aba80b84033c9ef196388e9ea0434f90a83a40954ba270e84bcbe64f02d1d8d0

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический

университет им. А.Н. Туполева-КАИ»

(КНИТУ-КАИ)

Чистопольский филиал «Восток»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

по дисциплине

МАТЕМАТИКА ЧАСТЬ 3

Индекс по учебному плану: **Б1.О.07.03**

Направление подготовки: **12.03.01 Приборостроение**

Квалификация: **Бакалавр**

Профиль подготовки: **Приборостроение**

Типы задач профессиональной деятельности: **проектно-конструкторская, производственно-технологическая**

Рекомендованы УМК ЧФ «Восток» КНИТУ-КАИ

Чистополь
2023 г

Первое и второе практические занятия

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ (*ДИ*)

$$\iint_D f(x,y)ds$$

Вычисление *ДИ*

1. В декартовых координатах

$D: y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x)<\varphi_2(x)), x=a,$ $x=b,\ (a<b)$

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

$D: y=\psi_1(x), y=\psi_2(x)$ $(\psi_1(x)<\psi_2(x)), y=c,$ $y=d,\ (c<d)$

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

2. В полярных координатах

$$x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi$$

$$J=\begin{vmatrix} x'_r & y'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi \end{vmatrix}=r,\ \ ds=|\,J\,|\,drd\varphi$$

$$\iint_D f(x,y)dS=\iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi=$$

$$=\int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f^*(r,\varphi)rdr$$

$$D:\varphi\in[\alpha,\beta],\ r=r_1(\varphi), r=r_2(\varphi)\ \ (r_2>r_1)$$

Приложения *ДИ*

Геометрические	
Площади S_D	$S_D=\iint_D dS=\iint_D dxdy=\iint_D r\,drd\varphi$
Объемы V_Ω	$V_\Omega=\iint_D f(x,y)dS=\iint_D f^*(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi$
Площади поверхности G	$G: z=f(x,y)\ G=\iint_D \sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}dS$

Физические	
Статические моменты	$S_x=\iint_D y\rho(x,y)dS$, $S_y=\iint_D x\rho(x,y)dS$

Координаты центра масс	$x_o=\dfrac{S_x}{m}=\dfrac{\iint\limits_D x\rho\,dS}{\iint\limits_D \rho\,dS}$, $y_o=\dfrac{S_y}{m}=\dfrac{\iint\limits_D y\rho\,dS}{\iint\limits_D \rho\,dS}$
Моменты инерции	$I_x=\iint\limits_D y^2\rho\,dS$, $I_y=\iint\limits_D x^2\rho\,dS$ $\rho=\rho(x,y)$

5.1. Вычисление *ДИ* в декартовых координатах

Примеры решения

5.1.1. Расставить пределы интегрирования в двойных интегралах $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ от функции $f(x,y)$, непрерывной в указанных областях *D*:

$1.\, D: y=x^2,\ y=x.$ $\qquad$ $2.\, D: x^2-y^2=1,\ y=1,\ y=-2.$

► 1. Построим область *D* (рис. 5.1). Первая линия − парабола, симметричная относительно оси *OY*, вторая − прямая. Найдем точки пересечения этих линий. Решаем уравнения $y=x^2$ и $y=x$, находим: $x_1=0,\ y_1=0,\ x_2=1,\ y_2=1.$ Область интегрирования является правильной в направлении обеих осей.

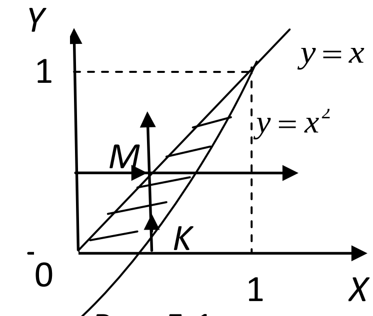


Рис. 5.1

Воспользуемся сначала формулой (вычисление *ДИ* в декартовых координатах)

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy.$$

Здесь в повторном интеграле внутреннее интегрирование производится по переменной y, а внешнее − по x. Пределы интегрирования получены следующим образом. Область *D* была спроектирована на ось *OX* (область заключили в полосу, параллельную *OY*), тогда $x\in[0,1]$. Через произвольную точку $x\in(0,1)$ провели прямую, параллельную оси *OY* в положительном направлении, отметили точки входа (*K*) этой прямой в область и выхода (*M*). Функция $y=x^2$, которой удовлетворяют точки входа − нижний предел для y, функция $y=x$, которой удовлетворяют точки выхода − верхний предел. Таким образом,

$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\quad x^2\le y\le x\}.$$

При внешнем интегрировании по y область *D* заключаем в полосу, параллельную оси *OX*, тогда $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\quad y\le x\le \sqrt{y}\}$.

Применив формулу (вычисление *ДИ* в декартовых координатах), получим:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

2. Построим область *D* (рис. 5.2). Область *D* ограничена двумя прямыми и двумя ветвями гиперболы. Как видно из рисунка, область *D* является правильной в направлении оси *OX*.

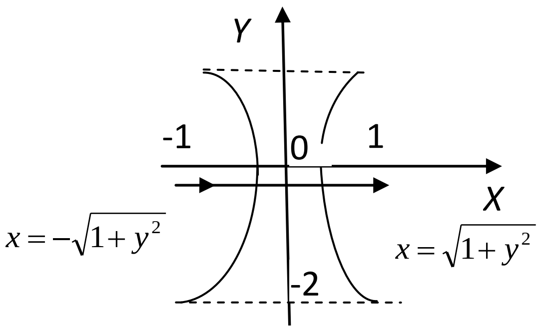


Рис. 5.2

По отношению к оси *OY* область *D* не является правильной (почему?). Тогда используя формулу (вычисление *ДИ* в декартовых координатах), получим:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{-2}^{1} dy\int\limits_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x,y)dx. \blacktriangleleft$$

5.1.2. Записать в виде одного повторного интеграла следующие выражения

1. $\int\limits_0^2 dy\int\limits_y^{2y} f(x,y)dx+\int\limits_2^4 dy\int\limits_y^4 f(x,y)dx.$

2. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy+\int\limits_1^4 dx\int\limits_0^{\frac{4-x}{3}} f(x,y)dy.$

► 1. Область $D = D_1 \cup D_2$. Построим области D_1 иD_2, если D_1=$\{(x, y)|$ $0 \le y \le 2, \quad y \le x \le 2y\}$, $D_2 = \{(x, y)|\ 2 \le y \le 4, \quad y \le x \le 4\}$ (рис. 5.3).

