МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»
(КНИТУ-КАИ)
Чистопольский филиал «Восток»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

по дисциплине

«Математика ч.1»

Индекс по учебному плану: **Б1.О.07.01**
Направление подготовки: 12.03.01 Приборостроение
Квалификация: Бакалавр
Профиль подготовки: Приборостроение
Вид профессиональной деятельности: проектно-конструкторский, производственно-технологический

Рекомендованы УМК ЧФ КНИТУ-КАИ

Чистополь
2023 г.

Линейная алгебра

§ 1. Определители второго и третьего порядков. Свойства определителей.

Определение 1: Определителем второго порядка называется число вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются элементами определителя.
Элементы a_{11}, a_{12} образуют первую строку определителя, a_{21}, a_{22} − вторую строку.

Элементы a_{11}, a_{21} образуют первый столбец определителя; a_{12}, a_{22} -второй.
Элементы a_{12}, a_{22} образуют главную диагональ; a_{21}, a_{12} − побочную.

Определение 2: Определитель второго порядка равен разности произведений элементов, лежащих на главной и побочной диагоналях.

Например:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 4 \cdot (-3) = -4 + 12 = 8$$

Определение 3: Определителем третьего порядка называется число вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Правило Саррюса - вычисления определителя третьего порядка - схематически можно записать следующим образом:

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \cdot 3 + (-2) \cdot (-4) \cdot 4 - 3 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot (-4) \cdot (-3) - (-2) \cdot 2 \cdot 2 = 0$$

§ 2. Свойства определителей.

Свойство 1. Величина определителя не изменится, если его строки и столбцы поменять местами

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Свойство 2. Перестановка двух столбцов или двух строк определителя равносильна умножению его на (-1).

Свойство 3. Если определитель имеет две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то он равен 0.

Свойство 4. Умножение всех элементов одного столбца определителя на любое число к равносильно умножению определителя на это число к.

Свойство 5. Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки равны нулю, то определитель равен нулю.

Свойство 6. Если определитель имеет две пропорциональные строки или два пропорциональных столбца, то он равен 0.

Определение 1. Минором элемента определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием строки и столбца на пересечении которых стоит элемент.

Например:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Определение 2. Алгебраическим дополнением элемента определителя третьего порядка называется минор этого элемента, взятый со знаком "+", если сумма индексов элемента четная, и со знаком "-", если нечетная.

Например: $A_{11} = M_{11}, A_{32} = -M_{32}$

Свойство 7. Определитель третьего порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки или столбца на соответствующие им алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

Представление определителя в таком виде называется разложением определителя.

Аналогично можно разложить определитель по элементам любой другой строки или столбца.

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2-12) - 2 \cdot (-4+9) + 4 \cdot (8-3) =$$
$$= -10 - 10 + 20 = 0$$

Задания для практической работы.

Используя определения и свойства определителей, вычислить определители третьего порядка.

1.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 1.2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$ 1.3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

1.4. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ 1.5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix}$ 1.6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$

§ 3. Решение систем линейных уравнений

Пусть задана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = h_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = h_2 \\ a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = h_3 \end{cases} \quad (1)$$

Определение 1. Определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных системах, называется главным определителем системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определение 2. Определители Δx, Δy, Δz, полученные из определителя Δ заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов - столбцом свободных членов называются вспомогательными определителями системы.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} \\ a_{31} & h_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix},$$

Определение 3. Совокупность чисел (а, в, с) называется решением системы, если каждое уравнение системы обращается в тождество после подстановки в него чисел а, в, с вместо соответствующих х, у,z.

Определение 4. Системы, имеющие решения называются совместными; не имеющие решение называются несовместными.

Правило Крамера.

Если главный определитель системы $\Delta \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое определяется формулами:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Если Δ= 0 и Δx=0, Δy=0, Δz=0, то система имеет бесчисленное множество решений.

Если Δ=0, а либо Δx≠0, либо Δy≠0, либо Δz≠0, то система решений не имеет.

Например: Решить систему по правилу Крамера

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 15 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Решение системы (2, -1,1)

Задания для практической работы.

