если $K_{\text{набл}}$ попадает в критическую область — отклонить гипотезу H_0 в пользу альтернативной H_1; если $K_{\text{набл}}$ попадает в область допустимых значений, то *нет оснований отклонять основную гипотезу*.

4.3.1 ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О ВИДЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. КРИТЕРИЙ СОГЛАСИЯ ПИРСОНА

Одной из важных задач математической статистики является установление теоретического закона распределения случайной величины, характеризующей изучаемый признак по эмпирическому распределению, представляющему вариационный ряд. Предположение о виде закона распределения можно сделать по гистограмме или полигону (Рис. 4.3)



а) б) в)

Рис. 4.3. Возможные виды гистограмм:
а) нормального, б) показательного, в) равномерного распределений

Например, по гистограмме (рис. 4.3, а)) можно сделать предположение о том, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

Для проверки гипотез о виде распределения служат специальные критерии — *критерии согласия*. Они отвечают на вопрос: согласуются ли результаты экспериментов с предположением о том, что генеральная совокупность имеет заданное распределение.

Проверим это предположение с помощью ***критерия согласия Пирсона***. В этом критерии мерой расхождения между гипотетическим (предполагаемым) и эмпирическим распределением служит статистика

$$K = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j},$$

где n — объем выборки;

k — количество интервалов (групп наблюдений);

n_j — количество наблюдений, попавших в j-й интервал;

p_j — вероятность попадания в j-й интервал случайной величины, распределенной по гипотетическому закону.

Если предположение о виде закона распределения справедливо, то статистика Пирсона распределена по закону «хи-квадрат» с числом степеней свободы $k-r-1$ (r — число параметров распределения, оцениваемых по выборке): $K \sim \chi^2_{(k-r-1)}$.

Оцениваются неизвестные параметры с использованием теории точечных оценок (см. источник [3], гл.16 и раздел 3.8. настоящего пособия), некоторые оценки приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4. Оцениваемые параметры и их точечные оценки

Вид распределения	Оцениваемые параметры	Точечные оценки параметров
$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , x \ge 0 \end{cases}$	$\lambda > 0$	$\bar{\lambda} = \dfrac{1}{\bar{x}_{в}}$
$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x<\alpha \\ 1/(\beta-\alpha), & x \in [\alpha, \beta] \\ 0, & x>\beta \end{cases}$	$\alpha, \quad \beta$	$\alpha = \bar{x}_{в} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{D_{в}}$ $\beta = \bar{x}_{в} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{D_{в}}$

$f_X(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$m, \quad \sigma^2$	$m=\overline{x}_в, \quad \sigma^2=\sqrt{D_в}$

Здесь $\overline{x}_в=\dfrac{\sum_{i=1}^{m} x_i\cdot n_i}{n}$ $\quad D_в=\dfrac{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i-\overline{x}_в\right)^2\cdot n_i}{n}$.

Количество интервалов k рекомендуется рассчитывать по формуле Старджеса $k=1+3.3\cdot\lg n,$ где n — объем выборки. Длину i-го интервала принимают равной $h=\dfrac{x_{(n)}-x_{(1)}}{k}$, где $x_{(n)}$—наибольшее, а $x_{(1)}$— наименьшее значение в вариационном ряду.

Пример 4.8. Для среднего балла среди 30-ти групп (с точностью до сотых долей балла) получили выборку x_i:
3.7, 3.85, 3.7, 3.78, 3.6, 4.45, 4.2, 3.87, 3.33, 3.76, 3.75, 4.03, 3.8, 4.75, 3.25, 4.1, 3.55, 3.35, 3.38, 3.05, 3.56, 4.05, 3.24, 4.08, 3.58, 3.98, 3.4, 3.8, 3.06, 4.38. Проверить гипотезу о нормальном распределении среднего балла на уровне значимости $\alpha=0.025$.

Решение. Сгруппируем эту выборку. Наименьший средний балл равен 3.05, наибольший — 4.75. Интервал [3; 4.8] разобьем на 6 частей длиной $h=0.3$, применяя формулу Старджеса ($k=5.875\approx 6$). Подсчитаем частоту n_i (относительную частоту $\dfrac{n_i}{n}$) для каждого интервала и получим сгруппированный статистический ряд (табл. 4.5).

Таблица 4.5. Статистический ряд

Интервалы	[3;3.3)	[3.3;3.6)	[3.6;3.9)	[3.9;4.2)	[4.2;4.5)	[4.5;4.8)
Частоты n_i	4	7	10	5	3	1
Относительные частоты $\dfrac{n_i}{n}$	0.133	0.233	0.3	0.167	0.1	0.033

Сформулируем основную и альтернативную гипотезы.

$H_0: X\sim N(\overline{a},\ \overline{\sigma})$ — случайная величина X (средний балл) подчиняется нормальному закону с параметрами $\overline{a},\ \overline{\sigma}$. Так как истинных значений параметров $a,\ \sigma$ мы не знаем, возьмем их оценки, рассчитанные по выборке: $\overline{a}=3.746,\ \ \overline{\sigma}=0.399.$

H_1: случайная величина X не подчиняется нормальному закону с данными параметрами.

Рассчитаем наблюдаемое значение $K_{набл}$ статистики Пирсона. Эмпирические частоты n_j уже известны (табл. 4.5), а для вычисления вероятностей p_j (в предположении, что гипотеза H_0 справедлива) применим уже известную формулу (свойство **В**):

$$p_j=P(a_j<X<a_{j+1})=\Phi\left(\frac{a_{j+1}-\overline{a}}{\overline{\sigma}}\right)-\Phi\left(\frac{a_j-\overline{a}}{\overline{\sigma}}\right),\ j=1,\ 2,\ ...,\ k$$

и таблицу функции Лапласа (приложение 1). Полученные результаты сведем в таблицу (табл. 4.6). Наблюдаемое значение статистики Пирсона равно $K_{\text{набл}} = 0.978.$

Определим границу критической области. Так как статистика Пирсона измеряет разницу между эмпирическим и теоретическим распределениями, то чем больше ее наблюдаемое значение $K_{\text{набл}}$, тем сильнее довод против основной гипотезы. Поэтому критическая область для этой статистики всегда правосторонняя: $[K_{\text{кр}};\ +\infty)$. Её границу $K_{\text{кр}} = \chi^2_{(k-r-1;\ \alpha)}$ находим по таблицам распределения «хи-квадрат» (приложение 3) и заданным значениям $\alpha = 0.025,$ $k = 6$ (число интервалов), $r = 2$ (параметры a и σ оценены по выборке): $K_{\text{кр}} = \chi^2(6-2-1;\ 0.025) = \chi^2(3;\ 0.025) = 9.4.$

Наблюдаемое значение статистики Пирсона не попадает в критическую область: $K_{\text{набл}} < K_{\text{кр}}$, поэтому *нет оснований отвергать основную гипотезу*.

Вывод: на уровне значимости 0.025 справедливо предположение о том, что средний балл имеет нормальное распределение.

Таблица 4.6. Сравнение наблюдаемых и ожидаемых частот

№ п/п	Интервалы группировки $[a_j; a_{j+1})$	Наблюдаемая частота n_j	Вероятность p_j попадания в *j*-й интервал	Ожидаемая частота $n \cdot p_j$	Слагаемые статистики Пирсона $\dfrac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$
1.	[3; 3.3)	4	0.101	3.032	0.309
2.	[3.3; 3.6)	7	0.225	6.761	0.008
3.	[3.6; 3.9)	10	0.295	8.79	0.166
4.	[3.9; 4.2)	5	0.222	6.665	0.416
5.	[4.2; 4.5)	3	0.098	2.946	0.001
6.	[4.5; 4.8)	1	0.025	0.758	0.077
$\sum$	—	30	0.965	28.95	$K_{\text{набл}} = 0.978.$

5 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3. Часть 1

Указания. «Показательные» типовые задачи и примеры находятся по указанным разделам.

Задача №1	Тема 2.3
Задача №2	Тема 2.4
Задача №3	Темы 2.5–2.7
Задача №4	Темы 2.8–2.9
Задача №5	Тема 2.10
Задача №6	Тема 2.11
Задачи №7–9	Темы 3.1–3.8

Вариант 1.1

1) Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит трех.
2) В урне три белых и пять черных шаров. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что эти шары разных цветов?
3) Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.9. Найти вероятность того,

что в результате двух выстрелов будет хотя бы одно попадание.