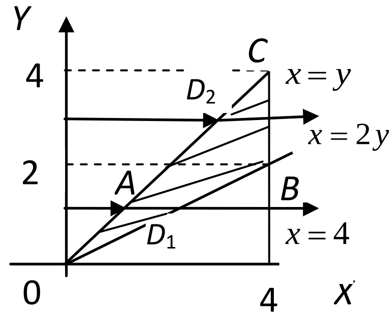


Рис. 5.3

Видно, что область D − правильная в направлении оси OX. Левая часть границы области D − одна линия, а именно $x = y$, а его правая часть состоит из двух линий OB и BC, определяемых разными уравнениями: $x = 2y$ и $x = 4$. Поэтому область D представлена суммой ($D_1 \cup D_2$) двух областей D_1 и D_2. Однако областьD является правильной в направлении оси OY. Если её заключить в полосу, параллельную оси OY, то $D = \left\{(x, y)|\ 0 \le x \le 4, \quad \frac{x}{2} \le y \le x\right\}$, а двойной интеграл запишется в виде одного повторного:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(x, y)dy.$$

2. Построим области $D_1 = \{(x, y)|\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$ и $D_2 = \left\{(x, y)|1 \le x \le 4, 0 \le y \le \frac{4 - x}{3}\right\}$ (рис. 5.4).

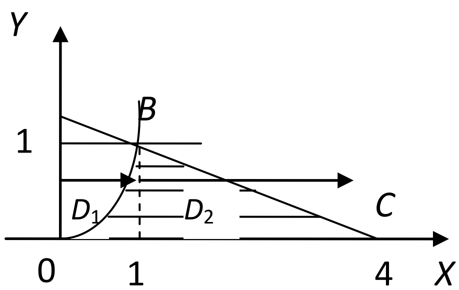


Рис. 5.4

Область $D = D_1 \cup D_2$является правильной в направлении оси OY. Нижняя ее граница − одна линия $y = 0$, а верхняя состоит из двух линий OB и BC, определяемых разными уравнениями: $y = x^2$и $y = \frac{4 - x}{3}$. Область является правильной и в направлении оси OX. Если её заключить в полосу, параллельную оси OX, то

$D=\left\{(x,y)\,\middle|\, 0\le y\le 1,\ \sqrt{y}\le x\le 4-3y\right\}$. В этом случае двойной интеграл представляется в виде одного повторного:

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^4 dx\int_0^{\frac{4-x}{3}} f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{4-3y} f(x,y)dx. \blacktriangleleft$$

5.1.3. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$I=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$$

► Построим область, ограниченную прямыми: $y-0$ - снизу, $y=1$ - сверху и линиями: $x=-\sqrt{1-y^2}$ - слева, $x=1-y$ - справа (рис. 5.5).

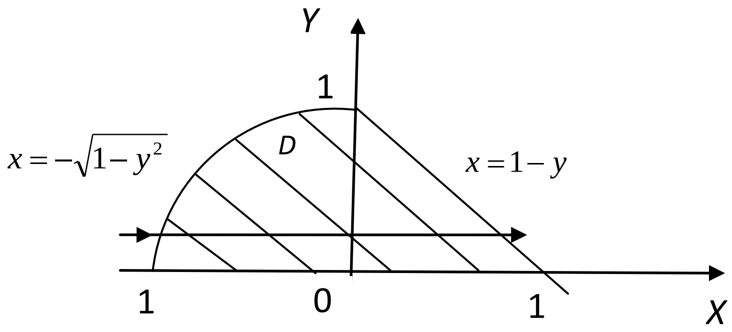


Рис. 5.5

Как нетрудно заметить, линия $x=-\sqrt{1-y^2}$ есть левая половина окружности $x^2+y^2=1$. Область *D*является правильной относительно каждой из осей *OX* и *OY*, но на разных отрезках оси *OX* она сверху ограничена разными линиями: на отрезке [−1, 0] − это верхняя половина окружности $y=\sqrt{1-x^2}$, а на отрезке [0,1] − это прямая $y=1-x$. Снизу область *D* ограничена осью абсцисс $y=0$. Следовательно, можно записать

$$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy. \blacktriangleleft$$

5.1.4. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy,\quad D:\ x=0,\ y=1,\ y^2=x.$

► В данном случае область интегрирования D (рис. 5.6) является правильной как относительно оси OY, так и оси OX, поэтому нетрудно перейти к повторному интегралу двумя способами:

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} dy,$ 2. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx.$

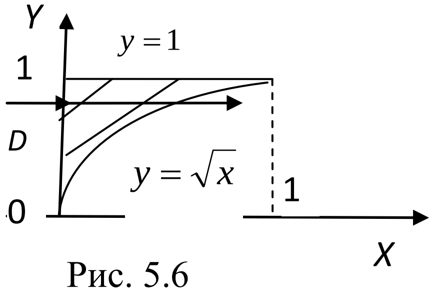


Рис. 5.6

Однако, второй способ предпочтительней, поскольку в первом случае для внутреннего интеграла первообразная не выражается через элементарные функции. Это замечание может быть полезно и в ряде других примеров, поскольку изменение порядка интегрирования часто упрощает вычисления. В данном случае будем иметь:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx = \int\limits_0^1 \left(y e^{\frac{x}{y}} \right)\Bigg|_0^{y^2} dy = \int\limits_0^1 \left(y e^y - y \right) dy = \frac{1}{2}. ◄$$

5.1.5. Найти среднее значение функции $f(x, y) = 3x + 2y$ в треугольнике O (0, 0), A (1, 0), B (0, 1).

► Используя теорему о среднем ($6°$), имеем $f_{cp} = \frac{1}{S_D} \iint\limits_D f(x, y) dxdy.$ Площадь

$_{\Delta}$OAB $S_D = OA \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$ и

$$\iint\limits_D (3x + 2y) dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (3x + 2y) dy = = \int\limits_0^1 \left(\left(3xy + y^2\right)\Big|_0^{1-x} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(3x(1 - x) + 1 - x^2 \right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{(1 - x)^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow f_{cp} = \frac{5}{6} : \frac{1}{2} = \frac{5}{3}. ◄$$

Аудиторные задачи

I. Расставить пределы интегрирования в двойных интегралах $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ от функции $f(x,y)$, непрерывной в указанных областях *D*:

5.1.6.

5.1.7.

5.1.8.

5.1.9.

II. Изменив порядок интегрирования, записать в виде одного повторного интеграла следующие выражения:

5.1.10.

5.1.11.

5.1.12.

5.1.13.

III. Вычислить интегралы:

5.1.14.

5.1.15.

5.1.16.

5.1.17.

5.1.18.

5.1.19.

5.1.21.

5.1.22.

Задание на дом

IV. Найти среднее значение функции:

5.1.20.

5.1.23. 5.1.24.

4.1.25.