Следующие системы решить по правилу Крамера

1.7. $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2z = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases}$ 1.8. $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 5x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$ 1.10. $\begin{cases} x+y+z=36 \\ 2x-3z=-17 \\ 6x-5z=7 \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ x+2y+3z=-1 \\ x-3y-2z=3 \end{cases}$

Векторная алгебра.

§ 1. Векторы. Линейные операции над векторами.

Определение 1. Отрезок [AB] называется направленным, если указано, какая из конечных точек является началом, какая концом.

Определение 2. Вектором называется направленный отрезок. Обозначается вектор $\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{в}$

Определение 3. Длина вектора называется модулем вектора. Обозначается $|\overline{AB}|, |\overline{a}|, |\overline{в}|$

Определение 4. Вектор называется единичным, если его модуль равен 1.

Определение 5. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{в}$ называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Определение 6. Два вектора называются равными, если они сонаправленно коллинеарны и имеют одинаковые модули.

Определение 7. Вектора называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Сложение векторов

Определение: Суммой $\overline{a}+\overline{в}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{в}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{в}$, при условии, что вектор $\overline{в}$ приложен к концу вектора $\overline{a}$.

Свойства сложения:

1 $\overline{a}+\overline{в}=\overline{в}+\overline{a}$

2. $(\overline{a}+\overline{в})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{в}+\overline{c})$

3. Существует вектор $\overline{0}$, такой, что $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$

4. Для любого вектора $\overline{a}$, существует $\overline{a'}$, такой что $\overline{a} + \overline{a'} = \overline{0}$

Замечание: Для того, чтобы сложить п векторов нужно начало каждого

последующего вектора поместить в конец предыдущего и вектор, идущий из начала первого вектора в конец последнего будет вектором суммой.

Разность векторов

Для того, чтобы найти разность векторов $\overline{a}$ и $\overline{в}$ нужно начала векторов поместить в одну точку и вектор, идущий из конца вектора вычитаемого ($\overline{в}$) в конец уменьшаемого $\overline{a}$, есть вектор разность.

Умножение вектора на число

Определение: Произведением вектора $\overline{a}$ на действительное числоλ называется вектор $\overline{в} = \lambda \overline{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\overline{в}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$

2) $\overline{в}$ коллинеарен $\overline{a}$, еслиλ >0 сонаправлен

если λ<0 противоположно направлен

§2. Линейная зависимость векторов. Базис.

Определение 1. Линейной комбинацией векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2} \ldots . \overline{a_n}$ называется сумма произведений этих векторов на произвольные действительные числа $a_1, a_2 \ldots a_n$, т.е. выражение вида

$$a_1 \cdot \overline{a_1} + a_2 \cdot \overline{a_2} + \ldots . + a_n \cdot \overline{a_n}$$

Определение 2. Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2} \ldots . \overline{a_n}$ называются линейно зависимыми, если существуют действительные числа $a_1, a_2 \ldots a_n$ не все одновременно равные 0, что линейная комбинация этих векторов с указанными числами обращается в 0.

$$a_1 \cdot \overline{a_1} + a_2 \cdot \overline{a_2} + \ldots . + a_n \cdot \overline{a_n} = 0$$

Определение 3. Векторы $a_1, a_2 \ldots a_n$ называются линейно независимыми, если равенство нулю их линейной комбинации возможно лишь в случае, когда все числа $a_1, a_2 \ldots a_n$ равны 0.

Замечание:

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости двух векторов является их коллинеарность; трех - компланарность. Любые четыре вектора линейно зависимы.

Определение 4. Базисом векторного пространства называется упорядоченная система векторов, удовлетворяющая следующим условиям:

1) система линейно независима

2) любой вектор является линейной комбинацией данной системы векторов.

Рассмотрим базис, в котором базисные вектора единичные и взаимно перпендикулярные (ортогональные). Эти вектора принято обозначать $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Базис ($\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$) называется прямоугольным декартовым.

Доказывается, что любой вектор а может быть единственным образом представлен в виде

$$\bar{a} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}.$$

Представление вектора в виде линейной комбинации базисных векторов называется разложением вектора по базису.

Коэффициенты x, y, z в таком разложении называются координатами вектора. Обозначаются $\bar{a} = (x, y, z)$.

