МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический

университет им. А.Н. Туполева-КАИ»

(КНИТУ-КАИ)

Чистопольский филиал «Восток»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

по дисциплине

МАТЕМАТИКА ЧАСТЬ 2

Индекс по учебному плану: **Б1.О.07.02**

Направление подготовки: **12.03.01 Приборостроение**
Квалификация: **Бакалавр**

Профиль подготовки: **Приборостроение**

Типы задач профессиональной деятельности: **проектно-конструкторская,**

производственно-технологическая

Рекомендованы УМК ЧФ «Восток» КНИТУ-КАИ

Чистополь
2023 г

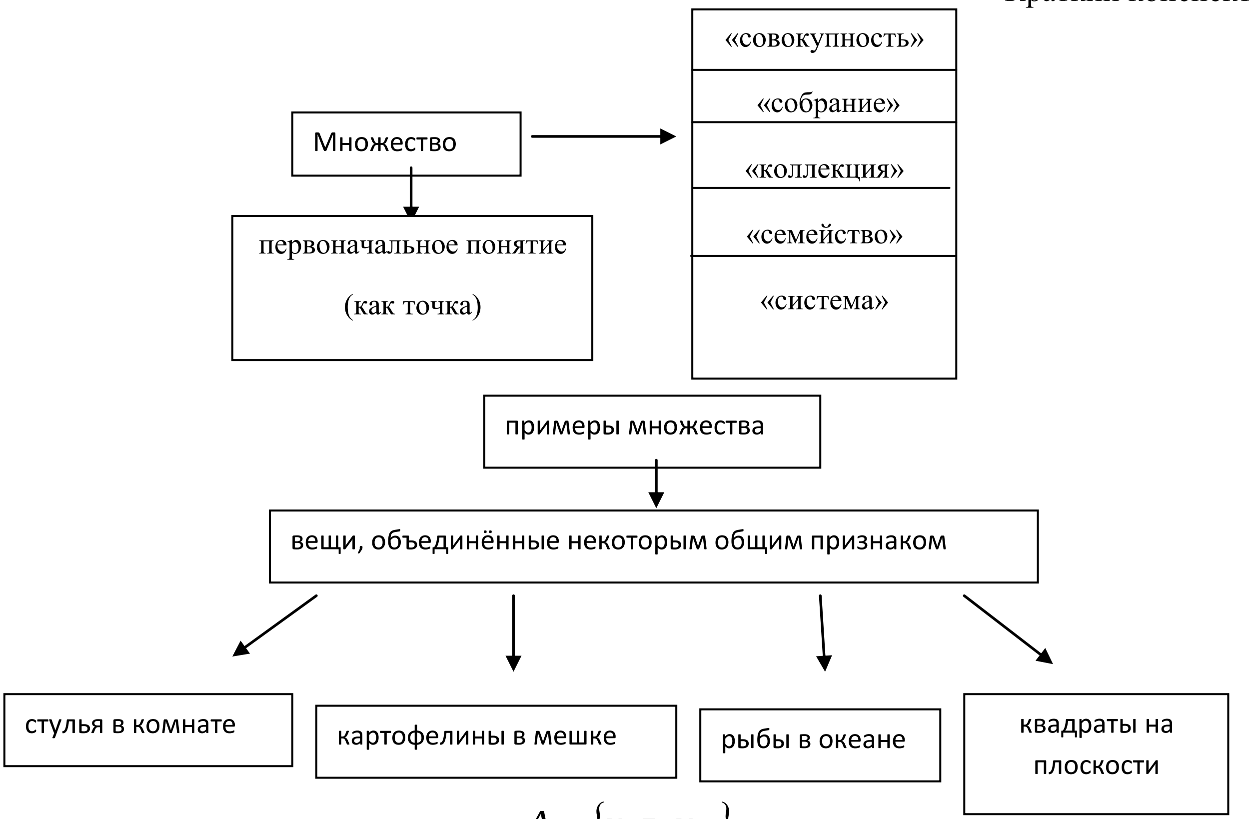
Первое практическое занятие

Введение в математический анализ. Элементы теории множеств и функций

Множества и операции над ними

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с понятием действительных чисел, с понятием множества и операций над ними, с умением применять экономную символику, используемую в логике.

Краткий конспект



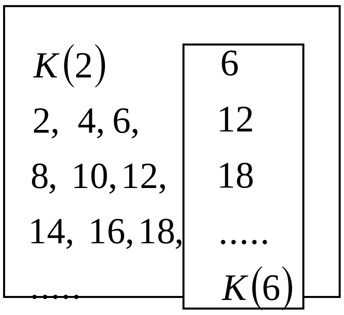
$$A = \{x, z, y \ldots\}$$

множество элементы

конечные — деревья в лесу

бесконечные — точки окружности

Подмножество: $A \subset B$



$$K(6) \subset K(2).$$

$\left|\dfrac{\text{Пересечением}}{\text{Объединением}}\right.$ двух множеств называется множество, которое состоит из элементов, входящих $\left|\dfrac{\text{в каждое}}{\text{хотя бы в одно}}\right.$ из данных множеств.

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

Аудиторные задачи: стр. 7-11

№№ 5.28; 5.29; 5.31; 5.36; 5.38; 5.45; 5.44; 5.46; 5.49; 5.51; 5.53; 5.83; 5.85; 5.87; 5.89; 5.91 а; 5.92 а

Задания для самостоятельного решения:

№№ 5.30; 5.32; 5.34; 5.35; 5.37; 5.39; 5.47; 5.50; 5.52; 5.84; 5.86; 5.88; 5.90; 5.91 б; 5.92 б

Второе практическое занятие

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с понятием комплексных чисел, с умением записывать комплексные числа в различных формах записи, выполнять операции над комплексными числами.

Краткий конспект

1. *Комплексные числа* (КЧ)

$a,b\in N$ $\qquad$ $a,b\in N$ $\qquad$ $a,n\in N$

$\oplus$ $\quad c-b=a,\ a\in Z$ $\ \otimes\ $ $a=\dfrac{c}{b},\ a\in Q$ $\ a=\sqrt[n]{b},\ a\in R$ $\circledcirc$

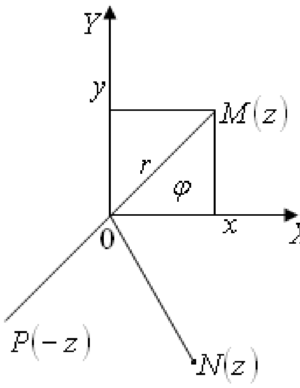
$a+b=c,$ $\ominus$ $\qquad$ $a\cdot b=c,$ $\odot$ $\qquad$ $a^n=b,$ $\oslash$

$c\in N$ $\quad b,c\in N$ $\quad c\in N$ $\quad c,b\in N$ $\quad b\in N$ $\quad b,n\in N$

$$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C: \qquad C=\{z \mid z=x+iy, x,y\in R\},\ \ z-\text{КЧ.}$$

$$z=\left\{\begin{array}{l} x+iy,\ x=\operatorname{Re} z,\ y=\operatorname{Im} z,\ i^2=-1\ -\text{алгебраиче ская} \\ r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ r=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\ \varphi=\arg z=arctg\,\dfrac{y}{x}-\text{тригономет рическая} \\ r=e^{i\varphi},\ e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi-\text{показатель ная}\end{array}\right\}\ \text{- формы записи}$$

XOY - комплексная плоскость:



OX - действительная, OY - мнимая оси,

$M(x, y) \leftrightarrow z = x + iy \leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \{x, y\}$

$\bar{z} = x - iy$ - сопряжённое к z

$-z = -x - iy$ - противоположное к z

$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

Действия / Форма записи	$z_1, z_2 \in C$ ⊕ $z = z_1 - z_2$ $z = z_1 + z_2$ ⊖	$z_1, z_2 \in C$ ⊗ $z = \frac{z_1}{z_2}$ ⊙ $z = z_1 \cdot z_2$	$w, z \in C, n \in N$ $\sqrt[n]{z} = w$ $z = w^n$
$z = x + iy$	$x = x_1 + x_2$ $y = y_1 + y_2$ $x = x_1 - x_2$ $y = y_1 - y_2$	$x = x_1x_2 - y_1y_2$ $x = x_1x_2 - y_1y_2$ $x = \frac{x = x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ $y = \frac{x = y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$	— —
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$	— —	$r = r_1r_2$ $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ $r = \frac{r_1}{r_2}$ $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$	$r = \rho^n$ $\varphi = n\theta$ $\rho = \sqrt[n]{r}$ $\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ $k = \overline{0, n-1}$

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

Аудиторные задачи: стр. 39-47

№№ 5.421; 5.423; 5.424; 5.426; 5.428; 5.430; 5.435; 5.437; 5.477; 5.485; 5.497; 5.499

Задания для самостоятельного решения:

№№ 5.436; 5.438; 5.486; 5.488; 5.496; 5.498; 5.500

Третье практическое занятие

Числовая последовательность. Предел числовой последовательности

Пределы функций

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с понятием числовой последовательности, пределом числовой последовательности, с понятием предела функции, знанием основных определений предела функции одной переменной, умением раскрывать некоторые неопределенности.

Краткий конспект

Пределы ФОП

Предел последовательности. Предел функции в точке

Число $\left|\frac{a}{A}\right.$ называется пределом $\left|\frac{\{x_n\}}{f(x)\text{ в т.}x_0}\right.$ если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \left|\frac{n_0(\varepsilon)\in N}{\delta(\varepsilon)>0}\right.$, что $\forall \left|\frac{n>n_0}{x\in D\left(|x-x_0|<\delta\right)}\right.$, выполняется неравенство $\left|\frac{|x_n-a|<\varepsilon}{|f(x)-A|<\varepsilon}\right.$.