Третье и четвертое практические занятие

ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ (*ТИ*)

1. Вычисление *ТИ*

В декартовых координатах

$$\Omega: z = z_1(x,y), z = z_2(x,y)$$
$$(z_1 < z_2)\ D = \text{пр}_{XOY}\Omega$$
$$D: y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x),$$
$$(\varphi_1(x) < \varphi_2(x)), x = a, x = b$$
$$(a < b)$$

$$\iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz =$$
$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

В цилиндрических координатах

$$\underbrace{\begin{gathered} M(x,y,z) \Leftrightarrow M(r,\varphi,z) \\ x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z \end{gathered}}$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r & 0 \\ x'_\varphi & y'_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$
$$dV = |J|\,drd\varphi dz$$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dV =$$
$$= \iiint\limits_\Omega f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r dV =$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\,dr \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f^*(r,\varphi,z)dz$$
$$D: r = r_1(\varphi), r = r_2(\varphi)\ (r_1 < r_2),$$
$$\varphi = \alpha, \varphi = \beta\ (\alpha < \beta)$$

В сферических координатах

$$\underbrace{\begin{gathered} M(x,y,z) \Leftrightarrow M(r,\varphi,\theta) \\ x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, z = z\cos\theta \end{gathered}}$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & y'_r & z'_r \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \\ x'_\theta & y'_\theta & z'_\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta,$$
$$dV = |J|\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dV =$$
$$= \iiint\limits_\Omega f^*(r,\varphi,\theta) r^2 \sin\theta\, drd\varphi\, d\theta =$$
$$= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta\, d\theta \int\limits_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f^*(r,\varphi,z)dz$$

2. Приложения *ТИ*

Г е о м е т р и ч е с к и е
Объем тела V_Ω $V_\Omega = \iiint\limits_\Omega dV = \iiint\limits_\Omega dxdydz = \iiint\limits_\Omega r\,drd\varphi\,dz = \iiint\limits_\Omega r^2\sin\theta\,drd\varphi\,d\theta$

Ф и з и ч е с к и е		
Статистические моменты	*Координаты центра масс*	*Моменты инерции*

$S_{xy}=\iiint\limits_{\Omega} z\,\rho(x,y,z)dV$	$x_o=\dfrac{S_{xz}}{m}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho\, dV}{\iiint\limits_{\Omega}\rho\, dV}$	$I_x=\iiint\limits_{\Omega}\left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)dV$
$S_{yz}=\iiint\limits_{\Omega} x\,\rho(x,y,z)dV$	$y_o=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho\, dV}{\iiint\limits_{\Omega}\rho\, dV}$	$I_y=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+z^2\right)\rho\, dV$
$S_{xz}=\iiint\limits_{\Omega} y\,\rho(x,y,z)dV$	$z_o=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho\, dV}{\iiint\limits_{\Omega}\rho\, dV}$	$I_z=\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\rho\, dV$

6.1. Определение, свойства и вычисление *ТИ*

Примеры решения

6.1.1. Расставить пределы интегрирования в *ТИ* по области Ω:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dV;\ \Omega:\ z=3x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0.$$

► Область Ω снизу ограничена плоскостью $z=0$, сверху − плоскостью $z=3x+y,$ а с боков − плоскостями $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ (рис. 6.1).

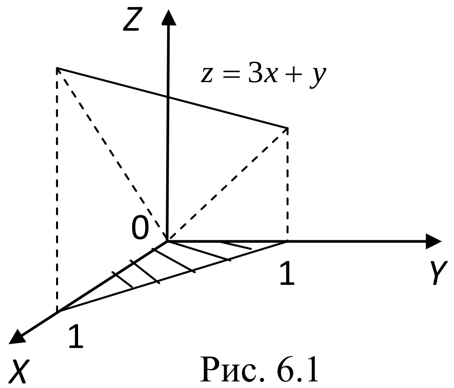


Рис. 6.1

Ортогональная проекция области на плоскости *XOY*− треугольник, ограниченный линиями $y=0$, $y=1-x$ на [0, 1].

Тогда согласно формуле (вычисление *ТИ* в декартовых координатах) получим $\iiint\limits_{\Omega} f dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{3x+y} f\,dz.$ ◄

6.1.2. Вычислить трехкратный интеграл $I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x}^{1}dy\int\limits_{0}^{2}(4+z)dz$ и построить его область интегрирования.

► Последовательно вычисляем три однократных *ОИ*, начиная с внутреннего:

$$I_1=\int\limits_{0}^{2}(4+z)dz=\left.\frac{(4+z)^2}{2}\right|_{0}^{2}=\frac{36-16}{2}=10;$$

$$I_2=\int\limits_{x}^{1}I_1dy=10\int\limits_{x}^{1}dy=10y\Big|_{x}^{1}=10\left(1-x^2\right);$$

$$I_3=I=\int\limits_{-1}^{1}I_2dx=10\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=10\left.\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1}=\frac{40}{3}.$$

Здесь, как и при вычислении двукратного интеграла, можно пользоваться более краткой записью:

$$I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x}^{1}dy\int\limits_{0}^{2}(4+z)dz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x}^{1}\left.\frac{(4+z)^2}{2}\right|_{0}^{2}dy=10\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x}^{1}dy=\int\limits_{-1}^{1}10dx\cdot y\Big|_{x}^{1}=$$

$$=10\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=10\left.\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{1}=\frac{40}{3}.$$

Для построения области интегрирования Ω данного трехкратного интеграла пишем вначале уравнение поверхностей, ограничивающих эту область. Приравнивая переменную интегрирования каждого интеграла к его пределам, получим следующие уравнения:

$$x=-1,\ x=1,\ y=x^2,\ \ y=1,\ z=0,\ z=2.$$

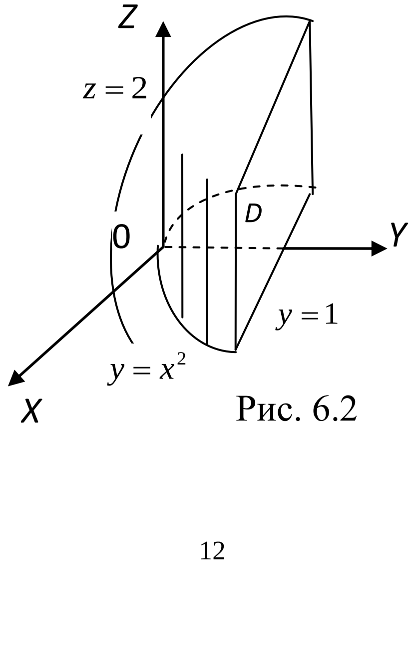


Рис. 6.2

Построив в системе координат *OXYZ* полученные плоскости и поверхность $y = x^2$ (рис. 6.2), видим, что ограниченная ими область Ω есть прямой цилиндр, образующие которого параллельны оси *OZ*. ◄

6.1.3. Вычислить $ТИ \iiint\limits_{\Omega} zdxdydz,$ где область Ω определяется неравенствами $0 \le x \le \frac{1}{2},\ x \le y \le 2x,\ 0 \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$

► По условию задачи уже имеем пределы всех трех переменных *x, y,z*. Поэтому можем сразу (без рисунков областей Ω и *D*) применить формулу (вычисление *ТИ* в декартовых координатах);

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_x^{2x} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_x^{2x} z^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_x^{2x} \left(1 - x^2 - y^2\right) dy = = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_x^{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(2x - 2x^3 - \frac{8x^3}{3} - x + x^3 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{10x^3}{3} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{5x^4}{6} \right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{16} \right) = \frac{7}{192}. \ ◄$$

6.1.4. Вычислить *ТИ*

$$I = \iiint\limits_{\Omega} xyzdxdydz,\ D:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ \ (x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0).$$

► Область Ω − часть шара, расположенная в 1 октанте (рис. 6.3). Сверху область ограничена сферической поверхностью $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, а снизу − плоскостью $z = 0$. Ортогональная проекция области Ω на плоскость *XOY* – четверть круга, ограниченного линиями $x = 0,\ y = 0,\ y = \sqrt{1 - x^2}$.