Свойства координат вектора

1. Для того чтобы найти координаты вектора, если известны координаты его начала и конца, нужно из координат конечной точки вычесть координаты начальной точки.

$$\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

2. Координаты суммы (разности) векторов равны сумме (разности) соответствующих координат слагаемых векторов.

3. При умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число.

§3 Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$$

Свойства скалярного произведения:

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$

2. $(\alpha\cdot\overline{a})\cdot\overline{b}=\alpha\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})$

3. $(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности (ортогональности) двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.

Скалярное произведение векторов в координатной форме

Теорема. Если два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы своими координатами $\overline{a}=(x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b}=(x_2, y_2, z_2)$, то скалярное произведение этих векторов равно сумме произведений соответствующих координат.

Доказательство:

Пусть $\overline{a}=x_1\cdot\overline{i}+y_1\cdot\overline{j}+z_1\cdot\overline{k}, \overline{b}=x_2\cdot\overline{i}+y_2\cdot\overline{j}+z_2\cdot\overline{k},$

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(x_1\cdot\overline{i}+y_1\cdot\overline{j}+z_1\cdot\overline{k})\cdot(x_2\cdot\overline{i}+y_2\cdot\overline{j}+z_2\cdot\overline{k})=x_1\cdot x_2\cdot\overline{i}\cdot\overline{i}+x_1\cdot y_2\cdot\overline{i}\cdot\overline{y}+x_1\cdot z_2\cdot\overline{i}\cdot\overline{k}+\ldots$$
$$+y_1\cdot y_2\cdot\overline{j}\cdot\overline{j}+\ldots+z_1\cdot z_2\cdot\overline{k}\cdot\overline{k}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$$

Здесь скалярные произведения
$$\overline{i}\cdot\overline{i}=1$$
$$\overline{j}\cdot\overline{j}=1$$
$$\overline{k}\cdot\overline{k}=1$$

Остальные скалярные произведения обращаются в нуль, т.к. $\overline{i}\perp\overline{j}\perp\overline{k}$

Следствия:

1. Модуль вектора $\overline{a}=(x, y, z)$ определяется по формуле

$$|\overline{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

2. Угол между векторами $\overline{a_1}=(x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{a_2}=(x_2, y_2, z_2)$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

§4 Векторное произведение векторов

Определение. Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий трем условиям:

1) $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin(\overline{a} \cdot \overline{b})$

2) вектор $\overline{c}$ ортогонален векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$

3) если смотреть из конца $\overline{c}$, то кратчайший поворот от $\overline{a}$ к $\overline{b}$ осуществляется против хода часовой стрелки.

Обозначается $\overline{a} \times \overline{b}$, либо [а, в].

Свойства векторного произведения

1. $\overline{a} \cdot \overline{в} = -(\overline{в} \cdot \overline{a})$

2. $\lambda \overline{a} \cdot \overline{в} = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{в})$

3. $\overline{a} \cdot (\overline{в} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{в} + \overline{a} \cdot \overline{c}$

4. Модуль векторного произведения $|\overline{a} \cdot \overline{в}|$ равен площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\overline{a}$ и $\overline{в}$.

5. Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов является равенство нулю их векторного произведения.

Векторное произведение в координатной форме

Теорема. Если два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определены своими координатами $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2),$,
то $a \cdot b = (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$, или

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Следствие: Если два вектора $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2),$ коллинеарны, то их координаты пропорциональны, т.е. $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

§5 Смешанное произведение векторов

Определение. Пусть даны три вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$. Если $\overline{a}$ векторно умножить на $\overline{b}$, а затем получившийся вектор умножить скалярно на $\overline{c}$, то в результате получится число $\overline{a} \times \overline{b} \cdot \overline{c}$ называемое смешанным произведением.

Смешанное произведение в координатной форме

Теорема. Если $\bar{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\bar{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то

$$\bar{a}\times\bar{b}\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Следствие. Необходимым и достаточным условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Примеры решения задач

Пример 1. ABCDEF - правильный шестиугольник, причем $\overline{AB}=\bar{p},\overline{BC}=\bar{q}$. Выразить через $\bar{p}$ и $\bar{q}$ векторы $\overline{CD},\overline{DE},\overline{EF},\overline{FA},\overline{AC},\overline{AD},\overline{AE}$.