4) В тире имеется пять винтовок, вероятности попадания в цель из которых равны соответственно 0.5, 0.6, 0,7, 0,8 и 0,9. Найти вероятность попадания в цель из взятой наугад винтовки.
5) 30% изделий некоторого предприятия – продукция высшего сорта. Приобретено 4 изделия этого предприятия. Какова вероятность того, что 2 из них высшего сорта?
6) Найти вероятность того, что среди 300 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1,5%.
7) Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0.5, для второго – 0.4. *X*– число попаданий в мишень. Требуется для дискретной случайной величины *X:* а) построить ряд распределения; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$; в) найти вероятность $P(X<M(X))$.
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ bx^2+0.5, & 0\le x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$$

Найти: а) константу b; функцию распределения F(x), в ответ ввести F(l/3); F(l/2); в) MX; г) DX; д) P(1/3 < X < 1/2).

9) Весы для тяжелых предметов считаются годными, если отклонение *X* от контрольного веса на более чувствительных весах не превышает 18 г Величина *X* – нормально распределенная и $M(X)=0$, $D(X)=10$ г. Сколько процентов пригодных весов изготавливает завод? Ответ округлить до целых.

Вариант 1.2

1) На тридцати карточках написаны числа от 11 до 40. Найти вероятность того, что сумма цифр числа на взятой наугад карточке равна 5–ти или 9–ти.
2) Студент знает 50 из 60 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает два вопроса, содержащиеся в экзаменационном билете.
3) Игральная кость бросается шесть раз. Найти вероятность того, что число выпавших очков ни разу не повторится.
4) Из урны, содержавшей 3 белых и 7 черных шаров, один шар неизвестного цвета утерян. Найти вероятность извлечь наудачу из урны шар белого цвета.
5) Изделия некоторого предприятия содержат 5% брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу изделий окажутся два бракованных.
6) Полагая вероятность рождения мальчика равной 0.5, найти вероятность того, что среди 200 новорожденных будет: а) 100 мальчиков, б) от 90 до 110 мальчиков.
7) Из коробки, содержащей 3 синих и 4 красных карандаша, наудачу вынимают 3 карандаша. *X* – число красных карандашей среди вынутых. Требуется для дискретной случайной величины *X:* а) построить ряд распределения; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$; в) найти вероятность $P(X<M(X))$.
8) Задана плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} a|x|, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$$

Найти: а) константу a; б) функцию распределения $F(x)$, в ответ ввести значения $F(-1/2)$, $F(1/2)$; в) $M(X)$; г) $D(X)$; д) $P(-1/2 < X < 2)$.

9) Компоненты изготовляемого лекарства отвешиваются на весах, ошибка *X* которых распределена нормально, причём $M(X)= 0$, $\sigma(X)= 0.00003$ г. Норма веса лекарства 0.02 г.

Определить вероятность отбракования лекарства, если максимально допустимый вес принятого к использованию лекарства 0.021г.

Вариант 3

1) В урне 2 красных, 7 зеленых , 5 синих и 10 неокрашенных шаров. Наудачу извлекается один шар. Какова вероятность того, что шар окажется окрашенным?
2) В партии из десяти изделий два бракованных. Наудачу выбирают пять изделий. Какова вероятность того, что среди них одно бракованное?
3) В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Найти вероятность того, что обе пуговицы одного цвета.
4) Имеется десять одинаковых урн, из которых в девяти находятся по 2 белых и 2 черных шара, а в одной – 5 белых и 1 черный шар. Из взятой наугад урны извлечен белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечен из урны, содержавшей 5 белых шаров?
5) Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41–го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из пяти покупателей только одному потребуется обувь этого размера.
6) Среди семян ржи имеется 0.4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить 5 семян сорняков?
7) Игральная кость бросается до появления шестерки, но не более семи раз. *X*– число бросаний кости. Требуется для дискретной случайной величины *X:* а) построить ряд распределения; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$; в) найти вероятность $P(X<M(X))$.
8) Задана плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1 \\ ax^3+b, & -1< x\le 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

Найти: а) константы *a*; *b* б) функцию распределения F(x), в ответ ввести значения F(–1/2), F(1/2); в) $M(X)$; г) $D(X)$; д) P(–1/2 < X < 0.5).

9) Изделие считается пригодным, если отклонение его размера от номинала не превышает по модулю 1.45 мм. Случайные отклонения X распределены нормально, причём $M(X)=0$, $\sigma(X)=1.5$ мм. Определить вероятность того, что случайно взятое изделие является пригодным.

Вариант 4

1) Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит пяти.
2) В урне пять пронумерованных шаров с номерами от 1 до 5. Из урны наугад один за другим вынимаются все шары. Найти вероятность того, что их номера будут идти в возрастающем порядке.
3) Стрелок ведет огонь по приближающейся цели. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0.4 и увеличивается на 0.1 для каждого последующего выстрела. Какова вероятность получить два попадания при трех выстрелах?
4) В шкафу стоят однотипные приборы, из которых 15 новых и 10 уже бывших в эксплуатации. Берутся наугад два прибора и эксплуатируются в течение некоторого времени, после чего возвращаются в шкаф. Затем вторично берутся наугад два прибора. Найти вероятность того, что оба вторично взятых прибора новые.
5) Имеется 10 партий изделий, каждая из которых содержит по 20 изделий первого сорта и 5 изделий второго сорта. Из каждой партии берут по изделию. Найти вероятность того, что взяты изделия одного сорта.
6) Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад уложенных монет число монет,

расположенных «орлом» вверх, находится в пределах от 45 до 55?

7) Вероятность попадания мячом в корзину при каждом бросании равна 0,4. Х– число попаданий при пяти бросках. Требуется для дискретной случайной величины Х: а) построить ряд распределения; б) вычислить М(Х), D(X) и σ(X); в) найти вероятность Р(Х<М(Х)).
8) Задана плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} a(1-x^2), & |x|<1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$$

Найти: а) константу а; б) функцию распределения F(x); в ответ ввести значения F(0), F(1/2); в) M(X),; г) D(X); д) P(0 < X < 0.5).

9) Случайные ошибки измерителя глубины распределены по нормальному закону. Какую среднеквадратическую ошибку должен иметь измеритель глубины, чтобы с вероятностью 0.7 ошибка измерения глубины по модулю была меньше 150 м.

Вариант 5

1) На сорока карточках написаны числа от 21 до 60. Найти вероятность того, что сумма цифр числа на взятой наугад карточке равна пяти или восьми.
2) Слово «интеграл» составлено из букв разрезной азбуки. Из этих восьми карточек наудачу извлекают четыре и складывают в ряд друг за другом в порядке появления. Какова вероятность получить при этом слово «игра»?
3) Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0.96 для первого сигнализатора и 0.98 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.
4) На складе вперемешку хранятся лампы, полученные с четырех заводов: 250 – с первого завода, 525 – со второго, 275 –с третьего и 950 – с четвертого. Вероятность того, что лампа проработает больше 1500 часов, для продукции этих заводов соответственно равна 0.15, 0.3, 0.2 и 0.1. Найти вероятность того, что взятая наугад лампа проработает больше 1500 часов.
5) Имеется пять одинаковых партий изделий. Каждая партия состоит из четырех изделий первого сорта и одного изделия второго сорта. Из каждой партии берут по изделию. Найти вероятность того, что среди выбранных изделий хотя бы три изделия первого сорта.
6) Вероятность для любого абонента позвонить на коммутатор в течение часа равна 0.02. Телефонная станция обслуживает 250 абонентов, Какова вероятность того, что в течение часа позвонят три абонента?
7) Монета подбрасывается шесть раз. Х – произведение числа выпадений «орла» на число выпадений «решки». Требуется для дискретной случайной величины Х: а) построить ряд распределения; б) вычислить М(Х), D(X) и σ(X); в) найти вероятность Р(Х<М(Х)).
8) Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$P_\xi(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & x\in[2,4] \\ 0, & x\notin[2,4] \end{cases}$$

Другая случайная величина связана с ξ функциональной зависимостью $\eta=2\xi^3+1$. Определить математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$ случайной величины η.

9) Средняя дальность полёта снаряда равна *m*. Предполагается, что дальность полёта *X*

распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением 100 м. Найти, какой процент снарядов даёт перелёт от 120 м до150 м.