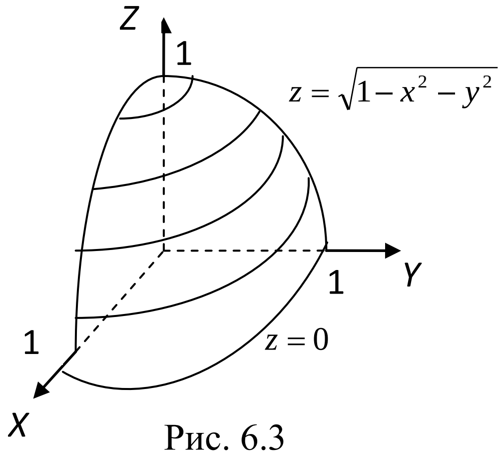


Рис. 6.3

Тогда согласно формуле (вычисление *ТИ* в декартовых координатах) получим,

$$I=\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} zdz=\int_0^1 xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{2}\left(1-x^2-y^2\right)ydy=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\left(y^2\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(1-x^2\right)^2 d\left(1-x^2\right)=\frac{1}{48}.◄$$

6.1.5. Вычислить *ТИ* $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dV,\ \Omega:\ z=2,\ 2z=x^2+y^2$ с помощью перехода к цилиндрическим координатам.

► Область Ω (рис. 6.4) ограничена снизу параболоидом $2z=x^2+y^2$, а сверху плоскостью $z=2$.

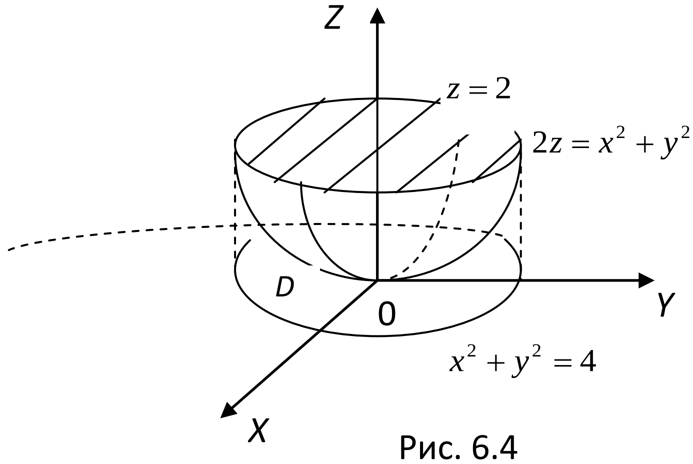


Рис. 6.4

Эта область проектируется в область *D* плоскости *XOY*, ограниченную окружностью $x^2+y^2=4$, которая получена от пересечения параболоида $x^2+y^2=2z$ с плоскостью $z=2$, т.е. от совместного решения двух уравнений

$$\begin{cases} z = 2, \\ 2z = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Введем цилиндрические координаты, используя формулы перехода (вычисление *ТИ* в цилиндрических координатах). Так как $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$ и переменные φ, r, z имеют следующие пределы: $0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le 2,\ \dfrac{r^2}{2} \le z \le 2$ (нижняя граница области Ω − параболоид $z = \dfrac{x^2+y^2}{2} = \dfrac{r^2}{2}$, то данный интеграл по формуле примет вид

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3 dr \int\limits_{\frac{r}{2}}^{2} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3 dr\, z\Big|_{\frac{r}{2}}^{2} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 r^3\left(2 - \frac{r^2}{2}\right)dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(2r^3 - \frac{r^5}{2}\right)dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^6}{12}\right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \frac{8}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{8\varphi}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3}. \ ◄$$

6.1.6. Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz,\ \Omega:\ x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz,\ \ x^2 + y^2 = z^2,$ с помощью перехода к цилиндрическим или сферическим координатам.

► 1. Перейдем к цилиндрическим координатам, тогда уравнения поверхностей, ограничивающих область Ω, запишутся в виде $r^2 + z^2 = 2Rz,\ r^2 = z^2$. Переменная φ не входит в уравнения, следовательно, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Для того чтобы расставить пределы интегрирования по r и z, достаточно нарисовать область интегрирования в переменных r, z (рис. 6.5).

Таким образом, все сводится к расстановке пределов в *ДИ* по области D:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \iint\limits_D r dr dz = 2\pi\left(\int\limits_0^R dz \int\limits_0^z r dr + \int\limits_R^{2R} dz \int\limits_0^{\sqrt{2Rz - z^2}} r dr\right) =$$

$$= \pi\left(\int\limits_0^R z^2 dz + \int\limits_R^{2R}\left(2Rz - z^2\right)dz\right)dz = \pi R^3.$$

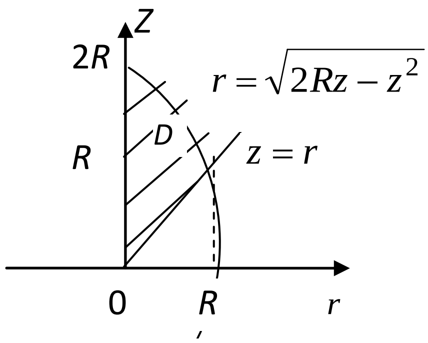


Рис. 6.5

2. Перейдём к сферическим координатам. Тогда уравнения поверхностей, ограничивающих область интегрирования, запишутся $r = 2r\cos\theta,\ \sin^2\theta = \cos^2\theta.$ Сделаем чертёж в переменных $r,\ \theta$ (рис. 6.6).

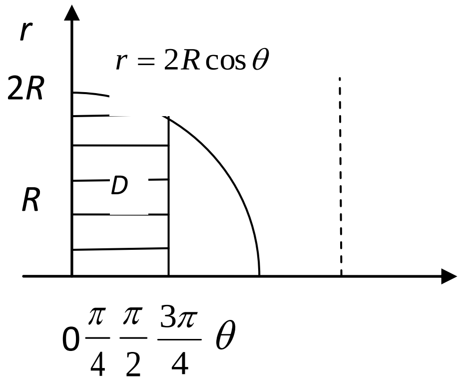


Рис. 6.6

Здесь $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ и $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ - решения уравнения $\sin^2\theta = \cos^2\theta$ из промежутка $[0, \pi]$. Тогда можно записать

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \iint_D \sin\theta drd\theta = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} r^2 \sin\theta dr = \frac{16}{3}\pi R^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \cos^2\theta d(\cos\theta) = \pi R^3. \blacktriangleleft$$

6.1.7. Вычислить $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, dxdydz,$ где Ω − половина шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2,\ y \ge 0.$