Решение: используемся определением суммы и разности векторов.

$1.\overline{CD}=\overline{BO}$

$\overline{BO}=\overline{AO}-\overline{AB}=\overline{BC}-\overline{AB}=\bar{q}-\bar{p}$

$\overline{CD}=\bar{q}-\bar{p}$

2. $\overline{DE}=-\overline{AB}=-\bar{p}$

3. $\overline{EF}=-\overline{BC}=-\bar{q}$

4. $\overline{FA}=-\overline{CD}=\bar{p}-\bar{q}$

5. $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=\bar{p}+\bar{q}$

6. $\overline{AE}=\overline{AF}+\overline{FE}=\bar{q}-\bar{p}+\bar{q}=2\bar{q}-\bar{p}$.

Пример 2. Заданы векторы $\bar{a}=2\bar{i}+3\bar{j},\bar{b}=-3\bar{j}-2\bar{k},\bar{c}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$.

Найти: а) координаты вектора $\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{b}+\bar{c}$

б) разложение вектора $\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c}$ по базису $(\bar{i},\bar{j},\bar{k})$.

в) модуль вектора $\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$

Решение:

а) Воспользуемся свойствами координат вектора и определением координат вектора.

Имеем $\bar{a}=(2,3,0),\bar{b}=(0,-3,-2),\bar{c}=(1,1,-1)$, тогда

$\bar{a}-\frac{1}{2}\bar{b}+\bar{c}=(2-\frac{1}{2}\cdot0+1,3-\frac{1}{2}\cdot(-3)+1,0-\frac{1}{2}\cdot(-2)-1=(3,\frac{11}{2},0)$

б) $\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c}=(2\bar{i}+3\bar{j})+(-3\bar{j}-2\bar{k})-2(\bar{i}+\bar{j}-\bar{k})=-2\bar{j}$

в) Найдем сначала координаты вектора $\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$

$$\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}=(3,7,1)$$
$$|\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}|=\sqrt{3^2+7^2+1^2}=\sqrt{59}$$

Задания для практической работы

2.1. Даны два вектора $\bar{a}=(3,-2,6)$ и $\bar{b}=(-2,1,0)$. Определить проекции на координатные оси следующих векторов: 1) $\bar{a}+\bar{b}$, 2) $\bar{a}-\bar{b}$, 3) $2\bar{a}$, 4) $-\frac{1}{2}\bar{b}$, 5) $2\bar{a}+3\bar{b}$, 6) $-\frac{1}{3}\bar{a}-\bar{b}$

2.2. Определить, при каких значениях α и β векторы $\bar{a}=-2\bar{i}+3\bar{j}+\beta\bar{k}$ и $\bar{b}=\alpha\bar{i}-6\bar{j}+2\bar{k}$ коллинеарны.

2.3 Определить модули суммы и разности векторов $\bar{a}=(3,-5,8), \bar{b}=(-1,1,-4)$

2.4 На оси абсцисс найти точку М, расстояние которой от точки А(3,-3) равно 5

2.5 Вычислив внутренние углы треугольника А(1,2,1), В(3,-1,7),С(7,4,-2) убедиться, что этот треугольник равнобедренный.

2.6 Доказать, что четыре точки А(1,2,-1), В(0,1,5), С(-1,2,1), Д(2,1,3) лежат в одной плоскости.

Аналитическая геометрия

Плоскость. Прямая на плоскости и в пространстве

§1 Прямая на плоскости.

1. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору.

$M_0(x_0,y_0)\in L$ $\bar{n}=(A,B)\perp L$ $\underline{\wedge}$

Выберем текущую точку М (х, у) и найдем координаты $\overline{M_0M}$

$$\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$$

Т.к. $\overline{M_0M}\perp\bar{n}$, то $\overline{M_0M}\cdot\bar{n}=0$, а тогда $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ искомое уравнение.

2. Общее уравнение прямой имеет вид

$Ax+By+c=0$, где $\bar{n}=(A,B)\perp L$

3.Уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом и точкой.