Вариант 6

1) В урне 10 белых, 15 синих и 25 красных, шаров. Найти вероятность того, что взятый наудачу шар окажется белым.
2) В урне 2 белых, 3 черных и 5 синих шаров. Наудачу извлечены три шара. Какова вероятность того, что все три шара разных цветов?
3) Деталь проходит три операции обработки. Вероятность получения брака на первой операции равна 0.02, на второй – 0.03, на третьей – 0.04. Найти вероятность получения детали без брака после трех операций.
4) На склад поступило 200 подшипников с первого завода, 460 – со второго и 340 – с третьего. Вероятность брака в продукции первого завода равна 0.03, второго – 0.02, третьего – 0.01. Взятый наугад подшипник оказался бракованным. Найти вероятность того, что он изготовлен на первом заводе.
5) Вероятность изготовления годной детали равна 0.7, а вероятность того, что годная деталь первого сорта равна 0.3. Наудачу взято 5 деталей. Найти вероятность того, что среди них ровно три детали первого сорта.
6) Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий выбраковано будет не более чем 17 изделий?
7) В партии из десяти деталей имеется 8 стандартных. Наугад взято 4 детали. X – число стандартных деталей среди взятых деталей. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$P_\xi(x) = \begin{cases} (b \cdot x^2 - a), & x \in [2,4] \\ 0, & x \notin [2,4] \end{cases}$$

Найти *a*, *b*. Другая случайная величина связана с ξ функциональной зависимостью $\eta = 2\xi + 1$. Определить математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$ случайной величины η.

9) Завод изготавливает бруски. Номинальный размер (длина) бруска *d* = 15 мм. Фактический диаметр – случайная величина с математическим ожиданием 15.5 мм и среднеквадратическим отклонением 0.3 мм. При контроле бракуются все бруски, диаметр которых отличается от номинала более, чем на 0.1 мм. Определить процент брака.

Вариант 7

1) Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит семи.
2) В партии из 50 изделий 6 бракованных. Из партии выбираются наудачу 5 изделий. Определить вероятность того, что среди этих пяти изделий два бракованных.
3) В партии 20 изделий, из них 7 нестандартных. Наудачу взято 5 изделий. Найти вероятность того, что среди выбранных изделий хотя бы два нестандартных.
4) Среди двадцати пяти экзаменационных билетов пять «хороших». Найти вероятности того, что: а) первый студент взял «хороший» билет; б) второй студент взял «хороший» билет.
5) Найти вероятность того, что при десяти бросаниях монеты «орел» выпадет пять раз.
6) В магазин отправлено 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка будет разбита, равна 0.003. Найти вероятность того, что магазин

получит хотя бы одну разбитую бутылку.

7) В ящике лежат пять изделий, из которых одно бракованное. Из ящика извлекают изделия одно за другим до тех пор, пока не будет вынуто бракованное изделие. X – число вынутых изделий. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Задана плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ ax^2, & -1 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Найти: а) константу *a*; б) функцию распределения F(x), в ответ ввести значения F(–1/3), F(1/3); в) M(X), г) D(X); д) P(–1/2 < X < 0.5).

9) Случайная величина *X* – отклонение размера изделия от нормы – нормально распределенная, причём M(X)= 0. Найти σ(X), если известно, что P(– 1<*X*<1) = 0.3.

Вариант 8

1) Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число кратно 5?
2) Слово «математика» составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу извлекают отсюда три буквы и располагают друг за другом в порядке извлечения. Какова вероятность того, что при этом получится слово «мак»?
3) Из колоды, содержащей 36 карт, вынимают наудачу четыре карты. Найти вероятность того, что среди взятых карт есть хотя бы один туз.
4) Имеется три урны. Первая содержит 2 белых и 3 черных шара, вторая – 4 белых и 1 черный, третья – 3 белых шара. Наугад берется урна и из нее извлекается шар. Найти вероятность того, что извлечен белый шар.
5) Сделано 14 выстрелов по цели. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.2. Найти вероятность того, что произошло три попадания в цель.
6) Вероятность появления события A в каждом из 1500 испытаний равна 0.4. Найти вероятность того, что число появлений события A заключено между: а) 570 и 630, б) 600 и 660.
7) Игральную кость бросают пять раз. X – число выпадений шести очков. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ b \cdot x^2 + 0.5, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти: а) константу *b*; функцию распределения F(x), в ответ ввести F(l/3); F(l/2); в) M(X); г) D(X); д) P(0.3 < x < 0.9).

9) Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение *X* её контролируемого размера от номинала не превышает 18 мм. Величина *X* распределена нормально, причём σ(X)=9 мм. Найти вероятность того, что деталь будет признана годной.

Вариант 9

1) Все буквы русского алфавита написаны на 33–х карточках. Наудачу извлекается одна

карточка. Найти вероятность того, что на этой карточке написана гласная буква.

2) В урне 6 белых и 4 черных шара. Из урны наудачу извлечены 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них 2 белых и 3 черных.
3) Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа станок потребует внимания рабочего, для первого станка равна 0.9, для второго – 0.8. для третьего – 0.7. Найти вероятность того, что в течение часа по крайней мере один из станков потребует внимания рабочего.
4) В первой урне – 1 белый и 2 черных шара, во второй – 3 белых и 3 черных шара. Из второй урны наугад переложили в первую один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар находился ранее во второй урне, если известно, что он белый.
5) Партия изделий содержит 5% брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу изделий: а) нет ни одного бракованного, б) два бракованных изделия.
6) Вероятность производства бракованной детали равна 0.008. Какова вероятность наиболее вероятного числа бракованных деталей среди наудачу отобранных тысячи деталей?
7) Игральную кость бросают дважды. X– абсолютная величина разности выпавших очков. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$P_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + a, & x \in [2,4] \\ 0, & x \notin [2,4] \end{cases}$$

Найти *a*. Другая случайная величина связана с ξ функциональной зависимостью $\eta = 2\xi^3 + 1$. Определить математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$ случайной величины η.

9) Средняя дальность полёта пули равна 2*m*. Предполагается, что дальность полёта *X* распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением 90 м. Найти, какой процент снарядов даёт перелёт от 100 м до 110 м.

Вариант 10

1) Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит девяти.
2) При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наугад, зная, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.
3) Имеется две одинаковых партии изделий, содержащих по семи изделий первого сорта и по одному изделию второго сорта. Из каждой партии берут по четыре изделия. Найти вероятность того, что состав партий останется одинаковым.
4) В группе из десяти студентов, пришедших на экзамен, три студента подготовлены отлично, четыре – хорошо, два – посредственно и один – плохо. Отлично подготовленный студент знает все 20 вопросов экзаменационных билетов, хорошо подготовленный – 16, посредственно подготовленный – 10, плохо подготовленный – 5. Вызванный наугад студент ответил на все три вопроса билета. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен отлично.
5) Имеется 7 одинаковых партий изделий. Каждая партия состоит из пяти изделий первого сорта и трех изделий второго сорта. Из каждой партии берут наудачу по одному изделию. Найти вероятность того, что взято не более одного изделия второго сорта.

6) Опыт состоит в бросании монеты 4040 раз (опыт Бюффона), «орел» выпал 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления «орла» отклонится от 0.5 не более чем в опыте Бюффона.
7) Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Охотник стреляет до первого попадания, но успевает сделать не более пяти выстрелов. X – число произведенных выстрелов. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность $P(X<M(X))$.
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ ax^2 + 0.5, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти: а) константу *a*; функцию распределения F(*x*), в ответ ввести F(1.3); F(0.5); в) MX; г) DX; д) $P(0.3 < X < 0.8)$.

9) Производится стрельба по цели, имеющей вид полосы шириной 25 м. Прицеливание производится по средней линии полосы. Среднеквадратическое отклонение точки попадания от середины полосы равно 16 м. Найти вероятность попадания в полосу при одном выстреле.

Вариант 11

1) Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что 20 нацело делится на это число ?
2) Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д наудачу выбирают три. Какова вероятность того, что из этих трех карточек можно составить слово «ДВА»?
3) Партия состоит из четырех изделий первого сорта и шести изделий второго сорта. Наудачу взято три изделия. Какова вероятность того, что ровно два из них одного сорта?
4) В урне лежит один шар неизвестного цвета – с равной вероятностью белый или черный. В урну опускается белый шар и затем наудачу извлекается один шар, оказавшийся белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?
5) Имеется пять одинаковых партий изделий. Каждая партия состоит из двух изделий первого сорта и трех изделий второго сорта. Из каждой партии берут по изделию. Найти вероятность того, что среди взятых изделий есть хотя бы одно изделие первого сорта.
6) Книга издана тиражом 10 тысяч экземпляров. Вероятность того, что экземпляр книги сброшюрован неправильно, равна 0.0001. Найти вероятность того, что тираж содержит 5 бракованных книг.
7) В этой задаче требуется для дискретной случайной величины X – сумма очков, выпавших при двух бросаниях игральной кости: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность $P(X<M(X))$.
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ bx^2 + 0.5, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти: а) константу b; функцию распределения F(*x*), в ответ ввести F(l/3); F(l/2); в) MX; г) DX; д) $P(1/3 < X < 1/2)$.