► В сферической системе координат уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ записывается в виде $r^2 = R^2$, т.е. $0 \le r \le R$, а условие $y \ge 0$ − в виде $r\sin\varphi\sin\theta \ge 0,$ так как $\sin\theta \ge 0\ (0 \le \theta \le \pi),$ то $\sin\varphi \ge 0$ и $\varphi \in [0, \pi].$

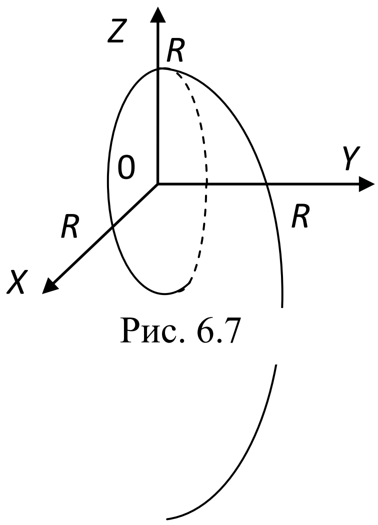


Рис. 6.7

Таким образом, в сферических координатах данная область задаётся следующим образом:

$$\Omega' = \left\{ (r, \varphi, \theta) \middle| 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \theta \le \pi \right\}$$

(что видно и из рисунка 6.7), а подынтегральная функция равна $\sqrt{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{1+r^3}$.

По формуле (вычисление *ТИ* в сферических координатах) получаем:

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \sqrt{1+\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} \sqrt{1+r^3}\, r^2 \sin\theta\, drd\varphi\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{R} \sqrt{1+r^3}\, r^2 dr = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{R} \left(1+r^3\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+r^3\right) =$$

$$= \frac{2}{9}\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \left(1+r^3\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^R = \frac{2}{9}\left(\left(1+R^3\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right)\varphi\Bigg|_0^{\pi} \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4\pi}{9}\left(\left(1+R^3\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right). \blacktriangleleft$$

Аудиторные задачи

I. Расставить пределы интегрирования в *ТИ* $\iiint\limits_{\Omega} f\, dxdydz$ для указанных областей Ω:

6.1.8.

6.1.9.

II. Вычислить трехкратные интегралы и построить их области интегрирования:

6.1.10. 6.1.11.

III. Вычислить *ТИ*:

6.1.12. 6.1.13. 6.1.14

IV. Вычислить интегралы, переходя к цилиндрическим или сферическим координатам:

6.1.15. 6.1.17. 6.1.19. .

6.1.16. 6.1.18. 6.1.20.

Задание на дом

Вычислить *ТИ*:

6.1.21. 6.1.22. 6.1.23.

Пятое и шестое практические занятие

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ (ЧР)

ЧР: $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$

1.Знакоположительные ЧР

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n,\ U_n > 0\ \forall n \in N$

2. Знакочередующиеся ЧР

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n,\ U_n > 0\ \forall n \in N$

3. Знакопеременные ЧР

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n,\ U_n > 0\ \forall n \in N$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k, \quad S = \lim_{n \to \infty} S_n = A \neq \infty \quad \vee \ \nexists \quad \to$ ЧР сходится

$S -$ сумма ряда; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} -$ сход. при $|q| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} -$ сход. при $p > 1$

Свойства ЧР: $1^\circ.\quad \lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_{n-k} = S - S_k, \quad S_k = \sum_{i=1}^{k} U_i.$

$2^\circ.\ S = \sum_{n=1}^{\infty} U_n, \quad \delta = \sum_{n=1}^{\infty} V_n, \quad W_n = aU_n + bV_n \quad \to \quad \exists \sum_{n=1}^{\infty} W_n = aS + b\delta.$

Необходимый признак сходимости: $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$

1. Достаточные признаки сходимости

Признаки сравнения

- Сравнения: $\exists N: 0 \le U_n \le V_n$ $\forall n \quad N$; $\sum V_n$ – сх. ⇒ $\sum U_n$ – сх.; $\sum U_n$ – расх. ⇒ $\sum V_n$ – расх.
- Предельный: $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = A \ne 0\ (\infty)$ ⇒ $\sum U_n, \sum V_n$ – сход. (расх.) одновременно

Признак Д' Аламбера: $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$ ⇒ $l<1$ – сх.; $l>1$ – расх.; $l=1$ – доп.

Признаки Коши

- Радикальный: $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = l$ ⇒ $l<1$ – сх.; $l>1$ – расх.
- Интегральный: $I = \int_1^{\infty} f(x)dx,\ U_n = f(n)$ ⇒ I – сх. ⇒ $\sum U_n$ – сх.; I – расх. ⇒ $\sum U_n$ – расх.

2. Признак Лейбница

3. Сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} U_n, \quad U_n \gtrless 0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n$ – сх., $0 < S \le U_1$

$\Updownarrow$

1. $U_1 > U_2 > \ldots > U_n > \ldots$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$

$\boxed{\text{абсолютная}}$ $\boxed{\text{условная}}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|U_n|$ – сход.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|U_n|$ – расх. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ – сх.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n,\; U_n \gtreqless 0$ – сх. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n,\; U_n \gtreqless 0$ – сх.

абсолютно (+ +)   условно (+ −)

3.1. Знакоположительные ЧР. Признаки сходимости

<u>Примеры решений</u>

3.1.1. Показать, что ЧР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ сходится, и найти его сумму.

► Так как дробь $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ можно представить в виде разности $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$, то $n-$ю частичную сумму ряда можно записать как

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$=0{,}5\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)==0{,}5\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 0{,}5\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=0{,}5,$$

т. е. заданный ряд сходится и его сумма равна 0,5.◄

3.1.2. Зная, что ЧР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ сходится, установить сходимость ЧР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

► Так как $\forall n \in N \quad \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, то по признаку сравнения (см. таблицу) будет сходиться и исследуемый ЧР. ◄

3.1.3. Исследовать сходимость ЧР, для которого $U_n = \frac{1}{n!}$.

► Члены данного ряда меньше соответствующих членов заведомо сходящегося ряда (геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{2}$) или равны им: $V_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Это следует из того, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \geq 2^{n-1}$, т. е. $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ Значит исследуемый ЧР сходится по признаку сравнения. ◄

3.1.4. Исследовать сходимость ряда с $U_n = \frac{2n-1}{n^2+n-1}$.

► Используем для исследования предельный признак сравнения. В качестве известного ряда возьмём гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который сходится. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{U_n}{V_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2-n+1} : \frac{1}{n} = 2 \neq 0 \quad (\infty)$, т. е. ЧР $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ расходится. ◄

3.1.5. Исследовать сходимость ЧР с $U_n = \frac{n^5}{3^n}$.

► Если выражение для U_n содержит показательную функцию (в нашем случае 3^n), удобно для исследования использовать признак Д' Аламбера (см. таблицу). Для U_{n+1} имеем: $U_{n+1} = \frac{(n+1)^5}{3^{n+1}}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^5}{3^{n+1}} : \frac{n^5}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{(3n)^5} = \frac{1}{3} < 1.$$

Значит данный ряд сходится. ◄

3.1.6. Исследовать сходимость ЧР с $U_n = \frac{4^n n!}{n^n}$.