Определение. Тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ох называется угловым коэффициентом прямой.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)\in L$, K - угловой коэффициент.

Уравнения имеют вид: $y-y_0=к(x-x_0)$

$y=кx+в$

4. Взаимное расположение прямых.

Угол между прямыми L_1 и L_2

$\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$,где $\overline{n_1}=(A_1,B_1)\perp L_1$

$\overline{n_2}=(A_2,B_2)\perp L_2$

Прямая $L_1 \| L_2$ если $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$

Прямая $L_1\perp L_2$, если $A_1A_2+B_1B_2=0$

§2 Плоскость

1. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору $M_0(x_0,y_0,z_0)\in P$, $\bar{n}=(A,B,C)\perp P$

Возьмем текущую точку $M(x, y, z)\in P$ и образуем $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ $\overline{M_0M}\perp\bar{n}$, то $\overline{M_0M}\ \bar{n}=0$

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$- искомое уравнение.

2. Общее уравнение плоскости имеет вид

$$Ax+By+Cz+Д=0, \text{ где } \bar{n}=(A,B,C)\perp P$$

3.Уравнение плоскости «в отрезках»

Общее уравнение Ax+By+Cz+Д=0 приведем к виду $\frac{Ax}{-Д}=\frac{By}{-Д}=\frac{Cz}{-Д}=1$ и обозначим $\frac{-Д}{A}=a, \frac{-Д}{B}=b, \frac{-Д}{C}=c$

Уравнение примет вид $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=1$, где a, в, c - величины отрезков, которые плоскость отсекает от осей координат, (доказать самостоятельно!).

§3 Прямая в пространстве

1. Канонические уравнения прямой (L)

а) M_0 $(x_0,y_0,z_0) \in L$ и a=(i, m, n) || L

Возьмем текущую точку M(x,y,z)

и образуем вектор $\overline{M_0M} \parallel \bar{g}$, $\overline{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$.

Используя условие коллинеарности векторов, получаем уравнение прямой

$$\frac{x-x_0}{i}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

в) Пусть точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2, z_2) \in L$

Возьмем текущую точку M(x,y,z) и образуем вектора $\overline{M_1M}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$ и $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_2,z_2-z_1)$

Очевидно $\overline{M_1M} \parallel \overline{M_1M_2}$

Тогда уравнение прямой примет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

2. Общее уравнение прямой в пространстве задается как линия пересечения двух плоскостей и имеет вид

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

3. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

Угол между двумя прямыми в пространстве определяется по формуле $\cos\alpha = \dfrac{i_1 i_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{i_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{i_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$

где $q_1 = (i_1 m_1 n_1)$ || прямойL$_1$,

$q_2 = (i_2 m_2 n_2)$ || прямой L$_2$,

Угол между прямой и плоскостью определяется по формуле $\sin\alpha = \dfrac{Ai + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{i^2 + m^2 + n^2}}$

где n =(A,B,C) $\perp$P

q= (i,m,n) ||L,

Условие параллельности прямой и плоскости Ai+Bm+Cn=0

Условие перпендикулярности прямой и плоскости $\dfrac{A}{i} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$

Примеры решения задач.

1. Написать уравнение прямой и привести его в общему виду, если прямая задана:

а)M$_0$(-1,2), $\bar{n}$ =(2,2)

б)M$_0$(-1,2), $\bar{q}$ =(3,-1)

в) M$_1$(1,2), M$_2$(3,4),

Решение

а) Уравнение искомой прямой имеет вид

A(x-x$_0$)+B(y-y$_0$)=0

Подставляя значения A, B, x$_0$, y$_0$в уравнение получим:

2(x+1)+2(y-2)=0 или 2x+2y-2=0

x+y-1=0

б) Уравнение имеет вид

$$\frac{x-x_0}{i}=\frac{y-y_0}{m}$$

Подставим в уравнения значения i,m,x_{0},y_0

$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}$, откуда -x-1-3y+6=0

x+y-5=0

в)Уравнение имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

После подстановки x_1,x_2,y_1,y_2получим

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{4-2}$$

(x-1)2-2(y-2)=0

x-y+2=0

2. Через точки M_1(-1,2) и M_2(2,3) проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с осями координат.