Обозначение $\left|\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A}\right.$.

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\varphi(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x)\lim_{x\to x_0}\varphi(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(C\,f(x)\right) = C\lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f\left(g(x_0)\right)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n$$

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n$$

Первый ! ***Второй***

замечательный

предел и его следствия

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\frac{m}{n}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\text{где } e=2{,}71828......$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=n$$

$$\text{Бесконечно} \left| \frac{\text{малые}}{\text{большие}} \right. \text{функции}$$

$$\left| \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0}{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty} \right. \Leftrightarrow \left| \frac{\alpha(x) - б.м.}{f(x) - б.б.} \right.$$

Связь б.м. и б.б.

x_n	y_n	$\dfrac{x_n}{y_n}$	$x_n y_n$	$\dfrac{y_n}{x_n}$
б.м.	огран.	0	0	∞
б.б.	огран.	∞	∞	0

Если x_n – б.б $\Leftrightarrow x_n$ – неограниченная

$\Rightarrow$	$\Leftarrow$
верно	не всегда верно
$2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n \ldots$	$-1, 2, -3, 4, -5, \ldots, (-1)^n n$
$1, 2, 3, \ldots, n \ldots$	$1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \ldots, (n)^{(-1)^n} \ldots$

Аудиторные задачи:

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.2 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 352 с.

Самостоятельная работа по теме «Основные понятия. Операции над комплексными числами» (стр 12).

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 25-28

№№ 5.213; 5.215; 5.217; 5.221; 5.225; 5.227; 5.230 б, г; 5.232; 5.236; 5.240; 5.242; 5.244;

5.437; 5.477; 5.485; 5.497; 5.499

стр. 28-35

№№ 5.273; 5.277; 5.279; 5.281; 5.283; 5.289.

Задания для самостоятельного решения:

№№ 5.214; 5.216; 5.218; 5.220; 5.222; 5.230 а; 5.234; 5.236; 5.238; 5.240; 5.242; 5.244; 5.246.

№№ 5.272; 5.276; 5.280; 5.282; 5.284; 5.288; 5.302.

Четвертое практическое занятие

Замечательные пределы

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением раскрывать некоторые виды неопределенностей с применением формул замечательных пределов и их следствий.

Аудиторные задачи:

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 30-33

№№ 5.303; 5.305; 5.307; 5.309; 5.311; 5.313; 5.315; 5.320; 5.322; 5.324; 5.326; 5.328; 5.330; 5.332.

Задания для самостоятельного решения:

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.1 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 270 с.

Стр. 158- 167

Индивидуальные домашние задания к главе 5.

ИДЗ-5.1.

Пятое практическое занятие

Функции действительной переменной. Построение графиков

Непрерывность и точки разрыва функции

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с понятием функции, умением находить область определения функции, знанием основных элементарных свойств функции, знанием основных графиков элементарных функций и умением строить график сложной функции путем его преобразования, с умением находить односторонние пределы, находить точки разрыва и классифицировать их, исследовать функцию на непрерывность.

Аудиторные задачи:

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 17-25

№№ 5.95; 5.97; 5.103; 5.105; 5.107; 5.108; 5.110; 5.113; 5.117; 5.119; 5.134; 5.136;

5.157; 5.159; 5.161; 5.176 б; 5.179 а; 5.178 б

стр. 35-39

№№ 5.395; 5.402; 5.387.

Задания для самостоятельного решения:

№№ 5.175 б; 5176 а; 5.218 а; 5.114; 5.116; 5.135; 5.137; 5.156; 5.162.

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.1 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 270 с.

Стр. 167- 175

Индивидуальные домашние задания к главе 5.

ИДЗ-5.2.

Шестое практическое занятие

Производная.

Производная сложной функции. Логарифмическое дифференцирование.

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных со знанием определения производной, знанием основных правил и формул дифференцирования, умением находить производную сложной функции, со знанием определения производной, знанием основных правил и формул дифференцирования, умением находить производную сложной функции. Применять логарифмирование при поиске производной.

Аудиторные задачи:

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 54-59

№№ 6.39; 6.32; 6.43; 6.45; 6.54; 6.65; 6.67; 6.69; 6.73.

стр. 57-63

№№ 6.81; 6.82; 6.89; 6.90; 6.91; 6.151; 6.154; 6.170; 6.173; 6.175; 6.177; 6.179; 6.185; 6.204; 6.231; 6.298 б

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк.,1997. – 304 с.

Стр. 151- 157

№№ 773; 775; 777; 779; 781; 783; 785; 787; 789; 791; 793.

Задания для самостоятельного решения:

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк.,1997. – 304 с.

Стр. 151- 157

№№ 772; 774; 776; 778; 780; 782; 784; 786; 788; 790; 792.

Аудиторные задачи:

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

№№ 6.62; 6.64; 6.76; 6.83; 6.86; 6.87; 6.146; 6.143; 6.174; 6.176; 6.178; 6.180; 6. 335; 6,339; 6,341.

Седьмое практическое занятие

Дифференцирование неявных функций и функций, заданных параметрически

Производные высших порядков. Дифференциал функции.

Дифференциалы высших порядков

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных со знанием формул дифференцирования неявной и параметрической функций, умением находить производную сложной функции, со знанием правил и формул дифференцирования функций, умением находить производную высшего порядка для сложной функции.

Аудиторные задачи:

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк.,1997. – 304 с.

стр. 161-163

№№ 901; 903; 905; 907; 910; 911; 901; 903.

стр. 64-77

№№ 6.185; 6.204; 6.202; 6.231; 6.233; 6.276; 6.286; 6.290; 6.298 б; 6.303; 6.315; 6.179; 6.185; 6.204; 6.231; 6.298 б

Задания для самостоятельного решения:

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк.,1997. – 304 с.

стр. 161-163

№№ 840; 855; 853.

стр. 166-167

№№ 984; 886; 888; 990; 991; 994; 996.

Восьмое практическое занятие

Правило Лопиталя. Исследование поведения функций и их графиков.

Исследование поведения функций при помощи производной

и построение их графиков

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением применять производные для вычисления пределов и исследования графика функции, связанных с умением применять производные для исследования графика функции.

Аудиторные задачи:

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 79-83; 86- 98

№№ 6.335; 6.337; 6.339; 6.341; 6.354; 6.360; 6.364; 6.369; 6.405; 6.407; 6.413; 6.425; 6.430.

стр. 92- 99

№№ 6.379; 6.397 б, г; 6.400 б, в; 6.441; 6.443; 6.445; 6.453; 6.455; 6.457.

Задания для самостоятельного решения:

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 79-83; 86- 98

№№ 6.334; 6.336; 6.338; 6.340; 6.342; 6.355; 6.357; 6.365; 6.404; 6.406; 6.414; 6.428; 6.429.

стр. 92- 99

№№ 6.380; 6.400 а; 6.442; 6.444; 6.454; 6.456.

Девятое практическое занятие

Функции нескольких переменных. Частные производные. Производные сложных функций нескольких переменных

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить область определения функции многих переменных, умением находить частные производные, умением находить частные производные и полные производные сложной функции, в зависимости от вида заданной функции.

Аудиторные задачи:

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 186-205

№№ 8.5; 8.9; 8.13; 8.20; 8.55; 8.57; 8.114; 8.118; 8.120; 8.140; 8.146.

Задания для самостоятельного решения:

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 186-205

№№ 8.56; 8.58; 8.62; 8.64; 8.83; 8.117; 8.119; 8.142; 8.144.

Десятое практическое занятие

Дифференцирование неявных функций нескольких переменных.

Дифференциалы высших порядков неявных функций нескольких переменных

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить производную неявной и параметрически заданной функции многих переменных, с умением находить дифференциалы функций многих переменных.

Аудиторные задачи:

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 205-209

№№ 8.148; 8.150; 8.152.

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.2 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 352 с.

Самостоятельная работа по теме «Дифференциал функции многих переменных и производные сложных функций» (стр.215-216).

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк.,1997. – 304 с.

стр. 198-199

№№ 1239; 1244; 1249.

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 215-216

№№ 8.177; 8.179; 8.181.

Задания для самостоятельного решения:

Сборник задач по математике для втузов. Часть 2: Учебное пособие для втузов / под редакцией А.В. Ефимова: Изд-во Физико-математической литературы, 2004 – 432 с.

стр. 205-209

№№ 8.147; 8.149; 8.151.

Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.2 / А.П. Рябушко – Мн.: выш. шк., 1990 – 352 с.

Индивидуальные домашние задания к главе 10

Стр. 222-231

ИДЗ-10.1.

Одиннадцатое практическое занятие

Экстремум функций многих переменных

Это практическое занятие отводится для упражнений, связаннымс контролем над работой по теме «Производные функции многих переменных».

Аудиторные задачи:.

*Семина М.А.*Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных: пособие для подготовки к тестированию. Казань: изд-во «Экоцентр», 2005.
Пройти соответствующий тест по заданной теме.

Задания для самостоятельного решения:

Данко А.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1: Учебное пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М.: Высш. шк.,1997. – 304 с.

стр. 202-204

№№ 1280; 1283; 1287; 1209; 1220; 1260; 1262.

Двенадцатое практическое занятие

Неопределенный интеграл

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить неопределенные интегралы, используя свойства и таблицу интегралов.