9) Завод изготавливает весы. Весы считаются годными, если отклонение X от контрольного веса на более чувствительных весах не превышает 0.18 г. Величина X – нормально распределенная и M(X)=0, D(X)=0.10 г. Сколько процентов пригодных

весов изготавливает завод?

Вариант 12

1) Подброшены две монеты. Какова вероятность того, что на обеих монетах выпадет «орёл»?
2) В классе 10 мальчиков и 20 девочек. Наугад отобраны трое учащихся. Какова вероятность того, что среди них две девочки и один мальчик?
3) Из двух орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания из первого орудия равна 0.85, из второго – 0.91. Найти вероятность поражения цели, если для ее поражения достаточно одного попадания.
4) Из пяти стрелков двое попадают в цель с вероятностью 0.6, а остальные – с вероятностью 0.4. Наугад выбран стрелок. Определить, какое из двух событий вероятнее: A={выбранный стрелок попал в цель}, B={выбранный стрелок промахнулся}.
5) Всхожесть семян данного сорта равна 80%. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырех.
6) Вероятность появления события в каждом из 625 испытаний равна 0.8. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не более чем на 0.04.
7) Имеется семь заготовок для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из каждой заготовки равна 0.8. X – число заготовок, оставшихся после изготовления первой годной детали. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma - a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P($\alpha < X < \beta$). Исходные данные: a=1.5; b=3.0; α=2.0; β=2.5.

9) Компоненты изготовляемого лекарства отвешиваются на весах, ошибка X которых распределена нормально, причём $M(X)= 0$, $\sigma(X)= 0.003$ г. Норма веса лекарства 0.02 г., максимально допустимый вес принятого к использованию лекарства 0.021 г. Определить вероятность брака.

Вариант 13

1) Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков не превосходит трёх.
2) Слово «интеграл» составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу извлекают отсюда три буквы и располагают друг за другом в порядке извлечения. Какова вероятность получить слово «тир»?
3) В урне 5 белых и 7 черных шаров. Наудачу вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара одного цвета.
4) В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника равна 0.9, для велосипедиста – 0.8, для бегуна – 0.75. Найти вероятность того, что выбранный наугад спортсмен выполнит норму.
5) Изделия некоторого предприятия содержат 6% брака. Найти вероятность того, что

среди пяти взятых наугад изделий не более одного бракованного.

6) Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.001. Найти вероятность хотя бы одного попадания, если число выстрелов равно 5000.
7) По мишени производится четыре выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле равной 0.85. X – число попаданий в мишень. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$; в) найти вероятность $P(X<M(X))$.
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X, функцию распределения $F(x)$ и вероятность $P(\alpha < X < \beta)$. Исходные данные: a=2.5; b=4.0; α=3.0; β=3.5.

9) Изделие успешно проходит контроль, если отклонение его размера от номинала не превышает по модулю 1.3 мм. Случайные отклонения X распределены нормально, причём $M(X)=0$, $\sigma(X)=1.1$ мм. Определить вероятность того, что случайно взятое изделие успешно пройдет контроль.

Вариант 14

1) Наудачу выбрана кость домино из полного набора (28 шт.). Какова вероятность того, что сумма очков на ней равна пяти?
2) В урне 43 белых и 21 черный шар. Наудачу извлечены 9 шаров. Какова вероятность того, что среди них 5 белых и 4 черных.
3) В урне 20 шаров, из них 5 черных. Наудачу взято 3 шара. Найти вероятность того, что среди них есть хотя бы один черный.
4) По самолету производится три выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.5. при втором – 0.6, при третьем – 0.8. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0.3, при двух попаданиях – с вероятностью 0.6. при трех попаданиях – с вероятностью 1. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет выведен из строя.
5) Что вероятнее: выиграть у равносильного противника две партии из четырех или четыре из восьми? Ничейные исходы не учитываются.
6) Опыт состоит в бросании игральной кости 600 раз. Найти вероятность того, что относительная частота выпадения шестерки отклонится от вероятности выпадения шестерки в одном бросании менее чем на 0.02.
7) На пути движения автомобиля имеется четыре светофора, каждый из которых разрешает или запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0.5. X – число светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и $\sigma(X)$; в) найти вероятность $P(X<M(X))$.
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M\left(X\right)$ и дисперсию $D\left(X\right)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P(α <X<β). Исходные данные: a=1.5; b=2.5; α=2.0; β=2.5.

9) Случайные ошибки измерителя глубины распределены по нормальному закону. Какую среднеквадратическую ошибку должен иметь измеритель глубины, чтобы с вероятностью 0.3 ошибка измерения глубины по модулю была меньше 130 м.

Вариант 15

1) Подброшены две монеты. Какова вероятность того, что хотя бы на одной монете выпадет «орёл»?
2) Слово «математика» составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу извлекают отсюда три буквы и располагают друг за другом в порядке извлечения. Какова вероятность того, что при этом получится слово «кит»?
3) Партия содержит 8 изделий первого сорта и 32 изделия второго сорта. Наудачу взято 5 изделий. Найти вероятность того, что среди них ровно 4 изделия одного сорта.
4) Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания для первого охотника равна 0.2, а для второго – 0.6. Произошло только одно попадание. Найти вероятность того, что промахнулся первый охотник.
5) Для прядения смешаны поровну белый и окрашенный хлопок. Какова вероятность среди пяти случайно выбранных волокон смеси обнаружить менее двух окрашенных?
6) Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения в пути для каждого изделия равна 0.0002. Найти вероятность того, что будет повреждено не более трех изделий.
7) Монету подбрасывают шесть раз. X – отношение числа появлений «орла» к числу появлений «решки». Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M\left(X\right)$ и дисперсию $D\left(X\right)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P(α < X < β). Исходные данные: a=1.0; b=3.5; α=2.0; β=2.5.

9) Средняя дальность полёта снаряда равна m. Предполагается, что дальность полёта X распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением 30 м. Найти, какой процент снарядов даёт перелёт от 65 м до100 м.

Вариант 16

1) Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков не превосходит пяти.
2) На один ряд, состоящий из семи мест, случайным образом рассаживаются семь учеников. Найти вероятность того, что три определенных ученика окажутся рядом.
3) В урне 20 шаров, из них 3 черных. Наудачу взято 5 шаров. Найти вероятность того, что среди взятых шаров не более одного черного.
4) На сборку поступают детали с трех станков. Известно, что первый станок дает 0.3% брака, второй – 0.2%, третий – 0.4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого станка поступило 1000, со второго – 2000 и с третьего – 2500 деталей.

5) Что вероятнее, выиграть у равносильного противника две партии из четырех или четыре из восьми? Ничейные исходы не учитываются.
6) Вероятность появления некоторого события при одном испытании равна 0.4. Найти вероятность того, что при 1000 испытаний относительная частота этого события отклонится от вероятности не более чем на 0.05.
7) Два стрелка стреляют по одной мишени, делая по два выстрела. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0.5, для второго – 0.6. X – общее число попаданий в мишень. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \in [\gamma, b] \\ 0, & x \notin [\gamma, b] \end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X, функцию распределения $F(x)$ и вероятность P(α < X < β). Исходные данные: a=1.0; b=3.5; α=2.5; β=3.0.

9) Завод изготавливает бруски. Номинальный размер (длина) бруска d =10 мм. Фактический диаметр – случайная величина с математическим ожиданием 12.5 мм и среднеквадратическим отклонением 0.26 мм. При контроле бракуются все бруски, диаметр которых отличается от номинала более, чем на 0.01 мм. Определить процент брака.

Вариант 17

1) Экзаменационные работы зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что номер наугад взятой работы кратен 10 или 11?
2) Найти вероятность того, что все четыре туза в хорошо перетасованной колоде из 36–и карт окажутся вместе.
3) Три стрелка одновременно стреляют в одну мишень. Найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина, если вероятности попадания в мишень для каждого из стрелков соответственно равны 0.9, 0.8 и 0.7.
4) Изделия определенного вида изготавливаются на трех поточных линиях. Первая линия производит 20% изделий, вторая – 30%, третья – 50%. Каждая линия характеризуется соответственно следующими показателями выхода годных изделий: 95%, 98% и 97%. Найти вероятность того, что взятое наугад и оказавшееся бракованным изделие изготовлено на первой линии.
5) Сделано 14 выстрелов по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.2. Найти наивероятнейшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.
6) Сколько нужно провести опытов с бросанием монеты, чтобы с вероятностью 0.92 можно было ожидать, что относительная частота выпадения «орла» отклонится от вероятности 0.5 менее чем на 0.01 ?
7) Приобретено пять лотерейных билетов. Вероятность выигрыша по одному билету равна 0,05. X – число выигравших билетов. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \in [\gamma, b] \\ 0, & x \notin [\gamma, b] \end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P($\alpha < X < \beta$). Исходные данные: a=1.0; b=2.8; α=2.1; β=2.5.