► По признаку Д' Аламбера имеем $U_{n+1} = \frac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{4}{e}>1,$$

т. е. исследуемый ряд расходится. ◄

3.1.7. Исследовать сходимость ЧР с $U_n=\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

► Если выражение для U_n позволяет извлечь корень $n-$ой степени,то обычно применяют радикальный признак Коши (см. таблицу). Имеем

$$\sqrt[n]{U_n}=\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \text{ и } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1.$$

Можно говорить о том, что данный ряд сходится. ◄

3.1.8. Исследовать сходимость ЧР $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$, если $U_n=\frac{2n}{n^2+1}$.

► Если выражение для $U_n=f(n)$ позволяет достаточно легко ответить на вопрос о сходимости Н$^{\text{с}}$И $\int_1^{\infty}f(x)dx$, то применяют интегральный признак Коши (см. таблицу). В данном случае:

$$I=\int_1^{\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{2xdx}{x^2+1}==\lim_{b\to\infty}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_1^b=\infty,$$

т. е. Н$^{\text{с}}$И расходится, а значит расходится и исследуемый ЧР.◄

3.1.9. Исследовать сходимость ЧР с $U_n=\frac{1}{n\ln^3 n}$, $n\geq 2$.

► Имеем:

$$f(x)=\frac{1}{x\ln^3 x} \quad \text{и}$$

$$I=\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{dx}{x\ln^3 x}==\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_2^b=\frac{1}{2\ln^2 2}\text{ -}$$

сходится.

Согласно интегральному признаку будет сходиться и заданный ЧР. ◄

Аудиторные задачи

I. Доказать сходимость и найти сумму для ЧР:

3.1.10. 3.1.11.

3.1.12.

II. Используя признаки сравнения, исследовать на сходимость ЧР:

3.1.13. 3.1.14. 3.1.15.

III. Исследовать на сходимость при помощи признака Д' Аламбера ЧР:

3.1.16.

3.1.17.

3.1.18.

IV. Пользуясь радикальным признаком, исследовать на сходимость ЧР:

3.1.19.

3.1.20.

3.1.21.

V. При помощи интегрального признака исследовать сходимость ЧР:

3.1.22.

3.1.23.

3.1.24.

Задание на дом

3.1.25. Найти S_n и $S,$ доказав сходимость ЧР

Исследовать на сходимость ЧР:

3.1.26. 3.1.29. 3.1.32.

3.1.27. 3.1.30. 3.1.33

3.1.28. 3.1.31.

Знакочередующиеся ЧР. Признак Лейбница

Примеры решений

3.2.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

► Так как $U_n=\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n+1}=U_{n+1}$ $\forall\, n\in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0,$ то выполнены условия 1 и 2 признака Лейбница (см. таблицу), и данный ряд сходится. ◄

3.2.2. Исследовать на сходимость ряд $\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4}+\ldots$.

► В признаке Лейбница существенным требованием является монотонное убывание (условие 1). Если оно не выполнено, то знакочередующийся ЧР может оказаться расходящимся. В данном примере $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=0,$ но ЧР расходится, так как его частичная сумма с номером $2n$ $S_{2n}=\frac{2}{1}-\frac{1}{1}+\frac{2}{1}-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{2}{n}-\frac{1}{n}$ является $n-$й частичной суммой гармони-

ческого ряда и, следовательно, неограниченно возрастает при $n\to\infty.$ ◄

<u>Аудиторные задачи</u>

Исследовать на сходимость следующие знакочередующиеся ЧР:

3.2.3. 3.2.5.

3.2.4. 3.2.6.

3.2.7. 3.2.8.

<u>Задание на дом</u>

Вычислить, какие из данных рядов сходятся и какие расходятся:

3.2.9.

3.2.10.

3.2.11.

Седьмое практическое занятие

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ (СР)

Функциональные ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$

Степенные ряды $U_n(x) = a_n (x - x_0)^n$

Тригонометрические ряды $U_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ (1), $x_0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \in R -$ СР

<u>Т</u> (Абеля): (1) сход. в $x_1 \neq x_0 \Rightarrow (1)$ сход. абсолютно $\forall x : |x - x_0| < |x_1 - x_0|$

(1) расх. в $x_1 \neq x_0 \Rightarrow (1)$ расх. $\forall x : |x - x_0| > |x_1 - x_0|$

<u>Радиус сходимости</u> $R = \begin{cases} 0 \Rightarrow x = x_0 - \text{т.сходимости} \\ \infty \Rightarrow x \in R \quad \underline{\text{Интервал сходимости}} : x \in (x_0 - R, x_0 + R) \\ A \Rightarrow x \in (x_0 - A, x_0 + A) \end{cases}$

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}}.$$

Свойства СР: 1°. $S = S(x)$ – сумма СР, непр. $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

2°. $S(x)$ – сумма (1) $\Rightarrow \exists\, S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$.

3°. $S(x)$ – сумма (1) $\Rightarrow \exists \int\limits_a^b S(x)dx \ \forall [a,b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$.

4°. $S(x)$, $\int\limits_a^b S(x)dx$ – сход. $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

2. Ряды Тейлора и Макларена

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!} \quad (2)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} \quad (3)$$

Т: $f(x) = S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) \leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} \qquad R_n(x) = f(x) - S_n(x)$$

$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$,

$\xi \in (x_0, x)$ – остаток в форме Лагранжа

Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена:

1. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$. 2. $\exists R: \forall x \in (-R, R)$ (3) – сход. 3. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in R$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-1}, \quad x \in R$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

$$x \in (-1, 1), \quad m \in R$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},$$
$$x \in (-1, 1)$$

$$\arcsin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)x^{2n-1}}{2^{n-1}(n-1)!(2n-1)}, \qquad x \in (-1, 1)$$

3. Применение СР к приближенным вычислениям

Вычисление значений функций

Вычисление корней

Вычисление логарифмов

Вычисление пределов

Вычисление определенных интегралов

$x_1 \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$,
$f(x_1) \approx S_n(x_1)$,
$\Delta = |f(x_1) - S_n(x_1)| = R_n(x_1)$

$$\ln(N+1) = \ln N + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2N+1)^{2n-1}}$$

$x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left\{\frac{0}{0}\right\}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x - x_0)^n dx$$

4.1. Функциональный и степенной ряд. Радиус и интервал сходимости СР

4.1.1. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(x+2)^n}$.

► Для определения области сходимости функциональных рядов обычно используется признак Д’ Аламбера. Затем те значения x, для которых этот признак не решает вопроса о сходимости ряда $(l = 1)$, исследуются особо, исходя из других признаков сходимости рядов. В данном примере $U_n(x) = \dfrac{1}{n(x+2)^n}$, $l = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \dfrac{1}{|x+2|}$.