Краткий конспект

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

$$\forall\ f(x) \in C_{[x]} \exists F(x) \text{ - первообразная для } f(x) \ \ \forall x \in X : F'(x) = f(x)$$

Свойства НИ

$$1^\circ \left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \qquad 2^\circ\ d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

$$3^\circ \int dF(x) = F(x) + C \ \left(\int dx = x + C\right).$$

$$4^\circ \int\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right)dx = \sum_{i=1}^{n}\int f_i(x)dx.$$

$$5^\circ \int af(x)dx = a\int f(x)dx,\ a = const.$$

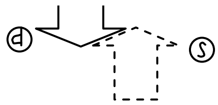
$$6^\circ \int f[\varphi(t)]d\varphi(t) = F[\varphi(t)] + C.$$

Таблица основных интегралов

I. Степенная и показательная функции

№	1	2	3	4
$F(x)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$	e^x
$f(x)$	$x^n,\ n \neq -1$	$\dfrac{1}{x}$	a^x	e^x

$$F'(x) = f(x)$$



$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

II. Тригонометрические функции

№	5	6	7	8	9	10
$F(x)$	$-\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\ln\lvert\sin x\rvert$
$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$

III. Обратные тригонометрические функции

№	11	12	13	14
$F(x)$	$\arcsin x$, $-\arccos x$	$\arcsin \dfrac{x}{a}$ $-\arccos \dfrac{x}{a}$	$\operatorname{arctg} x$, $-\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$, $-\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}$
$f(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{1}{a^2+x^2}$

VI. Логарифмические функции

№	15	16	17
$F(x)$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a-x}{a+x}\right\rvert$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert$
$f(x)$	$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

V. Гиперболические функции

№	18	19	20	20
$F(x)$	$\mathrm{ch}\,x$	$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{th}\,x$	$-\mathrm{cth}\,x$
$f(x)$	$\mathrm{sh}\,x$	$\mathrm{ch}\,x$	$\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Замена переменной

Интегрирование по частям

4°, 5°, таблица основных

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \end{array} \right| = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \left| \begin{array}{c} \varphi(x)=t, \\ \varphi'(x)dx=dt \end{array} \right| = \int f(t)dt$$

$$\int u\,dv = uv - \int v du$$

*Семина.М.А.*Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан.гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

Стр. 11-22

Понятие первообразной и неопределенного интеграла

Примеры решения

1.1.1. Найти первообразную для $f(x) = 4\sqrt[3]{x}.$

► По определению первообразной $F(x): F'(x) = f(x),$ т.е. $F'(x) = 4\,x^{\frac{1}{3}}.$ Имеем производную степенной функции $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}.$ Значит $n-1=\frac{1}{3}, n=\frac{4}{3}$ и тогда $F(x)=3x^{\frac{4}{3}}$. Совокупность первообразных для $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$, будет $3\,x^{\frac{4}{3}}+C$. ◄

1.1.2. Показать, что $\frac{1}{2}\sin 2x + C -$ первообразная для

$$f(x)=\cos(\alpha+x)\cos(\alpha-x)+\sin(\alpha+x)\sin(\alpha-x).$$

► Нужно показать, что

$$\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C\right)' = \cos(\alpha + x)\cos(\alpha - x) + \sin(\alpha + x)\sin(\alpha - x).(*)$$

Найдём производную: $\left(\frac{1}{2}\sin 2x + C\right)' = \frac{1}{2}\cos 2x\, 2 = \cos 2x$. Правую часть равенства (*) преобразуем по формуле:

$$\cos(\beta - \gamma) = \cos\gamma\cos\beta + \sin\gamma\sin\beta; \quad \beta = \alpha + x, \quad \gamma = \alpha - x.$$

Имеем

$$\cos(\alpha + x)\cos(\alpha - x) + \sin(\alpha + x)\sin(\alpha - x) = \cos(\alpha + x - \alpha + x) = \cos 2x,$$

что и требовалось показать. ◄

Аудиторные задачи

I. Найти первообразные следующих функций:

1.1.3. 1.1.4. 1.1.5.

II. Показать, что $F(x) + C$ − первообразные для $f(x)$:

1.1.6.1.1.7. 1.1.8.

1.1.12. 1.1.13. 1.1.14.

Задание на дом

I. Найти первообразные следующих функций:

1.1.9. 1.1.10. 1.1.11.

Основные свойства неопределенных интегралов

Примеры решения

1.2.1. Вычислить интеграл $\int \cos 3x\, dx$.

► $\int \cos 3x\, dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x\, d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x + C$. При решении использованы свойство 6 и табличный интеграл № 6 (II. Тригонометрические функции). ◄

1.2.2. Вычислить интеграл $\int (2x-1)^{10} dx$.

► $\int (2x-1)^{10} dx = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{10} d(2x-1) = \frac{(2x-1)^{11}}{22} + C$. При решении использованы: свойство 6 и табличный интеграл № 1 (I. Степенная и показательная функции). ◄

1.2.3. Вычислить интеграл $\int \mathrm{e}^{2+x}dx.$

► $\int \mathrm{e}^{2+x}dx = \int e^{2+x}d(x+2) = e^{2+x} + C.$ При решении использованы: свойство 6 и табличный интеграл № 4 (I. Степенная и показательная функции). ◄

Аудиторные задачи

Вычислить интегралы:

1.2.4.

1.2.5.

1.2.6.

1.2.7.

Задание на дом

Вычислить интегралы:

1.2.8.

1.2.10.

1.2.9.

1.2.11.

Непосредственное интегрирование

Примеры решения

Непосредственным интегрированием вычислить интегралы:

1.3.1. $\int \frac{3x^4 + 5x^2 - 6x\sqrt[4]{x} + 4}{x}dx.$

► $$\int \left(3x^4 + 5x^2 - 6x\sqrt[4]{x} + 4\right)\frac{dx}{x} = 3\int x^3 dx + 5\int x dx - 6\int \sqrt[4]{x}dx + 4\int \frac{dx}{x} = \frac{3x^4}{4} +$$

$$+\frac{5x^2}{2} - \frac{24x^{\frac{5}{4}}}{5} + 4\ln|x| + C.$$ ◄

1.3.2. $\int \frac{10^x + 6^x}{2^x}dx.$

► $$\int \frac{10^x + 6^x}{2^x}dx = \int \left(\frac{10}{2}\right)^x dx + \int \left(\frac{6}{2}\right)^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$ ◄

1.3.3. $\int \mathrm{tg}^2 x dx.$

► $$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}\, x - x + C.$$ ◄

1.3.4. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}dx.$

$$► \int \frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}dx = \int \frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{(x^2-3)(x^2+3)}}dx -$$

$$-\int \frac{\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{(x^2-3)(x^2+3)}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} =$$

$$= \ln\left| x+\sqrt{x^2+3}\right| - \ln\left| x+\sqrt{x^2-3}\right| + C = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+3}}{x+\sqrt{x^2-3}}\right| + C. ◄$$

Аудиторные задачи

Найти неопределённые интегралы:

1.3.5.

1.3.6.

1.3.7.

1.3.8.

1.3.9.

1.3.10

Задание на дом

Вычислить данные неопределённые интегралы:

1.3.13.

1.3.14.

1.3.15

1.3.16.

1.3.17.

Интегрирование методом замены переменной

Существуют два варианта метода замены переменной:

I. Метод «подведения»множителя под знак дифференциала

Примеры решения

1.3.19. Вычислить интеграл $\int \cos^5 x \sin x dx.$

► Имеем:

$$\int \cos^5 x \sin x dx = -\int \cos^5 x d(\cos x) = -\int u^5 du = -\left.\frac{u^6}{6}\right|_{u=\cos x} + C = -\frac{\cos^6 x}{6} + C. ◄$$

1.3.20. Вычислить интеграл $\int \frac{2x-3}{\left(x^2-3x+4\right)^2}dx.$

$$► \int \frac{2x-3}{\left(x^2-3x+4\right)^2}dx = \int \frac{d\left(x^2-3x+4\right)}{\left(x^2-3x+4\right)^2} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}\bigg|_{u=x^2-3x+4} + C =$$

$$= -\frac{1}{x^2-3x+4} + C\,. ◄$$

1.3.21. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx.$

► Имеем:

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \int \sin(\ln x)\, d(\ln x) = \int \sin u\, du = -\cos u\,\Big|_{u=\ln x} + C = -\cos(\ln x) + C. ◄$$

Аудиторные задачи

Вычислить интегралы с помощью подходящей замены:

1.3.22. 1.3.23.

1.3.24. 1.3.25.

1.3.26. 1.3.27.

1.3.28. . 1.3.29..

Задание на дом

Вычислить интегралы:

1.3.31. 1.3.32.

1.3.33. . 1.3.34.

1.3.35. 1.3.36.

II. Метод подстановки

Примеры решения

1.3.37. Вычислить интеграл: $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx.$

► В рассматриваемом случае $D(f) = [0,+\infty)$, где $f(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}$.

Произведём подстановку $x = \varphi(t) = t^2,\ t \in [0,+\infty).$ Тогда:

$$dx = 2tdt, \quad t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}, \text{ откуда}$$

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{t^3+t}{t+1}dt = 2\int \left(t^2 - t + 2\right)dt - 4\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= \left(2\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t \right) - 4\ln|t+1| \right)\Bigg|_{t=\sqrt{x}} + C \; = 2\left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x}{2} + 2\sqrt{x} \right) - 4\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C. \blacktriangleleft$$

1.3.38. Применяя подстановку $t = e^x$, найти интеграл $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx.$

► Имеем: $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = \left| \begin{matrix} t = e^x \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{t}{t+1}dt = \int dt - \int \frac{dt}{t+1} =$

$$= \left(t - \ln(t+1)\right)\Big|_{t=e^x} + C \; = e^x - \ln\left(e^x+1\right) + C. \blacktriangleleft$$

Аудиторные задачи

I. Найти интегралы, применяя указанные подстановки.

1.3.39. 1.3.40.