9) Случайная величина X – отклонение концентрации раствора от нормы – нормально распределенная, причём $M(X)$=0. Найти $\sigma(X)$, если известно, что $P(-0.01<X<0.01)=0.3$.

Вариант 18

1) Подброшены две монеты. Какова вероятность того, что только на одной монете выпадет «орёл»?
2) Десять человек случайным образом рассаживаются за круглым столом. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся сидящими рядом?
3) Имеется две партии изделий. Каждая партия состоит из пяти изделий первого сорта и трех – второго сорта. Из каждой партии наугад берут по два изделия. Найти вероятность того, что состав партий останется одинаковым.
4) В ящик, содержащий три одинаковых детали, брошена одна стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находившихся в ящике.
5) Производится четыре независимых выстрела по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.5. Для разрушения цели достаточно хотя бы одного попадания. Найти вероятность того, что цель будет разрушена.
6) Вероятность получения положительного результата в каждом из опытов равна 0.9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0.98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?
7) Охотник имеет четыре патрона и стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.25. X– число израсходованных патронов. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases} a, & x\in[\gamma,b] \\ 0, & x\notin[\gamma,b] \end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P(α<X<β). Исходные данные: a=1.0; b=2.0; α=1.2; β=1.8.

9) Деталь, взятая с конвейера, считается годной, если отклонение X её контролируемого размера от номинала не превышает 0.15мм. Величина X распределена нормально, причём $\sigma(X)$=0.9мм. Найти вероятность того, что деталь не будет признана браком.

Вариант 19

1) Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков не превосходит семи.
2) В партии 20 изделий, из них 7 нестандартных. Наудачу взято 5 изделий. Найти вероятность того, что среди выбранных изделий 2 нестандартных.
3) В партии десять изделий, из которых три нестандартных. Наудачу взято пять изделий. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одно нестандартное.
4) Вероятность того, что изделие некоторого предприятия удовлетворяет стандарту, равна 0.95. Упрощенная схема проверки качества дает положительный результат с вероятностью 0.98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, и с вероятностью 0.05

для изделий, не удовлетворяющих стандарту. Найти вероятность того, что изделие, признанное стандартным, действительно стандартное.

5) Производится восемь независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна 0.1. Найти вероятность того, что событие *A* появится в этих испытаниях хотя бы один раз.
6) Вероятность успеха в каждом из 400 испытаний равна 0.8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0.9876 абсолютная величина отклонения относительной частоты успеха от его вероятности не превышала ε.
7) Игральную кость бросают до двух подряд появлений шестерки, но не более шести раз. X– число бросаний. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases} a, & x\in[\gamma,b] \\ 0, & x\notin[\gamma,b] \end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P(α<X<β). Исходные данные: a=0.5; b=1.0; α=–0.5; β=0.5.

9) Средняя дальность полёта пули равна *m*. Предполагается, что дальность полёта *X* распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением 50м. Найти, какой процент снарядов даёт перелёт от 150 м до 200 м.

Вариант 20

1) Наудачу выбирается целое число от 1 до 30 включительно. Какова вероятность того, что оно является делителем числа 30?
2) Из десяти лотерейных билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов находятся оба выигрышных.
3) Стрелок стреляет три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.8. при втором – 0.7, при третьем – 0.6. Какова вероятность того, что будет только одно попадание?
4) Имеется шесть одинаковых урн. В пяти урнах находится по 2 белых и 2 черных шара, а в одной – 5 белых и 1 черный шар. Из взятой наугад урны извлечен шар, оказавшийся белым. Найти вероятность того, что шар взят из урны, содержавшей 5 белых шаров.
5) Производится четыре независимых выстрела по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.5. Для разрушения цели достаточно хотя бы одного попадания. Найти вероятность того, что цель будет разрушена
6) Вероятность появления события *A* в каждом испытании равна 0.8. Сколько нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью 0.9 можно было ожидать, что событие *A* появится не менее чем 75 раз?
7) Из пяти ключей к замку подходит только один. X – число неудачных попыток открыть замок. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases} a, & x\in[\gamma,b] \\ 0, & x\notin[\gamma,b] \end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P(α<X<β). Исходные данные: a=0.5; b=5.0; α=3.5; β=4.0.

9) Производится стрельба по цели, имеющей вид полосы шириной 65 м. Прицеливание производится по средней линии полосы. Среднеквадратическое отклонение точки попадания от середины полосы равно 18 м. Найти вероятность попадания в полосу при одном выстреле.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3. Часть 2

Задача 2.1. Путем опроса получены данные (n=80):

Выполнить задания:

а) получить дискретный вариационный ряд и статистическое распределение выборки;

б) построить полигон частот;

в) составить ряд распределения относительных частот;

г) составить эмпирическую функцию распределения;

д) построить график эмпирической функции распределения;

е) найти основные числовые характеристики вариационного ряда (по возможности использовать упрощающие формулы для их нахождения):

1) выборочное среднее $\overline{x}_B$;

2) выборочную дисперсию $D(X)$;

3) выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$;

4) коэффициент вариации V;

5) интерпретировать полученные результаты.

Задача 2.2[2]***.*** В таблице (исходные данные для задания 2) приведены размеры диаметров головок 100 заклепок (в мм), изготовленных станком (который делает их тысячами). Все контролируемые условия, в которых работал станок, оставались неизменными. В тоже время диаметры головок раз от разу несколько изменялись. Характерная черта случайных колебаний: изменения выглядят бессистемными, хаотичными.

Выполнить задания:

1. Для выборки диаметров головок заклепок вычислить *среднее значение, медиану, дисперсию, минимальный и максимальный элементы*.

2. Для выборки диаметров шляпок заклепок построить гистограмму частот с шагом группировки h (например, 0,075мм) на интервале от X_{min} (например, 13мм) до X_{max} (например, 13,75мм) (без учета сильно выделяющегося наблюдения)

3. Используя инструмент <*Описательная статистика*> создать таблицу основных статистических характеристик и разместить ее с соответствующим заголовком справа от исходных данных. Уметь объяснить смысл каждой статистики.

4. Обработать данные с целью выдвижения гипотезы о виде распределения наблюдаемой случайной величины и ее проверки.

5. Проверить выдвинутую гипотезу. Сделать выводы.

Вариант 2.1

Исходные данные для задания 1 варианта 2.1

1 4 1 4 3 3 3 1 0 6	1 2 3 5 1 4 3 3 5 1	5 2 4 3 2 2 3 3 1 3
2 3 1 1 4 3 1 4 3 1	6 4 3 4 2 3 2 3 3 1	4 6 1 4 5 3 4 2 4 5
2 6 4 1 3 3 4 1 3 1	0 1 4 6 4 7 4 1 3 5	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.1

13,53	13,34	13,45	13,42	13,29	13,38	13,45	13,50

[2] Рекомендуется выполнять в Excel или в MathCad.

13,55	13,33	13,32	13,69	13,46	13,32	13,32	13,48
13,29	13,25	13,44	13,60	13,43	13,51	13,43	13,38
13,24	13,28	13,58	13,31	13,31	13,45	13,43	13,44
13,34	13,49	13,50	13,38	13,48	13,43	13,37	13,29
13,54	13,33	13,36	13,46	13,23	13,44	13,38	13,27
13,66	13,26	13,40	13,52	13,59	13,48	13,46	13,40
13,43	13,26	13,50	13,38	13,43	13,34	13,41	13,24
13,42	13,55	13,37	13,41	13,38	13,14	13,42	13,52
13,38	13,54	13,30	13,18	13,32	13,46	13,39	13,35
13,34	13,37	13,50	13,61	13,42	13,32	13,35	13,40
13,57	13,31	13,40	13,36	13,28	13,58	13,58	13,38
13,32	13,20	13,43	13,34				

Вариант 2.2

Исходные данные для задания 1 варианта 2.2

1 5 1 4 2 2 3 1 0 6	5 2 3 5 1 4 1 1 5 1	5 2 4 3 2 2 3 0 1 3
2 3 2 3 4 3 1 4 3 1	3 4 3 4 2 3 2 3 3 1	3 6 1 4 5 3 4 2 4 5
1 2 4 1 3 3 4 1 3 1	0 1 4 6 4 7 4 1 0 5	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.2