Ряд сходится при $\dfrac{1}{|x+2|} < 1,$ тогда $|x+2| > 1$ или $-1 > x+2 > 1,$ отсюда $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty).$ При $x = -3$ получим знакочередующийся ряд с $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, который сходится по признаку Лейбница. При $x = -1$ получим гармонический расходящийся ряд. Область сходимости данного ряда состоит из двух интервалов

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty). \ ◄$$

4.1.2. Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

► Данный ряд сходится (как ряд Дирихле) для значений $x > 1$ и расходится для значений $x \le 1.$ Следовательно, область сходимости есть интервал $(1, +\infty).$ ◄

4.1.3. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sqrt[3]{\sin x}.$

► Воспользуемся радикальным признаком Коши $l = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n(x)} = \sqrt[3]{\sin x} < 1$ что выполняется $\forall x \ne x_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$ При $x = x_k$ $\sin x = \pm 1$ и исследуемый ряд расходится. ◄

4.1.4. Найти радиус и интервал сходимости СР с $U_n = \dfrac{x^n}{(n+1)\,5^n}$.

► Определить радиус сходимости СР $R,$ используя формулу (см. таблицу) $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, полученную из признака Д' Аламбера. Имеем:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)\,5^n},\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)5^{n+1}},\ R = \lim_{n\to\infty} 5^{n+1}\frac{n+2}{(n+1)\ 5^n} = 5.$$

Следовательно, СР сходится $\forall x \in (-5, 5)$ – интервалу сходимости. ◄

4.1.5. Найти интервал сходимости и сумму СР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$, используя его свойства.

► Воспользуемся свойством 2 СР (см. таблицу), по которому СР можно почленно дифференцировать внутри интервала его сходимости. Найдём $S'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1\cdot\left(-x^2\right)^{n-1}$ – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с $b=1,\ q=-x^2<1,$ для которой $S=\dfrac{b}{1-q}=\dfrac{1}{1+x^2}=S'(x).$ Интегрируя, имеем $S(x)=\int\limits_0^x S'(x)dx=\operatorname{arctg}x.$ СР сходится при $|x|<1.$ ◄

<u>Аудиторные задачи</u>

I. Определить область сходимости функциональных рядов:

4.1.6. 4.1.7. 4.1.8.

II. Определить радиус и интервал сходимости СР:

4.1.9. 4.1.12.

4.1.10. 4.1.13.

4.1.11. 4.1.14.

III. Используя свойства СР, найти интервал сходимости и сумму $S(x)$:

4.1.15. 4.1.16. 4.1.17.

<u>Задание на дом</u>

4.1.18. 4.1.19. 4.1.20.

Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена

4.2.1. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=e^x\sin x.$

► Находим производные функции $f(x)$ и их значения в т. $x=0$: $f(0)=0;\ f'(x)=e^x(\cos x+\sin x)=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right);\ f'(0)=\sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{4};$

$$f''(x)=\left(\sqrt{2}\right)^2 e^x \sin\left(x+\frac{2\pi}{4}\right);\ f''(0)=\left(\sqrt{2}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{4};$$

$$f^{(n)}(x)=\left(\sqrt{2}\right)^n e^x\cdot\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)\ f^{(n)}(0)=\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}.$$

Оценим абсолютную величину остаточного члена $R_n(x)$ при $n\to\infty$:

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\left|\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}e^{\xi}\frac{\sin\left(\xi+(n+1)\pi/4\right)x^{n+1}}{(n+1)!}\right|<U_n=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}e^x\,|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ имеем:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+2}e^x|x|^{n+2}}{(n+2)!}:\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1}e^x\,|x|^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{\sqrt{2}\,|x|}{n+2}\to 0,\ R<1\quad\forall x.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ сходится (по признаку Д' Аламбера), а его общий член $U_n\to 0$ при $n\to\infty$ (в силу необходимого признака сходимости), поэтому и остаточный член $R_n(x)$, по модулю меньший U_n, тем более стремится к нулю при $n\to\infty$. Поэтому имеем:

$$e^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!},\ x\in R.\ ◄$$

4.2.2. Написать ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ функции $f(x)=\ln(x+2)$.

► Находим производные функции $f(x)$ и их значение в точке $x=1$: $f(x)=\ln(x+2)$; $f(1)=\ln 3$; $f'(x)=\dfrac{1}{x+2}$; $f'(1)=\dfrac{1}{3}$; ... ;

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(x+2)^{-n};\quad f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{3^n}.$$

Следовательно, ряд Тейлора для $f(x)=\ln(x+2)$ имеет вид

$$\ln 3+\frac{x-1}{3}-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 3^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}+\ldots\ .\ ◄$$

4.2.3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=x\ln\left(1+x^2\right)$.

► Заметим, что

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots \qquad (x\in(-1,1]).$$

Заменяя в последнем равенстве x на x^2, будем иметь $(x\in[-1,1])$:

$$\ln\left(1+x^2\right)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}+\ldots,$$

а поэтому

$$x\ln\left(1+x^2\right)=x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{x^7}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{n}+\ldots \qquad (x\in[-1,1]).\ ◄$$

4.2.4. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ по степеням $(x-1)$.

► Преобразуем эту функцию так, чтобы можно было использовать разложение функции $\dfrac{1}{1-x}$. Полагая $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{a}{1+b(x-1)}$, из тождества $1+b(x-1)=a(x+2)$ найдём $a=\dfrac{1}{3}, b=\dfrac{1}{3}$. Следовательно, $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{3\left(1+\dfrac{x-1}{3}\right)}$. Заменив в разложении функции $\dfrac{1}{1+x}$ величину x на $\dfrac{x-1}{3}$, получим:

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{x-1}{3}+\frac{(x-1)^2}{3^3}-\ldots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^n}+\ldots.\right).$$

Это разложение справедливо, когда $\left|\dfrac{x-1}{3}\right|<1$ или $x\in(-2,\ 4)$. ◄

4.2.5. Разложить функцию $f(x)=\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+2x}{1-x}}$ в ряд Маклорена.

► Известно, что $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n},\ x\in(-1,\ 1)$. Поэтому

$$\ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n},\ x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right);\ \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,\ 1).$$

Отсюда $\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}} = \frac{1}{3}\left(\ln(1+2x) - \ln(1-x)\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^{n+1}2^n + 1\right)x^n}{n} =$

$$= \frac{1}{3}\left(3x - \frac{3x^2}{2} + \frac{9x^3}{3} - \frac{15x^4}{4} + \ldots\right) = x - \frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{5x^4}{4} + \ldots,\ x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \blacktriangleleft$$

Аудиторные задачи

I. Разложить данные функции в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$:

4.2.6. 4.2.7.

4.2.8.

II. Разложить функции в ряд Маклорена:

4.2.9.

4.2.10.

4.2.11.

Задание на дом

4.2.12. 4.2.14. 4.2.16.

4.2.13. 4.2.15. 4.2.17

Шестое и седьмое практические занятия

Ряды Фурье

Тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,\ a_0, a_n, b_n \in R\ \ \forall n \in N$ (1)

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ - сход. равномерно $\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): n > N \Rightarrow |R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$
$\forall x \in X$ $\forall x \in X$

Свойства (1): $1^\circ.$ $S(x)$ - непр. и период. с $T = 2\pi$.