1.3.41.

II. Применяя подходящие подстановки, найти интегралы:

1.3.42. 1.3.43. 1.3.44.

Задание на дом

Найти интегралы, применяя подходящие подстановки:

1.3.45. 1.3.46.

1.3.47. 1.3.48.

1.3.49. 1.3.50.

Интегрирование по частям

Примеры решения

1.3.52. Найти $\int \left(x^2 - 3\right)e^{2x}dx,$ используя интегрирование по частям.

► Полагаем $u = x^2 - 3$ и $dv = e^{2x}dx.$ Тогда $du = 2xdx$ и $v = \int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2}$ (постоянную C здесь полагаем равной 0, т.е. в качестве v берём одну из первообразных). По формуле $\left(\int udv = uv - \int vdu\right)$ имеем:

$$\int\left(x^2-3\right)e^{2x}dx=\frac{\left(x^2-3\right)e^{2x}}{2}-\int xe^{2x}dx.$$

К стоящему справа интегралу снова применяем формулу интегрирования по частям, причём за u снова принимаем многочлен (т.е. x).

Имеем:

$$u=x,\ dv=e^{2x}dx.$$

Отсюда

$$du=dx \ \text{ и } \ v=\int e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{2}.$$

Окончательно:

$$\int\left(x^2-3\right)e^{2x}dx=\left(x^2-3\right)\frac{e^{2x}}{2}-\left(x\frac{e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right)=\left(x^2-3\right)\frac{e^{2x}}{2}-x\frac{e^{2x}}{2}+\frac{e^{2x}}{4}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2x^2-2x-5\right)e^{2x}+C. \blacktriangleleft$$

1.3.53. Найти $\int x\cos xdx.$

► Имеем: $\int x\cos x\,dx=\left|\begin{array}{c} u=x, \quad dv=\cos xdx, \\ du=dx, \quad v=\int\cos xdx=\sin x \end{array}\right|=$

$$=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+C. \blacktriangleleft$$

1.3.50. Найти $\int x^2\ln xdx.$

► Используя формулу и таблицу, имеем:

$$\int x^2\ln xdx=\left|\begin{array}{c} u=\ln x, \quad dv=x^2dx, \\ du=\dfrac{dx}{x}, \quad v=\dfrac{x^3}{3} \end{array}\right|=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x}dx=\frac{x^3}{9}\left(3\ln x-1\right)+C. \blacktriangleleft$$

1.3.54. Найти $\int x\,\mathrm{arctg}\,xdx.$

►Имеем:

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,xdx=\left|\begin{array}{c} u=\mathrm{arctg}\,x, \quad dv=xdx, \\ du=\dfrac{dx}{1+x^2}, \quad v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-\int\frac{x^2}{2\left(1+x^2\right)}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C. \blacktriangleleft$$

1.3.55. Найти $\int e^{ax}\sin bxdx.$

► Полагаем $u=e^{ax}$, $dv=\sin bx\,dx$. Тогда $du=ae^{ax}dx,\ v=-\frac{\cos bx}{b}$.

Используя формулу $\left(\int udv=uv-\int vdu\right)$, имеем:

$$\int e^{ax}\sin bxdx=-\frac{e^{ax}\cos bx}{b}+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bxdx.$$

Теперь полагаем $u=e^{ax}$, $dv=\cos bxdx$. Тогда $du=ae^{ax}dx,\quad v=\frac{\sin bx}{b}$ и

$$\int e^{ax}\sin bxdx=-\frac{e^{ax}}{b}\cos bx+\frac{a}{b}\left(\frac{e^{ax}}{b}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bxdx\right).$$

В итоге получено уравнение относительно неизвестного интеграла

$$\int e^{ax}\sin bxdx.$$

Решая это уравнение, находим:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C,$$

или окончательно искомый интеграл запишется в виде

$$\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C. \blacktriangleleft$$

Аудиторные задачи

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы:

1.3.56. 1.3.57.

1.4.58. 1.3.59.

1.3.60. 1.3.61.

1.3.62. 1.3.63.

1.3.64. .

1.3.65.

1.3.66.

1.3.67.

1.3.68.

1.3.69.

1.3.70.

Задание на дом

Найти интегралы.

1.3.71.

1.3.72.

1.3.73.

1.3.74.

1.3.75.

1.3.76.

1.4.77.

1.3.78.

1.3.79.

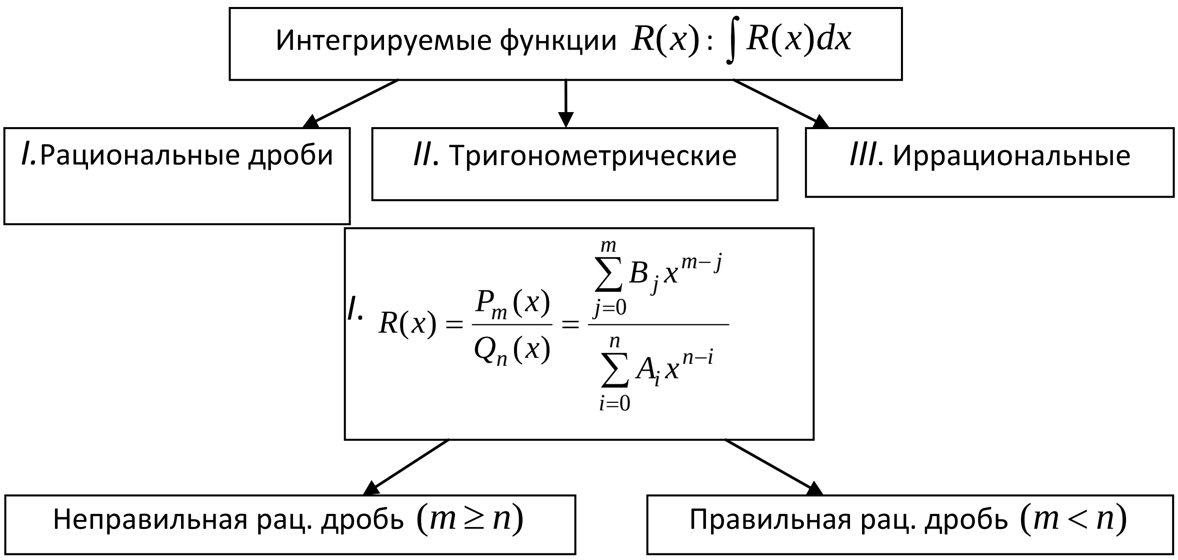
Тринадцатое и четырнадцатое практические занятия

Неопределенный интеграл

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить неопределенные интегралы, используя свойства и таблицу интегралов, специальные методы интегрирования.

Краткий конспект

КЛАССЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ



$$\begin{array}{l|l} P_m(x) & Q_n(x) \\ \cline{2-2} \cdots\cdots & L_{m-n}(x) \\ \cline{1-1} \end{array}$$ -целая часть

$r_k(x)$ - остаток

- правильная рациональная дробь $r_k(x)$

$$Q_n(x)=\prod_{i=1}^{l}(x-a_i)(x-b)^k\left(x^2+px+q\right)\cdots\times$$

$$\times\left(x^2+px+q\right)^m \rightarrow$$

$$\rightarrow R(x)=\sum_{i=1}^{l}\frac{A_i}{x-a_i}+\sum_{J=1}^{k}\frac{B_j}{(x-b)^j}+$$

$$+\frac{Mx+N}{x^2+px+q}+\cdots+\sum_{i=1}^{m}\frac{R_i x+S_i}{\left(x^2+rx+s\right)^i}$$

$A_i\left(i=\overline{i,l}\right),\ B_j\left(j=\overline{1,k}\right),\ M,\ N,\ R_i,\ S_i\left(i=\overline{1,m}\right)\in R$ - неизвестные коэффициенты

Метод неопределённых коэффициентов	Метод частных значений

Простейшие рациональные дроби I – IV типов

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{A}{(x-a)^k}\ (k\geq 2),\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}\ \left(k\geq 2,\ \frac{p^2}{4}-q<0\right)$$

Семина М.А. Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан.гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

Стр. 32-56

Интегрирование рациональных дробей

Примеры решения

2.1.1. Выделить целую часть дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{\left(x^2+1\right)^3}{x\left(x^2-2x+1\right)}$.

► Дробь неправильная, так как $m>n\ (m=6,\ n=3)$. Для выделения целой части записываем числитель и знаменатель в каноническом виде: $\left(x^2+1\right)^3=x^6+3x^4+3x^2+1,\ x\left(x^2-2x+1\right)=x^3-2x^2+x,$ выполняем деление «уголком» первого многочлена на второй:

$$
\begin{array}{l|l}
x^6+3x^4+x^2+1 & \dfrac{x^3-2x^2+x}{x^3+2x^2+6x+10} \\
-\underline{x^6-2x^5+x^4} & \\
2x^5+2x^4+3x^2+1 & \\
-\underline{2x^5-4x^4+2x^3} & \\
6x^4-2x^3+3x^2+1 & \\
-\underline{6x^4-12x^3+6x^2} & \\
10x^3-3x^2+1 & \\
-\underline{10x^3-20x^2+10x} & \\
17x^2-10x+1 &
\end{array}
$$

получаем в частном $x^3+2x^2+6x+10,$ а в остатке $17x^2-10x+1.$ Следовательно, $\dfrac{(x^2+1)^3}{x(x^2-2x+1)}=x^3+2x^2+6x+10+\dfrac{17x^2-10x+1}{x^3-2x^2+x}$, и выделение целой части закончено. ◄

2.1.2. Дробь $\dfrac{(x+1)^2}{x(x-1)^2}$ разложить в сумму простейших.