13,33	13,33	13,31	13,45	13,39	13,45	13,41	13,45
13,39	13,43	13,54	13,64	13,40	13,55	13,40	13,26
13,42	13,50	13,32	13,31	13,28	13,52	13,46	13,63
13,38	13,44	13,52	13,53	13,37	13,33	13,24	13,13
13,53	13,53	13,39	13,57	13,51	13,34	13,39	13,47
13,51	13,48	13,62	13,58	13,57	13,33	13,51	13,40
13,30	13,48	13,40	13,57	13,51	13,40	13,52	13,56
13,40	13,34	13,23	13,37	13,48	13,48	13,62	13,35
13,40	13,36	13,45	13,48	13,29	13,58	13,44	13,56
13,28	13,59	13,47	13,46	13,62	13,54	13,20	13,38
13,43	13,36	13,56	13,51	13,47	13,40	13,29	13,20
13,46	13,44	13,42	13,29	13,41	13,39	13,50	13,48
13,26	13,37	13,28	13,39				

Вариант 2.3

Исходные данные для задания 1 варианта 2.3

2 1 1 3 2 2 3 1 0 5	6 2 3 5 0 4 1 1 5 0	1 2 4 3 2 2 3 0 1 3
1 3 2 4 4 3 1 4 3 6	1 4 3 4 2 3 2 3 3 1	2 6 1 4 5 3 4 2 4 5
0 2 4 1 3 3 4 1 3 6	1 0 4 6 4 7 4 1 0 6	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.3

12,52	12,34	12,45	12,42	12,39	12,38	12,45	12,50
12,55	12,22	12,02	12,69	12,46	12,22	12,22	12,48
12,39	12,35	12,44	12,60	12,42	12,51	12,42	12,28

12,24	12,28	12,58	12,21	12,21	12,45	12,42	12,44
12,24	12,49	12,50	12,28	12,48	12,42	12,27	12,29
12,54	12,22	12,26	12,46	12,32	12,44	12,28	12,37
12,66	12,26	12,40	12,52	12,59	12,48	12,46	12,40
12,42	12,26	12,50	12,28	12,42	12,24	12,41	12,24
12,42	12,55	12,27	12,41	12,28	12,14	12,42	12,52
12,28	12,54	12,10	12,18	12,22	12,46	12,29	12,25
12,24	12,37	12,50	12,61	12,42	12,32	12,25	12,40
12,57	12,21	12,40	12,26	12,18	12,58	12,58	12,38
12,22	12,20	12,42	12,24				

Вариант 2.4

Исходные данные для задания 1 варианта 2.4

2 0 0 3 2 2 3 1 0 5	5 4 3 5 0 4 1 1 5 0	0 1 3 3 2 2 3 0 1 3
1 3 2 4 4 3 1 4 3 6	1 5 4 5 2 3 2 3 3 1	2 6 1 4 5 3 4 2 4 5
1 1 2 1 3 3 4 1 3 6	6 6 7 6 4 7 4 1 0 6	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.4

14,14	14,54	14,41	14,45	14,19	14,45	14,41	14,45
14,29	14,24	14,54	14,64	14,40	14,55	14,20	14,26
14,42	14,50	14,42	14,21	14,28	14,52	14,76	14,64
14,48	14,60	14,52	14,54	14,47	14,12	14,23	14,15
14,54	14,54	14,49	14,57	14,51	14,34	14,49	14,47
14,51	14,48	14,62	14,58	14,57	14,33	14,51	14,40
14,40	14,48	14,40	14,57	14,51	14,40	14,52	14,56
14,40	14,44	14,24	14,47	14,48	14,48	14,62	14,35
14,40	14,46	14,45	14,48	14,29	14,58	14,33	14,56
14,28	14,59	14,47	14,46	14,62	14,54	14,20	14,38
14,44	14,46	14,56	14,51	14,47	14,40	14,29	14,20
14,46	14,44	14,42	14,29	14,41	14,49	14,50	14,18
14,26	14,47	14,28	14,49				

Вариант 2.5

Исходные данные для задания 1 варианта 2.5

2 0 0 3 2 2 3 1 0 5	5 4 3 5 0 4 1 1 5 0	0 1 3 3 2 2 3 0 1 3
1 3 2 4 4 3 1 4 3 6	1 5 4 5 2 3 2 3 3 1	2 6 1 4 5 3 4 2 4 5
1 1 2 1 3 3 4 1 3 6	6 6 7 6 4 7 4 1 0 6	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.5

11,58	11,14	11,45	11,42	11,29	11,38	11,45	11,50
11,55	11,11	11,12	11,69	11,46	11,12	11,12	11,48
11,29	11,25	11,44	11,60	11,41	11,51	11,41	11,18
11,24	11,28	11,58	11,61	11,33	11,45	11,41	11,44
11,14	11,49	11,50	11,28	11,48	11,41	11,17	11,39

11,54	11,11	11,16	11,46	11,21	11,44	11,18	11,17
11,66	11,26	11,40	11,52	11,59	11,48	11,46	11,40
11,41	11,26	11,50	11,18	11,42	11,14	11,41	11,24
11,42	11,55	11,17	11,41	11,38	11,24	11,42	11,52
11,18	11,54	11,10	11,18	11,22	11,46	11,19	11,25
11,24	11,17	11,50	11,63	11,42	11,12	11,25	11,40
11,57	11,11	11,40	11,16	11,28	11,58	11,58	11,18
11,12	11,20	11,42	11,14				

Вариант 2.6

Исходные данные для задания 1 варианта 2.6

0 4 1 4 3 3 3 0 0 6	1 2 3 5 1 4 3 3 5 1	1 2 4 3 2 2 3 3 0 3
1 3 1 1 4 0 1 4 3 1	1 4 3 1 2 3 2 3 3 1	4 1 1 4 5 3 4 2 4 5
2 6 4 1 3 3 4 1 3 1	0 1 4 6 4 7 4 0 3 5	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.6

10,51	10,24	10,45	10,42	10,29	10,08	10,45	10,50
10,55	10,10	10,02	10,69	10,46	10,02	10,02	10,48
10,29	10,25	10,44	10,60	10,40	10,51	10,40	10,08
10,24	10,28	10,58	10,01	10,61	10,45	10,43	10,44
10,14	10,49	10,50	10,08	10,48	10,40	10,07	10,29
10,54	10,00	10,06	10,46	10,23	10,44	10,08	10,27
10,66	10,26	10,40	10,52	10,59	10,48	10,46	10,43
10,43	10,26	10,50	10,08	10,40	10,04	10,41	10,24
10,42	10,55	10,47	10,41	10,08	10,14	10,42	10,52
10,68	10,54	10,64	10,18	10,02	10,46	10,19	10,15
10,14	10,07	10,57	10,61	10,42	10,12	10,15	10,43
10,57	10,01	10,44	10,06	10,28	10,58	10,58	10,08
10,02	10,20	10,45	10,04				

Вариант 2.7

Исходные данные для задания 1 варианта 2.7

2 5 1 4 3 3 4 1 0 6	5 1 4 1 2 3 3 3 5 1	5 2 4 3 2 0 3 3 1 3
3 2 1 1 4 3 1 4 3 0	2 3 3 1 6 4 3 4 2 3	1 6 1 4 5 3 4 2 4 1
6 3 3 4 1 6 4 1 3 0	0 1 4 6 1 0 1 1 3 2	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.7

18,51	18,04	18,45	18,42	18,29	18,10	18,45	18,50
18,55	18,08	18,02	18,69	18,46	18,02	18,12	18,40
18,29	18,25	18,44	18,60	18,41	18,51	18,41	18,10
18,24	18,28	18,58	18,11	18,01	18,45	18,48	18,44
18,04	18,49	18,50	18,08	18,48	18,40	18,07	18,29
18,54	18,08	18,86	18,46	18,28	18,44	18,08	18,27

18,66	18,26	18,40	18,52	18,59	18,48	18,46	18,40
18,48	18,26	18,50	18,88	18,48	18,84	18,41	18,24
18,42	18,55	18,87	18,41	18,88	18,14	18,42	18,52
18,88	18,54	18,80	18,18	18,82	18,46	18,89	18,85
18,84	18,87	18,50	18,61	18,42	18,82	18,85	18,40
18,57	18,81	18,40	18,86	18,28	18,58	18,58	18,88
18,82	18,20	18,48	18,84				