Решение: Напишем уравнение прямой, проходящей через точки M_1и M_2

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-2}{3-2}$, x+1-3(y-2)=0,

x-3y+7 =0 (L)

Точка пересечения прямой (L) с осью ох имеет ординату y=0. Подставляя y=0 в уравнение прямойL, получим x=-7. A (-7,0)

Точка пересечения прямой I с осью оy имеет абсциссу x=0. Подставляя x=0 в уравнение (I) получим $y=\frac{7}{3}, B(0,\frac{7}{3})$

3. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(3,-2,-7)$ параллельно плоскости 2x-3z+5=0

Решение. Из уравнения 2x-3z+5=0 выпишем координаты вектора, перпендикулярного данной плоскости. Вектор $\bar{n} = (2,0,-3)$

Так как данная и искомая плоскости параллельны, то $\bar{n} = (2,0,-3)$ будет перпендикулярен искомой плоскости.

Уравнение искомой плоскости запишем в виде

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+ C(z-z_0)=0$

2(x-3)+0(y+2)-3(z+z)=0

2x- 3z-27=0

4.Найти точки пересечения плоскости с 2x-3y-4z-24=0 осями координат.

Решение: Точка пересечения плоскости с осью 0x имеет y=0 и z=0. Подставляя эти значения в уравнение плоскости получим x=12. A (12, 0,0)

Точка пересечения плоскости с осью оу имеет x=0, z=o. Из уравнения плоскости получим y=-8. B(0,-8,0)

Точка пересечения плоскости с осью 0zимеет x=0, y=0. Из уравнения плоскости получимz=-6 C (0,0,-6)

5. Составить уравнение прямой, проходящей через:

а) точки $M_1(1,-2,1)$ и $M_2(3,1,-1)$

в) точку $M_1(1 ,-1 ,-3)$ параллельно прямой

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$$

Решение

а) Уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x-x_0}{i} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

Подставим в уравнение исходные данные

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

в) Найдем вектор $\overline{g}$ параллельный данной прямой: $\overline{g} = (-2,3,2)$

Т. к. данная и искомая прямая параллельны, то направляющие векторы у них одинаковы, т, е. $\overline{g} = (-2,3,2)$

Тогда уравнение прямой искомой будет:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2}$$

6. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку M_0(-2,1,3) перпендикулярно плоскости 2x -y-z-3= 0

Решение.

Уравнение прямой будем искать в виде

$$\frac{x-x_0}{i} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

Поскольку прямая перпендикулярна плоскости, ее направляющий вектор перпендикулярен плоскости, а значит его координаты можно взять из уравнения плоскости

$$\overline{q} = \overline{n} = (2,-1,-1)$$

Тогда уравнение искомой прямой примет вид:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$$

7. Найти острый угол между прямыми $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ и $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$

Решение: Направляющие вектора прямых имеют координаты $\overline{q} = (1,-1,\sqrt{2})$, $\overline{q} = (1,1,\sqrt{2})$

Найдем косинус угла

$$\cos\alpha = \frac{i_1 i_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{i_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{i_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2}}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Задания для практической работы

3.1. Задана прямая -2x+y-1 и точка M(-1,2).

а) Написать уравнение прямой L', проходящей через точку M перпендикулярно заданной прямой.

б) Написать уравнение прямой L'', проходящей через точку M параллельно заданной прямой,

3.2. Выяснить взаимное расположение прямых:

а) -2x+y-1=0 и 2y+1=0

б) x+y-1=0 и 2x-2y+1 =0

3.3 Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1и M_2, перпендикулярно заданной плоскости, если$M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$, уравнение плоскости -x+y-1=0.

3.4. Написать уравнение плоскости проходящей через точки $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$ и $M_3(3,0,1)$.

3.5. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью 2x-3y+6z-12=0 и координатными плоскостями.

3.6. Задана прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}$ и точка M (0,1,2) не принадлежащая прямой. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно прямой.

3.7. Доказать, что прямая $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0 \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ лежит в плоскости 4x-3y+7z-7=0

3.8. Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ и 2x+3y +z-1=0