► Искомое разложение имеет вид $\dfrac{(x+2)^2}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{D}{(x-1)^2}$ Приводя правую часть к общему знаменателю, получаем тождественное равенство $x^2+4x+4=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Dx.$ (*) Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях *x* даёт систему уравнений:

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 & A+B=1, \\
x & -2A-B+D=4, \\
x^0 & A=4,
\end{array}
$$

откуда получаем $A=4$, $B=-3$, $D=9$. Следовательно, искомое разложение имеет вид:

$$
\frac{x^2+4x+4}{x(x-1)^2}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{9}{(x-1)^2}.
$$

Можно определить коэффициенты *A*, *B*,*D* другим способом, полагая последовательно в тождестве (*) $x=0,$ $x=1$и, например, $x=-1$: при $x=0$ находим $A=4$, при $x=1$ получаем $D=9$, а при $x=-1$ имеем $4A+2B-D=1$, т.е. $B=-3$.

При решении этого примера лучше всего было бы комбинировать оба способа, т.е. найти $A=4$ при $x=0$, $D=9$ при $x=1$, а B определить из равенства коэффициентов при x^2 в (*), т.е. из равенства $A+B=1$. ◄

2.1.3. Найти интеграл $\int \frac{x^4-x^2+2x-5}{x^2+1}dx.$

► Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Выполним деление многочлена на многочлен:

Следовательно,

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^4-x^2+2x-5 \\ x^4+4x^2 \end{array} & \underline{x^2+4} \\ \hline -\begin{array}{l} -5x^2+2x-5 \\ -5x^2-20 \end{array} & x^2-5 \\ \hline 2x+15 & \end{array}$$

$$\int \frac{x^4-x^2+2x-5}{x^2+1}dx = \int\left(x^2-5+\frac{2x+15}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int x^2dx - 5\int dx + \int \frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4} + 15\int \frac{dx}{x^2+4} =$$

$$= \frac{x^3}{3} - 5x + \ln\left(x^2+4\right) + \frac{15}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C. ◄$$

2.1.4. Найти интеграл $\int \frac{5x^2-15x+16}{x^3-4x^2+x+6}dx.$

► Прежде всего, нужно разложить на множители многочлен, стоящий в знаменателе, а для этого необходимо найти корни этого многочлена. По теореме Виета известно, что произведение всех корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$ многочлена с целыми коэффициентами $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ (для удобства полагаем $a_0 = 1$) удовлетворяют условию $\prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n a_n$. Отсюда следует, что корни многочлена являются делителями свободного члена a_n. У нас свободный член в знаменателе равен 6, поэтому корнями многочлена x^3-4x^2+x+6 могут быть числа $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ − делители числа 6. Непосредственно убеждаемся, что число $x_1=-1$ является корнем: $(-1)^3-4(-1)^2+(-1)+6=-1-4-1+6=0.$ По следствию из теоремы Безу видно, что многочлен x^3-4x^2+x+6 делится без остатка на разность $x-x_1$, в нашем случае на $x+1$.

Действительно,

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^3-4x^2+x+6 \\ \underline{x^3+x^2\qquad\qquad} \end{array} & \begin{array}{l} x+1 \\ \hline x^2-5x+6 \end{array} \\
-\begin{array}{l} -5x^2+x \\ \underline{-5x^2-5x} \end{array} & \\
-\begin{array}{l} 6x+6 \\ \underline{6x+6} \end{array} & \\
0 &
\end{array}
$$

Значит $x^3-4x^2+x+6=(x+1)\left(x^2-5x+6\right)$. Трёхчлен x^2-5x+6 имеет корни $x_2=2$ и $x_3=3$, поэтому $x^3-4x^2+x+6=(x+1)(x-2)(x-3)$, и данный интеграл можно записать в виде $\int\frac{5x^2-15x+16}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx.$ Так как многочлен в знаменателе дроби разлагается только на линейные множители, то эта дробь представлена в виде суммы простейших дробей только *I* типа. Запишем разложение дроби на простейшие в общем виде

$$\frac{5x^2-15x+16}{(x+1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{D}{x-3}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители левой и правой частей, получим тождество

$$5x^2-15x+16=A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+D(x+1)(x-2).$$

Задавая $x=-1, x=2$ и $x=3$ получим $A=3$, $B=-2$, $D=4$ и

$$\frac{5x^2-15x+16}{(x+1)(x-2)(x-3)}=\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x-2}+\frac{4}{x-3},$$

значит,

$$\int\frac{5x^2-15x+16}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx=\int\frac{3}{x+1}dx-\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{4}{x-3}dx=$$

$$=3\ln|x+1|-2\ln|x-2|+4\ln|x-3|+C.◄$$

2.1.5. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^3+2x^2+2x}$.

► Запишем знаменатель в виде произведения двух сомножителей $x^3+2x^2+2x=x\left(x^2+2x+2\right)$. Трёхчлен x^2+2x+2 имеет комплексные корни, так как

$D=\frac{p^2}{4}-q=1-2=-1<0$, значит его нельзя разложить на линейные множители с вещественными коэффициентами. Поскольку в знаменателе всего два множителя x и x^2+2x+2, рациональная дробь разлагается в общем виде на простейшие дроби *I* и *III* типа следующим образом:

$$\frac{1}{x\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+D}{x^2+2x+2}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю и приравниваем числители полученных дробей:

$$1=A\left(x^2+2x+2\right)+Bx^2+Dx.$$

Коэффициент *A* определяем, задавая $x=0$: $1=2A,\ A=\frac{1}{2}$.

Коэффициенты *B* и *D* определяем, приравнивая коэффициенты при x^2 и x в левой и правой частях:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & D=A+B,\ B=-A=-\frac{1}{2} \\ x & 0=2A+D \quad D=-2A=-1. \end{array}$$

Получаем $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $D=-1$ и

$$\int\frac{dx}{x\left(x^2+2x+2\right)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{x+2}{x^2+2x+2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{4}\int\frac{2x+4}{x^2+2x+2}dx=\frac{\ln|x|}{2}-\frac{1}{4}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2x+2}=\frac{\ln|x|}{2}-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+2x+2\right)-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$=\frac{\ln|x|}{2}-\frac{1}{4}\ln\left(x^2+2x+2\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)+C. \blacktriangleleft$$

2.1.6. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)^2}$.

► Дробь $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)^2}$ правильная, её разложение в сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Имеем $1=A\left(x^2+1\right)^2+(Bx+D)x\left(x^2+1\right)+(Ex+F)x$. Полагая $x=0$, находим $A=1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем $0=A+B, 0=D$, $0=2A+B+E$, $0=D+F$, т.е. $B=-1$, $D=0$, $E=-1$, $F=0$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)^2}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)dx=\ln|x|-\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{2}+\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+C.$$

Заметим, что разложение дроби $\dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)^2}$ на простейшие можно получить и не применяя метода неопределённых коэффициентов, а именно

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\left(1+x^2\right)-x^2}{x\left(x^2+1\right)}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}. \blacktriangleleft$$

Аудиторные задачи

I. Выделить целые части следующих дробей:

2.1.7. . 2.1.8. .

2.1.9. .

II. Следующие дроби разложить в сумму простейших:

2.1.10. . 2.1.11. .

2.1.12. .

III. Найти интегралы:

2.1.13. 2.1.14.

2.1.15. 2.1.16.

2.1.17. 2.1.18.

IV. Найти интегралы, не применяя метода неопределённых коэффициентов:

2.1.19. 2.1.20. 2.1.21.

Задание на дом

2.1.22. 2.1.23 2.1.24.

II. $R(\sin x,\ \cos x)$ – рациональная функция

$\sin x \quad \cos x$ ⊕○⊗○

1. $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

$$\left|\begin{array}{c} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t,\ x=2\operatorname{arctg}t \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right|$$

$$\int R^*(t)\,dt$$

2. $\int R(\sin x)\cos x\,dx$

$$\left|\sin x=t,\ \cos x dx=dt\right|$$

$$\int R(t)\,dt$$

3. $\int R(\cos x)\sin x\,dx$

$$\left|\cos x=t,\ -\sin x dx=dt\right|$$

$$-\int R(t)\,dt$$

4. $\int R(\operatorname{tg}x)\,dx$

$$\left|\begin{array}{c} \operatorname{tg}x=t, \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \end{array}\right|$$

5. $\int R\left(\sin^{2m}x, \cos^{2n}x\right)dx$

$$\left|\begin{array}{c} \operatorname{tg}x=t,\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}, \\ \cos^2 x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right|$$

$$\int R^*(t)\,dt$$

6. $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$

$m=2p+1,\ n=2q+1$ $\Rightarrow$ $\cos x=t,\ \sin x=t$

$m=2p,\ n=2q$ $\Rightarrow$ $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$m=2p,\ n=2q,\ mn<0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{tg}x=t,\ \operatorname{ctg}x=t$

$$\int R^*(t)\,dt$$

$$\boxed{7.\ \int \sin mx \cos nx\, dx} \Rightarrow \frac{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos(m+n)x}{m+n}+\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right)$$

$$\boxed{8.\ \int \cos mx \cos nx\, dx} \Rightarrow \frac{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right)$$

$$\boxed{9.\ \int \sin mx \sin nx\, dx} \Rightarrow \frac{\cos(m-n)x-\cos(m+n)x}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right)$$

2.2.3. Найти $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}$.