Вариант 2.8

Исходные данные для задания 1 варианта 2.8

1 4 7 4 3 3 3 1 0 6	1 2 3 5 1 4 7 3 5 1	5 2 4 3 7 2 3 7 1 3
1 3 1 1 4 3 1 4 7 1	1 4 3 4 2 3 2 3 3 1	5 6 1 4 5 7 4 2 4 5
1 7 4 1 7 3 4 7 3 1	0 1 4 6 4 7 4 1 3 5	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.8

11,51	11,14	11,45	11,42	11,29	11,18	11,45	11,50
11,55	11,11	11,12	11,69	11,46	11,12	11,12	11,48
11,29	11,25	11,44	11,60	11,41	11,51	11,41	11,18
11,24	11,28	11,58	11,11	11,11	11,45	11,41	11,44
11,14	11,49	11,50	11,18	11,48	11,41	11,17	11,29
11,54	11,11	11,16	11,46	11,21	11,44	11,18	11,27
11,66	11,26	11,40	11,52	11,59	11,48	11,46	11,40
11,41	11,26	11,50	11,18	11,41	11,14	11,41	11,24
11,42	11,55	11,17	11,41	11,18	11,14	11,42	11,52
11,18	11,54	11,10	11,18	11,12	11,46	11,19	11,15
11,14	11,17	11,50	11,61	11,42	11,12	11,15	11,40
11,57	11,11	11,40	11,16	11,28	11,58	11,58	11,18
11,12	11,20	11,41	11,14				

Вариант 2.9

Исходные данные для задания 1 варианта 2.9

0 4 1 4 3 3 3 1 0 6	1 2 3 5 0 4 3 3 5 1	5 2 4 3 2 2 3 3 1 3
0 3 1 1 4 0 1 4 3 1	6 4 3 4 2 3 2 3 1 1	0 1 1 4 5 3 4 2 4 5
0 6 4 1 3 3 4 1 3 1	1 1 4 6 4 2 4 1 3 5	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.9

19,50	19,14	19,45	19,42	19,29	19,08	19,45	19,50
19,55	19,19	19,02	19,69	19,46	19,02	19,92	19,48
19,29	19,25	19,44	19,60	19,49	19,51	19,49	19,08
19,24	19,28	19,58	19,11	19,01	19,45	19,49	19,44
19,14	19,49	19,50	19,08	19,48	19,49	19,07	19,29
19,54	19,19	19,06	19,46	19,29	19,44	19,18	19,27
19,16	19,26	19,40	19,52	19,59	19,48	19,46	19,40
19,49	19,26	19,50	19,08	19,49	19,04	19,41	19,24

19,42	19,55	19,17	19,41	19,08	19,14	19,42	19,52
19,08	19,54	19,10	19,18	19,02	19,46	19,09	19,05
19,04	19,07	19,50	19,61	19,42	19,02	19,05	19,40
19,57	19,01	19,40	19,06	19,28	19,58	19,58	19,08
19,02	19,20	19,49	19,04				

Вариант 2.10

Исходные данные для задания 1 варианта 2.10

1 4 1 4 8 8 8 1 0 6	1 2 8 5 1 4 8 8 5 1	5 2 4 8 2 2 8 8 1 8
2 8 1 1 4 8 1 4 8 1	6 4 8 4 2 8 2 8 8 1	4 6 1 4 5 8 4 2 4 5
2 6 4 1 8 8 4 1 8 1	0 1 4 6 4 7 4 1 8 5	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.10

17,57	17,74	17,45	17,42	17,29	17,78	17,45	17,50
17,55	17,77	17,72	17,69	17,46	17,72	17,72	17,48
17,29	17,25	17,44	17,60	17,47	17,51	17,47	17,78
17,24	17,28	17,58	17,71	17,71	17,45	17,47	17,44
17,74	17,49	17,50	17,78	17,48	17,47	17,77	17,29
17,54	17,77	17,76	17,46	17,27	17,44	17,78	17,27
17,66	17,26	17,40	17,52	17,59	17,48	17,46	17,40
17,47	17,26	17,50	17,78	17,47	17,74	17,41	17,24
17,42	17,55	17,77	17,41	17,78	17,14	17,42	17,52
17,78	17,54	17,70	17,18	17,72	17,46	17,79	17,75
17,74	17,77	17,50	17,61	17,42	17,72	17,75	17,40
17,57	17,71	17,40	17,76	17,28	17,58	17,58	17,78
17,72	17,20	17,47	17,74				

6.1. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 3 (ч.2)

Задача 2.1. Путем опроса получены следующие данные (n=80):

2 4 2 4 1 1 1 2 0 6	1 2 1 2 2 4 1 1 5 1	0 2 4 1 2 2 1 1 1 1
1 1 1 1 2 1 1 4 1 1	7 4 1 4 2 1 2 1 1 1	4 1 1 4 5 1 4 2 4 5
1 6 4 1 1 2 4 1 1 1	0 0 4 6 4 7 4 1 1 5	

Выполнить задания:

а) получить дискретный вариационный ряд и статистическое распределение выборки;

б) построить полигон частот;

в) составить ряд распределения относительных частот;

г) составить эмпирическую функцию распределения;

д) построить график эмпирической функции распределения;

е) найти основные числовые характеристики вариационного ряда (по возможности использовать упрощающие формулы для их нахождения):

1) выборочное среднее $\overline{x}_B$;

2) выборочную дисперсию $D(X)$;

1) выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$;

4) коэффициент вариации V;

5) интерпретировать полученные результаты.

Решение.

а) Для составления дискретного вариационного ряда отсортируем данные опроса по величине и расположим их в порядке возрастания:

0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 7 7.

Статистическое распределение выборки представлено в таблице 6.1, в которой первая строка – *варианты* (наблюдаемые значение), вторая строка – *частоты появления этих вариант*).

Таблица 6.1. Варианты и их частоты

x_i	0	1	2	1	4	5	6	7
n_i	4	11	14	24	16	4	1	2

б) Для построения полигона частот найдем относительные частоты ($w_i = n_i / n$, где $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$, где m – число различных значений признака X ($m \le n$) и в данном примере m=8), которые будем вычислять с одинаковой точностью. Полигон частот – ломаная линия, соединяющая точки с координатами $\left(x_i, w_i\right)$ (Рис. 6.1). Расчеты запишем в табл. 6.2.

Таблица 6.2. Относительные частоты и накопленные частоты

x_i	n_i	Относительные частоты w_i	Накопленные частоты
0	4	0.050	0.050
1	11	0.161	0.211
2	14	0.175	0.188
1	24	0.100	0.688
4	16	0.200	0.888
5	4	0.050	0.918
6	1	0.018	0.975
7	2	0.025	1.000
Сумма	80	1	

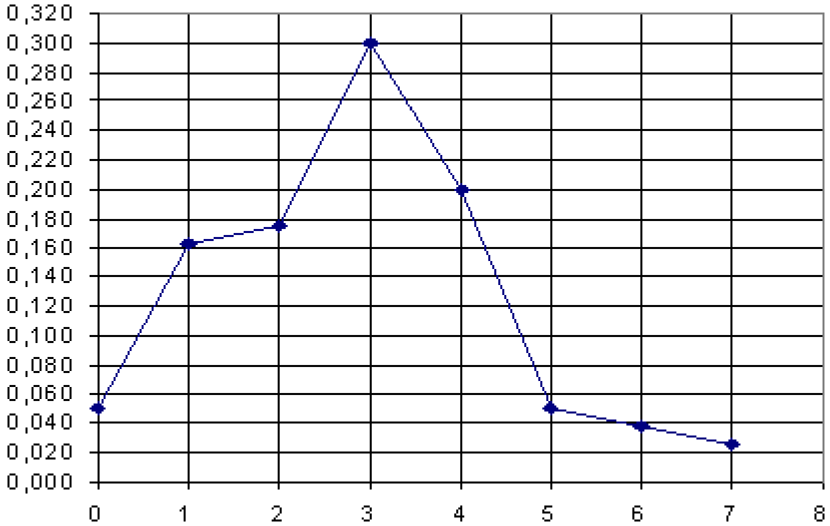


Рис. 6.1. Полигон частот вариационного ряда

в) Запишем ряд распределения (табл. 6.1) относительных частот в виде таблицы 1, в которой первая строка – варианты (изучаемый признак), вторая строка – относительные частоты (*частости*).

Таблица 6.1. Распределение относительных частот появления признака

x_i	0	1	2	1	4	5	6	7
n_i	0.05	0.161	0.175	0.1	0.2	0.05	0.018	0.025

г) Эмпирическую функцию распределения найдем, используя накопленные частоты (табл. 6.1, столбик 4) и формулу (4.1):

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0.05, & 0<x\le 1,\\ 0.213, & 1<x\le 2,\\ 0.388, & 2<x\le 3,\\ 0.688, & 3<x\le 4,\\ 0.888, & 4<x\le 5,\\ 0.938, & 5<x\le 6,\\ 0.975, & 6<x\le 7,\\ 1 & x>7.\end{cases}$$

д) Построим график эмпирической функции распределения (рис. 6.2), используя значения, полученные в пункте г).