► Применяем подстановку $\operatorname{tg} x = t,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}$ (*КИФ, II.* $R(\sin x, \cos x)$ - рациональная функция, случай 4) и

$$\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x}=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4+t+\frac{4}{t}}=\int \frac{t}{(1+t^2)(4t+t^2+4)}dt==\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)(t+2)^2}$$

$$=\int\left(\frac{A}{t+2}+\frac{B}{(t+2)^2}+\frac{Ft+D}{1+t^2}\right)dt.$$

Определяем коэффициенты $A,\ B,\ F,\ D.$

$$t=A(t+2)(1+t^2)+B(1+t^2)+(Ft+D)(t+2)^2.$$

При $t=-2\ :\ -2=5B,\ B=-\frac{2}{5}:$

$$t=At+2A+At^3+2At^2+Bt^2+B+Ft^3+Dt^2+4Ft^2+4Dt+4Ft+4D.$$

$$t=t^3(A+F)+t^2(2A+B+D+4F)+t(A+4D+4F)+2A+B+4D.$$

$$\left.\begin{array}{l|l} t^3 & A+F=0 \\ t^2 & 2A+B+D+4F=0 \\ t & A+4D+4F=1 \\ t^0 & 2A+B+4D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} A+F=0 \\ 2A+B+4F=\frac{2}{5} \\ A+4D+4F=1 \\ 2A+4D=\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{3}{25}, \\ F=\frac{3}{25}, \\ D=\frac{4}{25}. \end{cases}$$

Тогда:

$$\int\frac{dx}{4+\operatorname{tg}x+4\operatorname{ctg}x}=-\frac{3}{25}\ln|t+2|+\frac{2}{5(t+2)}+\frac{3}{50}\ln\left(t^2+1\right)+\frac{4}{25}\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=-\frac{3}{25}\ln|\operatorname{tg}x+2|+\frac{2}{5(\operatorname{tg}x+2)}+\frac{3}{50}\ln\frac{1}{\cos^2x}+\frac{4}{25}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)+C=$$

$$=-\frac{3}{25}\ln|\operatorname{tg}x+2|+\frac{2}{5(\operatorname{tg}x+2)}-\frac{3}{25}\ln|\cos x|+\frac{4x}{25}+C. \blacktriangleleft$$

2.2.4. Найти $\int\frac{dx}{2-\sin^2x}$.

► Используя случай 5 (*КИФ, II.* $R(\sin x,\cos x)$ - рациональная функция), имеем:

$$\int\frac{dx}{2-\sin^2x}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=t,\quad \sin^2x=\dfrac{t^2}{1+t^2},\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(2-\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)}==\int\frac{dt}{2+t^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt2}+C=\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt2}+C. \blacktriangleleft$$

2.2.5. Найти $\int\frac{\sin^3x}{\sqrt[4]{\cos x}}dx.$

► Используя случай 6 (*КИФ, II.* $R(\sin x,\cos x)$ - рациональная функция), $m=3$ – нечётно, имеем:

$$\int\frac{\sin^3x}{\sqrt[4]{\cos x}}dx=\left|\begin{array}{l}\cos x=t,\quad \sin^2x=1-\cos^2x\\ -\sin x dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{1-t^2}{\sqrt[4]{t}}dt=-\int\frac{dt}{\sqrt[4]{t}}+\int t^{\frac{7}{4}}dt=$$

$$=-\frac{4t^{\frac{3}{4}}}{3}+\frac{4t^{\frac{11}{4}}}{11}+C=-4\frac{\sqrt[4]{\cos^3x}}{3}+4\frac{\sqrt[4]{\cos^{11}x}}{11}+C=$$

$$=-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\cos^3x}+\frac{4}{11}\cos^2x\sqrt[4]{\cos^3x}+C. \blacktriangleleft$$

2.2.6. Найти $\int\sin^2x\cos^4x\,dx.$

► Так как $m=2, n=4$ – чётные положительные числа, то данный интеграл вида 6 (*КИФ, II.* $R(\sin x,\cos x)$). Сначала воспользуемся формулами

$$\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2},\ \cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}:$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{\sin^2 2x}{4} \;\; \frac{1+\cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x\, dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x)\, dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x\, d(\sin 2x) = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C. \blacktriangleleft$$

2.2.7. Найти $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$

► Используя случай 6 (*КИФ, II.* $R(\sin x, \cos x)$), $n = -6 < 0$,

имеем:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad \cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right| = \int \frac{t^2}{\dfrac{1}{1+t^2}} dt = \int t^2 \left(1 + t^2\right) dt =$$

$$= \int \left(t^2 + t^4\right) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C. \blacktriangleleft$$

2.2.8. Найти $\int \cos 9x \cos 5x\, dx.$

► Следуя случаю 8 (*КИФ, II.* $R(\sin x, \cos x)$), имеем:

$$\int \cos 9x \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 14x + \cos 4x) dx = \frac{\sin 14x}{28} + \frac{\sin 4x}{8} + C. \blacktriangleleft$$

Аудиторные задачи

Найти интегралы:

2.2.9. 2.2.10.

2.2.11. 2.2.12.

2.2.13. 2.2.14.

2.2.15. 2.2.16.

2.2.17. 2.2.18.

2.2.19. 2.2.20.

2.2.21. 2.2.22.

2.2.23. 2.2.24.

2.2.25. 2.2.26.

2.2.29.

2.2.30. .

Задание на дом

2.2.33.

2.2.34.

2.2.35.

2.2.36.

2.2.37.

2.2.38.

2.2.39.

2.2.40.

2.2.41.

2.2.42.

Пятнадцатое практические занятие

Неопределенный интеграл

Интегрирование иррациональных функций

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить неопределенные интегралы, используя свойства и таблицу интегралов, специальные методы интегрирования.

III. Иррациональные функции

1. $R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_l}{n_l}}\right)$ $m_i, n_i \ \left(i=\overline{1,l}\right) \in Z$

$$\left|\frac{ax+b}{cx+d}=t^k,\ k=НОЗ\,\frac{m_i}{n_i},\ i=\overline{1,l}\right|$$

2. $\dfrac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

$$x+\frac{b}{2a}=t$$

$$R^*(t)$$

3. $R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)$

$$\left|x=a\sin t\right|$$

4. $R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)$

$$\left|x=\frac{a}{\cos t}\right|$$

5. $R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)$

$$\left|x=a\operatorname{tg} t\right|$$

$$R^*(\sin t, \cos t)$$

Замечание. $\exists$ НИ, не выражающиеся через элементарные функции: $\int e^{-x^2}dx$ – интеграл Пуассона, $\int\frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм, $\int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx$ – интегральныйсинус и косинус, $\int\sin x^2dx,\ \int\cos x^2dx$ - интегралы Френеля, $\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx\ (k\ge 2),\ \int\frac{e^x}{x}dx,\ \int e^{\operatorname{arctg} x}dx,\ \int\sqrt[3]{x^3+1}dx,\ \int\sqrt{\sin x}\,dx,\ \int\ln\sin x\,dx$ и др.

Семина М.А. Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан.гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

Стр. 57-65

Примеры решения

2.3.1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2}$.

► Следуя случаю 1 (*КИФ*, *III*. Иррациональные функции), имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^2} = \left| \begin{array}{l} x = t^4, \quad dx = 4t^3 dt \\ \sqrt{x} = t^2, \quad \sqrt[4]{x} = t \end{array} \right| = \int \frac{4t^3}{t^2(t+1)^2} dt = 4\int \frac{t}{(t+1)^2} dt = = 4\int \frac{t+1-1}{(t+1)^2} dt =$$

$$4\int \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} \right) = 4\ln|t+1| + \frac{4}{t+1} + C =$$

$$= 4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right) + \frac{4}{\sqrt{x}+1} + C. \ ◄$$

2.3.2. Найти $\int \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}+2}{\left((x-1)^{\frac{1}{3}}+1\right)(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx.$

► Общим знаменателем дробей $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ является число 6. Подстановка $x-1=t^6$, $dx = 6t^5 dt$ преобразует интеграл к виду:

$$\int \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}+2}{\left((x-1)^{\frac{1}{3}}+1\right)(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx = \int \frac{\left(t^3+2\right)6t^5}{\left(t^2+1\right)t^4} dt =$$

$$= 6\int \frac{t^4+2t}{t^2+1} dt = 6\int \left(t^2 - 1 + \frac{2t+1}{t^2+1} \right) dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - t + \ln\left(t^2+1\right) + \operatorname{arctg} t \right) + C =$$

$$= 2\sqrt{x-1} - 6\sqrt[6]{x-1} + 6\ln|\sqrt[3]{x-1}+1| + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x-1} + C. \ ◄$$

2.3.3. Найти $\int \sqrt{\frac{1+x}{x}} \frac{dx}{x^2}$.