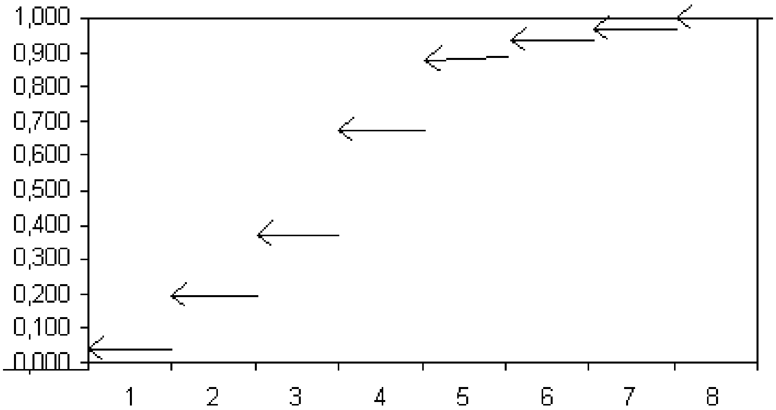


Рис. 6.2. График эмпирической функции распределения

е) Для вычисления выборочного среднего $\overline{x}_{B}$ и выборочной дисперсии D_{B} с использованием приведенных выше формул, удобно составлять расчетную таблицу 6.2:

Таблица 6.2. Расчетная таблица для вычисления выборочных величин

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$\left(x_i-\overline{x}_{B}\right)^2$	$\left(x_i-\overline{x}_{B}\right)^2 \cdot n_i$
0	4	0	8.1796	12.7184
1	11	11	1.4596	44.9748
2	14	28	0.7196	10.1544
1	24	72	0.0196	0.4704
4	16	64	1.2996	20.7916
5	4	20	4.5796	18.1184
6	1	18	9.8596	29.5788
7	2	14	17.1196	14.2792
Сумма	80	229		191.488

Используя суммы, полученные в табл. 6.2, определим искомые величины.

1) Выборочную среднюю $\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{229}{80} \approx 2.86.$

2) Выборочную дисперсию $D_B = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x}_B\right)^2 \cdot n_i}{n} = \frac{191.488}{80} \approx 2.39.$

1) Выборочное среднее квадратическое отклонение

$\sigma_B(X) = \sqrt{D_B} = \sqrt{2.39} \approx 1.55.$

4) Коэффициент вариации $V = \frac{\sigma_B(X)}{\overline{x}_B} \cdot 100\% = \frac{1.55}{2.86} \cdot 100\% \approx 54.2\%.$

5) Интерпретация полученных результатов:

- величина $\overline{x}_B \approx 2.86$ характеризует среднее значение признака *X*;
- среднее квадратическое отклонение $\sigma_B(X)$ описывает абсолютный разброс значений показателя X относительно среднего значения и в данном случае составляет $\sigma_B(X) \approx 1.55$;
- коэффициент вариации *V* характеризует относительную изменчивость показателя *X*, то есть относительный разброс вокруг его среднего значения $\overline{x}_B$, и в данном случае составляет $V \approx 54.2\%.$.

Ответ: $\overline{x}_B \approx 2.86$; $D_B \approx 2.39$; $\sigma_B(X) \approx 1.55$; $V \approx 54.2\%.$

Задача 2. См. задание 2 в КР 3 (часть 2)

Алгоритм выполнения задания по проверке статистической гипотезы о виде распределения[3]

1. Определить размах выборки: R=$X_{Max} - X_{Min}$.
2. Назначить число карманов, *m*=8 (любое число от 7 до 25).
3. Найти среднее значение (*M*) и стандартное отклонение (σ).
4. Найти левые и правые границы для карманов, пронумерованных от 0 до *m*. При этом для кармана № 0 правая граница равна минимуму, для кармана № 1 правая граница равна минимальному значению плюс длина кармана, и т.д.
5. Построить гистограмму и выдвинуть гипотезу о виде распределения.
6. Найти значения предполагаемой ФР на границах карманов:

Так, для нормального распределения существует встроенная функция НОРМРАСПР(), где в качестве последнего аргумента печатаем ИСТИНА.

7. Найти теоретические вероятности попадания в карман (разность ФР по границам карманов).
8. Найти теоретические частоты (произведение теоретических вероятностей попадания в карман на объем выборки).
9. Вычислить столбец величин:

(выборочная частота–теоретическая частота)^2 / теоретическая частота.

Сумма этих величин является значением выборочного $\chi^2_{выб}$ критерия.

[3] Рекомендуется выполнять в пакетах Excel или MathCad, здесь указаны встроенные функции Excel.

10. Найти значение теоретического критерия согласия $\chi^2_{теор}$ при заданном уровне значимости (у нас 0.05) можно по формуле ХИ2ОБР (вероятность; число степеней свободы), где число степеней свободы $k=m-1-r$, например, $r=2$ для нормального распределения.

11. Сравниваем $\chi^2_{выб}$ с $\chi^2_{теор}$, делаем вывод: если $\chi^2_{выб} < \chi^2_{теор}$, то нет оснований отвергать основную гипотезу, в противном случае основная гипотеза не принимается.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2}\, dz$$

Таблица значений функции

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997
4	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998
4,1	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49999	0,49999
4,2	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999
4,3	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999
4,4	0,49999	0,49999	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

(продолжение)

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00007	0,00007	0,00007	0,00006	0,00006
4,2	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00004	0,00004	0,00004
4,3	0,00004	0,00004	0,00004	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003
4,4	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002
4,5	0,00002	0,00002	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,6	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,7	0,000006									
4,8	0,000004									
4,9	0,000002									
5	0,00000									

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
1	6.6	5.0	3.8	0.0039	0.00098	0.00016
2	9.2	7.4	6.0	0.103	0.051	0.020
3	11.3	9.4	7.8	0.352	0.216	0.115
4	133	11.1	9.5	0.711	0.484	0.297
5	151	12.8	11.1	1.15	0.831	0.554
6	16.8	14.4	12.6	1.64	1.24	0.872
7	18.5	16.0	14.1	2.17	1.69	1.24
8	20.1	17.5	15.5	2.73	2.18	1.65
9	21.7	19.0	16.9	3.33	2.70	2.09
10	23.2	20.5	18.3	3.94	3.25	2.56
11	24.7	21.9	19.7	4.57	3.82	3.05
12	26.2	23.3	21 .0	5.23	4.40	3.57
13	27.7	24.7	22.4	5.89	5.01	4.11
14	29.1	26.1	23.7	6.57	5.63	4.66
15	30.6	27.5	25.0	7.26	6.26	5.23
16	32.0	28.8	26.3	7.96	6.91	5.81
17	33.4	30.2	27.6	8.67	7.56	6.41
18	34.8	31.5	28.9	9.39	8.23	7.01
19	36.2	32.9	30.1	10.1	8.91	7.63
20	37.6	34.2	31.4	10.9	9.59	8.26
21	38.9	35.5	32.7	11.6	10.3	8.90
22	40.3	36.8	33.9	12.3	11.0	9.54
23	41.6	38.1	35.2	13.1	11.7	10.2
24	43.0	39.4	36.4	13.8	12.4	10.9
25	44.3	40.6	37.7	14.6	13.1	11.5
26	45.6	41.9	38.9	15.4	13.8	12.2
27	47.0	43.2	40.1	16.2	14.6	12.9
28	48.3	44.5	41.3	16.9	15.3	13.6
29	49.6	45.7	42.6	17.7	16.0	14.3
30	50.9	47.0	43.8	18.5	16.8	15.0

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
1	6.31	12.7	31.82	63.7	318.3	637.0
2	2.92	4.30	6.97	9.92	22.33	31.6
3	2.35	3.18	4.54	5.84	10.22	12.9
4	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	2.01	2.57	3.37	4.03	5.89	6.86
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.40
8	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.80	2.20	2.72	3.11	4.03	4.44
12	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.95
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.73	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.72	2.07	2.51	2.82	3.51	3.79
23	1.71	2.07	2.50	2.81	3.59	3.77
24	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.74
25	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.72
26	1.71	2.06	2.48	2.78	3.44	3.71
27	1.71	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
29	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.66	1.98	2.36	2.62	3.17	3.37
∞	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29