► Следуя случаю 1 (*КИФ*, *III*. Иррациональные функции), имеем:

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,\frac{dx}{x^2}=\left|\begin{array}{l}\dfrac{x+1}{x}=t^2,\quad x=\dfrac{1}{t^2-1}\\ dx=-\dfrac{2t}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt\end{array}\right|=\int\left(t^2-1\right)^2 t\,\frac{(-2t)}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt=$$

$$=-2\int t^2dt=-\frac{2t^3}{3}+C=-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^3}+C=-\frac{2}{3}\frac{x+1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}+C.\ ◄$$

2.3.4. Найти $\int\frac{x-5}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx.$

► Следуя случаю 2 (*КИФ*, *III*. Иррациональные функции), имеем:

$$\int\frac{x-5}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx=\left|\begin{array}{l}t=\dfrac{\left(x^2-2x\right)'}{2}=x-1\\ x-5=t-4,\quad dx=dt\end{array}\right|=\int\frac{t-4}{\sqrt{t^2-1}}\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2-1\right)}{\sqrt{t^2-1}}-4\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=$$

$$=\sqrt{t^2-1}-4\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|+C=\sqrt{x^2-2x}-4\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right|+C.\ ◄$$

2.3.5. Найти $\int\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}\,dx.$

► Следуя случаю 3 (*КИФ*, *III*. Иррациональные функции), имеем:

$$\int\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}dx=\left|\begin{array}{l}x=2\sin t,\quad dx=2\cos t\,dt\\ \sqrt{\left(4-x^2\right)^3}=8\cos^3 t\end{array}\right|=\int 8\cos^3 t\,\frac{2\cos t}{64\sin^6 t}\,dt=\frac{1}{4}\int\frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\operatorname{ctg}^4 t}{\sin^2 t}\,dt=-\frac{1}{4}\int\operatorname{ctg}^4 t\,d\left(\operatorname{ctg} t\right)=-\frac{1}{4}\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 t+C=-\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^5}}{20x^5}+C.\ ◄$$

Аудиторные задачи

Найти интегралы:

.2.3.6. 2.3.8.

2.3.7. 2.3.9.

2.3.10. 2.3.11. 2.3.12. .

2.3.13. 2.3.14. 2.3.15.

2.3.18. 2.3.19. .3.20.

Задание на дом

Найти интегралы:

2.3.21.

2.3.22.

2.3.23.

2.3.24.

2.3.25.

2.3.26.

Шестнадцатое практические занятие

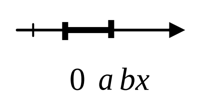
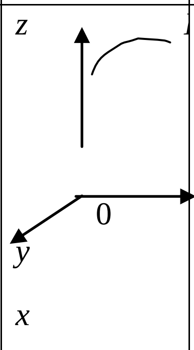
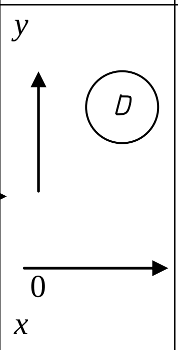
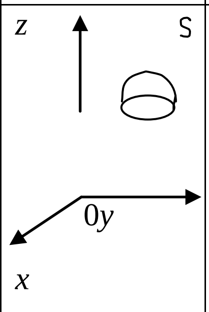
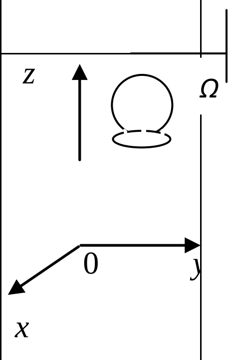
Определенный интеграл

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с умением находить определенные интегралы, используя их математическое и физическое приложения, знанием определения несобственных интегралов и умения их вычислять.

Краткий конспект

ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Задача о массе математической фигуры и определенный интеграл

Тип фигуры Φ	Прямой стержень $[a;b]$	Кривой стержень L	Плоская пластинка (область) D	Изогнутая пластинка (поверхность) S	Тело Ω
Вид Φ в $R^n,\ n=\overline{1,3}$					
Разбиение на элементарные частицы: $\Delta\Phi_i \quad i=\overline{1,n}$	Δx	Δl_i	$\Delta\sigma_i$	ΔS_i	ΔV_i
Мера фигуры $\Delta\Phi$	длина		площадь		объём

Выбор $M_i \in {}_\Delta\Phi_i \Rightarrow$ плотность $\rho(M_i)$	$\rho(x)$	$\rho(x,y,z)$	$\rho(x,y,z)$	$\rho(x,y,z)$	$\rho(x,y,z)$
Диаметр разбиения фигуры λ	$\lambda = \max\limits_i \lambda_i = \max\limits_i \operatorname{diam}_\Delta \Phi,\ \lambda_i = \operatorname{diam}_\Delta \Phi_i = \max A_i B_i,\ A_i \in_\Delta \Phi_i,$ $B_i \in_\Delta \Phi_i,\quad \Phi = \bigcup\limits_{i=1}^{n} {}_\Delta\Phi_i,\ {}_\Delta\Phi_i \cap {}_\Delta\Phi_j = 0,\ i \neq j$				
Масса фигуры Φ m	$S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(M_i)_\Delta \Phi_i \Rightarrow m = \lim\limits_{\lambda\to 0} S_n = \lim\limits_{\lambda\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(M_i)_\Delta \Phi_i,\ M_i \in_\Delta \Phi_i$ $m \approx S_n$				
Необходимые операции	1. $\Phi = \bigcup\limits_{i=1}^{n} {}_\Delta\Phi_i$ 2. $M_i \in {}_\Delta\Phi_i,\ i = \overline{1,n}$. 3. $f(M_i)\cdot{}_\Delta\Phi_i,\ i = \overline{1,n}$. 4. $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)_\Delta \Phi_i$				
Понятие $ОИ$	$\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)_\Delta \Phi_i = S_n \Rightarrow \lim\limits_{\lambda\to 0} S_n = \int\limits_\Phi f(M)d\Phi$ интегральная сумма				
Типы $ОИ$	$\int\limits_a^b f(M)dx$	$\int\limits_{AB} f(M)d\ell$	$\iint\limits_D f(M)d\sigma$	$\iint\limits_S f(M)dS$	$\iiint\limits_\Omega f(M)dT$
Название $ОИ$	$ОИ$	$КИ\ I\,р.$	$ДИ$	$ПИ\ I\,р.$	$ТИ$
Геометри-ческий смысл	Площадь криволинейной трапеции	Площадь боковой поверхности цилиндра	Объём цилиндри-ческого тела	—	—

2. Свойства $ОИ$

1°. <u>Линейность</u>. $\exists \int\limits_\Phi f(M)d\Phi,\ \exists \int\limits_\Phi \varphi(M)d\Phi,$

$$\alpha,\ \beta - const \ \Rightarrow \int\limits_\Phi (\alpha f + \beta \varphi)d\Phi = \alpha \int\limits_\Phi f\, d\Phi + \beta \int\limits_\Phi \varphi\, d\Phi.$$

2°. Аддитивность. $\varPhi = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \varPhi_i$, $\exists \int\limits_{\varPhi} f(M)\,d\varPhi \Rightarrow \int\limits_{\varPhi} f\,d\varPhi = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{\varPhi_i} f(M)\,d\varPhi.$

3°. Мера фигуры. $f(M)=1 \Rightarrow \int\limits_{\varPhi} d\varPhi = \varPhi.$

4°. Монотонность.

$$\exists \int\limits_{\Phi} f(M)\,d\varPhi,\ \exists \int\limits_{\Phi} \varphi(M)\,d\varPhi,\ f(M) \ge \varphi(M) \ge 0\ \forall M \in \varPhi \Rightarrow$$

$$\int\limits_{\varPhi} f(M)\,d\varPhi \ge \int\limits_{\varPhi} \varphi(M)\,d\varPhi.$$

5°. Оценка модуля. $\exists \int\limits_{\varPhi} f(M)\,d\varPhi \Rightarrow$

$$\exists \int\limits_{\varPhi} |f(M)|\,d\varPhi:\ \left|\int\limits_{\varPhi} f(M)\,d\varPhi\right| \le \int\limits_{\varPhi} |f(M)|\,d\varPhi.$$

6°. Теорема о среднем.

$f(M)$ – непрерывна в $\varPhi \Rightarrow \exists\, C \in \varPhi:\ \int\limits_{\varPhi} f(M)\,d\varPhi = f(C)\cdot\varPhi.$

3. Вычисление *ОИ*. Формула Ньютона - Лейбница

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b}$$ - формула Ньютона- Лейбница.

4. Методы интегрирования

Замена переменной	Интегрирование по частям

Замена переменной:

$$\int\limits_a^b f(x) = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt \\ (\exists \varphi'(t) \forall t \in (\alpha, \beta)) \\ \dfrac{x \mid a \mid b}{t \mid \alpha \mid \beta} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Интегрирование по частям:

$$\exists u', v' \forall x \in (a,b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du$$

5. Приближенное вычисление *ОИ*

(замена кривой $y = f(x)$ «близкой» к ней)

Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + \frac{(b-a)i}{n}\right)\right)$$

$$\Delta \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2},\ M = \max\left|f''(x)\right| \quad \forall x \in (a,b)$$

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6}\left(f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

$$\Delta \le \frac{M(b-a)^3}{2880n^4},\ M = \max\left|f^{(4)}(x)\right| \quad \forall x \in (a,b)$$

6. Несобственные интегралы ($Н^сИ$)

$Н^сИ$ с бесконечными пределами интегрирования

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} + \int_{c}^{\infty}$$

$Н^сИ$ от разрывных функций

$x = b$ - *т. р. IIр*

$$\int_a^b = \lim_{c\to b-o}\int_a^c$$

$x = a$ -*т. р. II р*

$$\int_a^b = \lim_{c\to a+o}\int_c^b$$

$x = x_0$ -*т р. IIр*

$$\int_a^b \lim_{c\to x_0-o}\int_a^c + \lim_{c\to x_0+o}\int_c^b$$

Признаки сходимости $Н^сИ$

1. $F'(x) = f(x)$

$\exists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$, $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)$ -

сходится

$\int\limits^{+\infty} f(x)dx -$

2. $\forall x \in [a,\infty)\ 0 \le f(x) \le \varphi(x)$

$\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx -$ сход. $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx -$ расх.

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx -$ сход. $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx -$ расх.

3. $\forall x \in [a,\infty),\ f(x) > 0,$

$\varphi(x) > 0,\ \exists \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f}{\varphi} \ne 0, \infty$

$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx,\ \int\limits_a^{\infty} \varphi(x)dx$ -

4. $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx -$ сходится

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx -$ сходится абсолютно

Семина М.А. Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан.гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

Стр. 79-108

Свойства *ОИ*. Вычисление *ОИ*.

Формула Ньютона – Лейбница

Примеры решения

3.1.1. Определить знак интеграла $\int\limits_{-1}^{3} \sqrt[5]{x}dx$, не вычисляя его.

► Используя свойство 2° *ОИ*, геометрический смысл *ОИ* и нечётность функции $\sqrt[5]{x}$, имеем:

$$\int\limits_{-1}^{3} \sqrt[5]{x}dx = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt[5]{x}dx + \int\limits_{1}^{3} \sqrt[5]{x}dx = 0 + \int\limits_{1}^{3} \sqrt[5]{x}dx > 0. \blacktriangleleft$$

3.1.2. Не вычисляя, выяснить какой из интегралов $\int\limits_0^1 x^2 dx$ и $\int\limits_0^1 x^3 dx$ больше.

► Используя свойство 4° *ОИ* и неравенство $x^3 \le x^2 \ \forall\, x \in [0,1]$ имеем, что

$$\int_0^1 x^3 dx < \int_0^1 x^2 dx. \ ◄$$

3.1.3. Оценить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

► Так как $1 \le 1 + x^4 \le 2 \ \forall x \in [0,1]$, используя свойства *ОИ* 4° и 5°, имеем $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \le 1$, т.е. $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $M = 1$, $b - a = 1$ и $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. ◄

3.1.4. Сила переменного тока меняется по закону $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)$, где T - период. Найти среднее значение силы тока за полупериод.

► Используя теорему о среднем (6° *ОИ*) и формулу Ньютона – Лейбница, имеем

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} I_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) dt = \frac{2}{T} I_0 \frac{T}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{I_0}{\pi}\left(\cos\varphi - \cos(\pi + \varphi)\right) = \frac{2}{\pi} I_0 \cos\varphi. \ ◄$$

3.1.5. Вычислить интеграл $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$.

► Используя формулу Ньютона − Лейбница и таблицу *НИ*, получим

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} = \int_e^{e^2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln|\ln x|\,\Big|_e^{e^2} = \ln\ln e^2 - \ln\ln e = \ln 2 \approx 0{,}69. \ ◄$$

Аудиторные задачи

Вычислить интегралы:

3.1.6. 3.1.7. 3.1.8.

3.1.9. 3.1.10.

3.1.11. 3.1.12.

3.1.13.

3.1.14.

Интегрирование заменой переменной

и по частям в *ОИ*

Примеры решения

3.2.1. Вычислить $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$

► Сделаем подстановку $x=\sin t,\ dx=\cos t\,dt.$ По выбранной подстановке определяются новые пределы интегрирования. При $x=0$ и при $x=1$ имеем $0=\sin t$ и $1=\sin t,$ находим соответственно $t=0$ и $t=\frac{\pi}{2}$. Таким образом, изменению переменной x от $x=0$ до $x=1$ соответствует изменение переменной t от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$.

Используя случай 1 (Методы интегрирования. Замена переменной), получаем:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4}.\ ◄$$

3.2.2. Вычислить $\int\limits_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

► Учитывая иррациональность функции и выбирая соответствующую замену, имеем:

$$\int\limits_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left|\begin{array}{l} x=t^2, \quad dx=2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 4 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array}, \quad \sqrt{x}=t \end{array}\right| = \int\limits_1^2 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int\limits_1^2 dt - 2\int\limits_1^2 \frac{dt}{t+1} = = 2t\Big|_1^2 - 2\ln|1+t|\Big|_1^2 =$$

$$2-2\ln\frac{3}{2}.\ ◄$$

3.2.3. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

► Интегрируем по частям, полагая $u=x,\ dv=\frac{dx}{\cos^2 x},$ находим

$$du = dx,\ v = \operatorname{tg} x.$$

Поэтому:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x} = (x \operatorname{tg} x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = \frac{\pi}{4}\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - 0 + \ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 = -\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4}. ◄$$

3.2.4. Вычислить $\int_1^e \ln x dx.$

► Следуя применению формулы интегрирования по частям, имеем:

$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x},\ v = x \end{array} \right| = (x \ln x)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{xdx}{x} = e - x\Big|_1^e = e - e + 1 = 1. ◄$$

Аудиторные задачи

I. Вычислить интегралы с помощью указанных подстановок:

3.2.5. 3.2.6.

3.2.7.

II. Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

3.2.8. 3.2.9.

3.2.10. 3.2.11.

3.2.12. 3.2.13.

III. Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

3.2.14. 3.2.15.

3.2.16. 3.2.17.

3.2.18. 3.2.19.

Задание на дом

3.2.20. 3.2.213. 2.22.

Несобственный интеграл ($Н^сИ$)

Примеры решения

3.4.1. Вычислить $Н^сИ$ или установить его расходимость $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x} dx.$

► Используя определение $Н^сИ$, имеем:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b e^{-3x} dx = \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{-e^{-3x}}{3} \right|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{1-e^{-3b}}{3} = \frac{1}{3}. ◄$$

3.4.2. Вычислить $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}.$

► По определению

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^b \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \lim_{b\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}. ◄$$

3.4.3. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{1} x e^x dx.$

► Используя определение и формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{1} x e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^1 x e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = e^x \end{matrix} \right| = \lim_{a\to-\infty} \left(\left(x e^x \right)\Big|_a^1 - \int\limits_a^1 e^x dx \right) =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(e - a e^a - e + e^a \right) = \lim_{a\to-\infty} e^a (1-a) = (0\infty).$$

Приводим неопределённость $(0 \cdot \infty)$ к виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{a\to-\infty} \frac{1-a}{e^{-a}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{a\to-\infty} \frac{-1}{-e^{-a}} = \lim_{a\to-\infty} e^a = 0.$$

Значит

$$\int\limits_{-\infty}^{1} x e^x dx = 0. ◄$$

3.4.4. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}.$

► По определению $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

В силу чётности подынтегральной функции

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Поэтому:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = 2\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t, \quad dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ 1+x^2 = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{array} \right| =$$

$$= 2\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg} b} \cos^2 t\, dt = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{\operatorname{arctg} b} (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\operatorname{arctg} b + \frac{1}{2}\sin\left(2\operatorname{arctg} b\right)\right) = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleleft$$

3.4.5. Вычислить $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^{\frac{4}{5}}}$.

► В т. $x=1$ подынтегральная функция терпит разрыв*II*рода. Имеем *Н^сИ* от разрывной функции. По определению:

$$\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{\left(x^2-1\right)^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} \frac{d\left(x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^{\frac{4}{5}}} = \lim_{b\to 1-0}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{5}}\Big|_{0}^{2} \frac{5}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\, 5\lim_{a\to 1+0}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{5}}\Big|_{a}^{2} = \frac{5}{2} + 5\cdot\frac{\sqrt[5]{3}}{2} = \frac{5\left(\sqrt[5]{3}+1\right)}{2}. \blacktriangleleft$$

3.4.6. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5}+1}\, dx.$$

► Для исследования используем предельный признак сходимости *Н^сИ*.

В качестве интеграла, с которым будем сравнивать исследуемый, возьмём $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty,$ который расходится. Тогда

$$f(x) = \frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5}+1},\ g(x) = \frac{1}{x}$$

и предел отношения данных функций запишется в виде:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(3x^2+\sqrt{(x+1)^3}\right)x}{2x^3+\sqrt[3]{x^5}+1} = \frac{3}{2}$$

и по теореме исследуемый интеграл также расходится. ◄

3.4.7. Исследовать на сходимость $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.

► Для сравнения с исследуемым интегралом возьмём $\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$, который расходится:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{a\to 1+0}\int_a^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{a\to 1+0} \ln|x-1|\Big|_a^2 = -\infty \text{ - расходится.}$$

При $x\to 1$ функции $\frac{1}{\ln x} \sim \frac{1}{x-1}$ – эквивалентные бесконечно большие, так как

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Значит, расходится и исследуемый интеграл. ◄

Аудиторные задачи

I. Вычислить $H^cИ$ (или установить их расходимость):

3.4.8. 3.4.9. 3.4.10.

3.4.11. 3.4.12. 3.4.13.

3.4.14. 3.4.15. 3.4.16.

3.4.17. 3.4.18.

3.4.19.

3.4.20. 3.4.21. 3.4.22.

II. Исследовать на сходимость интегралы:

3.4.23. 3.4.24.

3.4.25. 3.4.26.

3.4.27. 3.4.28.

3.4.29. 3.4.30. 3.4.31.

Задание на дом

I. Вычислить *НсИ* (или установить их расходимость):

3.4.32. 3.4.33.

3.4.34. 3.4.35.

II. Исследовать на сходимость интегралы:

3.4.36. 3.4.37.

3.4.38. .

3.4.39.

3.4.40.

Контрольная работа по теме «Неопределенные интегралы»

Это практическое занятие отводится для упражнений, связанных с контролем навыков нахождения неопределенных интегралов различными способами и методами.

Аудиторные задачи

Семина.М.А. Интегральное исчисление функции одной и многих переменных: сборник задач / М.А. Семина; под редакцией В.В. Кондратьева – Казань: издательство Казан.гос. техн. ун-та, 2012, 235 с.

Стр. 71-78.