$2^\circ.$ $\forall \varphi(x) \in \{1, \cos kx, \sin kx\}_{k=1}^{n} \Rightarrow \left|\varphi(x) \sum_{n=N+1}^{\infty} U_n(x)\right| < |R_n(x)| < \varepsilon.$

$3^\circ.$ $\exists \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (x) dx.$

Признак равномерной сходимости (Вейерштрасса): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сход. $a_n > 0,$

$\exists N: \forall n \geq N\ \forall x \in X: |U_n(x)| \leq a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ - сх. равномерно

Ряд Фурье для $f(x)$

(1) с $a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx,\qquad a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right)dx,$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)dx,\ T - \text{период}. \qquad (2)$$

ряд Фурье сходится :

Т (Дирихле) : $f(x) = f(x \pm T)\ \forall x \in [a, a \pm T]$:

1. $f(x) \in C_{[a,a\pm T]} \vee \exists (x_1,..., x_k) -$ т.р. I р.

2. $\exists\ f(x)\ \forall x \in [a, a \pm T],\ a = x_0, x_1,...x_k\ = a + T$:

$f(x) -$ мнотонна и огрничена $\forall (x_{i+1}, x_i)$

$i = \overline{1,k}$

$$\Rightarrow S(x) = \begin{cases} f(x), & x - \text{т. непр.} \\ \frac{1}{2}\left(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right) \end{cases}$$

$x_0 -$ т.р. I р

$f(x) = f(x \pm T),\ T = 2\pi$

$f(x) = f(x \pm T),\ T = 2l$

$f(x) \neq f(x \pm T)$

$f(x) = f(-x)$

$f(x) = -f(-x)$ → 1

$f(-x) = f(x)$ → 2

$f(-x) = -f(x)$

$x \in [0, l] \Rightarrow$
$\forall x \in [-l, 0]$:

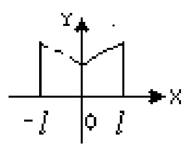
$$\left.\begin{aligned} &\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \\ &a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \\ &a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \end{aligned}\right\}(3)$$

1

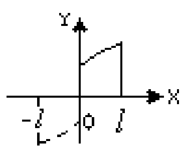
$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \\ &b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cdot \\ &\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx \end{aligned}\right\}(6)$$

2

$f(x) = f(-x) \quad \vee \quad f(x) = -f(-x)$



(5)



(6)

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \\ &b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \end{aligned}\right\}(4)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \\ &a_0 = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)dx, \\ &a_n = \frac{2}{1}\int_0^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx \end{aligned}\right\}(5)$$

5.1. Коэффициенты Фурье. Ряд функций с периодом 2π

5.1.1. Разложить периодическую с $T = 2\pi$ функцию $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,\ \pi),\\ 0, & x\in(-\pi,\ 0)\end{cases}$ в ряд Фурье, построить графики его первых частичных сумм $S_0(x), S_1(x), S_2(x)$ и $S_3(x)$ и найти значение $S(x_0)$ суммы полученного ряда в заданной точке $x_0 = \pi$.

► График заданной функции имеет вид, изображённый на рис. 5.1 (сплошная линия), т.е. $f(x)$- произвольного вида и ряд Фурье имеет вид (1) с коэффициентом (2). Имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1dx = \frac{x}{\pi}\Big|_0^{\pi} = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nxdx =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nxdx =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right).$$ Тогда

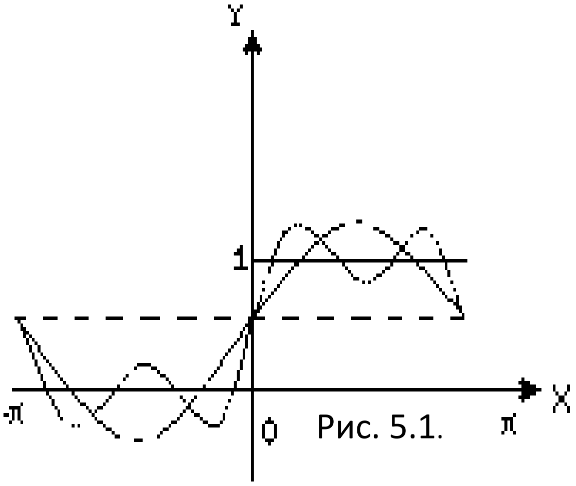


Рис. 5.1.

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)\sin nx}{n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right).$$

Для первых частичных сумм получим:

$$S_0(x) = \frac{1}{2},\ S_1(x) = \frac{1}{2} + 2\sin\frac{x}{\pi},\ S_2(x) = S_1(x),\ S_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{2\sin nx}{\pi} + \frac{2\sin 3x}{3\pi}.$$

Построим графики этих сумм, обозначая $S_0(x) = ——$,

$S_1(x) = S_2(x) - \cdot -$ и $S_3(x) - \cdot\cdot -$ (рис.5.1). В т. $x_0 = \pi$ $\sin(2n-1) = 0$ и $S_1(x_0) = \dfrac{1}{2}$. ◄

<u>Аудиторные задачи</u>

5.1.2.

5.1.3.

5.1.4.

<u>Задание на дом</u>

5.1.5.

5.1.6.

Ряд Фурье для чётных и нечётных функций

5.2.1. Разложить в ряд Фурье 2π - периодическую функцию $f(x)$, заданную на отрезке $x \in [-\pi, \pi]$ следующим образом: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,\ \pi), \\ -1, & x \in (-\pi,\ 0). \end{cases}$

► Эта функция кусочно монотонна и ограничена на отрезке $x \in [-\pi, \pi]$ и по теореме разложения может быть представлена радом Фурье. Вычислим коэффициенты ряда Фурье. Поскольку функция $f(x)$ нечётная, воспользуемся формулой (4). Получаем:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right) = \frac{4}{(2n-1)\pi},\ n \in N.$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

С помощью рядов Фурье можно находить суммы многих интересных ЧР. Например подставляя в полученный ряд $x = \frac{\pi}{2}$, обнаружим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$ ◄

5.2.2. Разложить в ряд Фурье 2π - периодическую функцию $f(x) = x^2$, заданную на отрезке $x \in [-\pi, \pi]$.

► Эта функция кусочно монотонна, ограниченна на отрезке $x \in [-\pi, \pi]$ и по теореме разложения может быть представлена рядом Фурье. Поскольку эта функция чётная, воспользуемся формулой (3). Получаем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2x^3}{3\pi}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \begin{vmatrix} u = x^2,\ dv = \cos nx dx \\ du = 2x dx,\ v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2 \sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\frac{x \sin nx dx}{n}\right) = \begin{vmatrix} u = x,\ dv = \sin x dx \\ du = dx,\ v = -\dfrac{\cos nx}{n} \end{vmatrix} =$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx dx}{n}\right)=\frac{4x\cos nx}{\pi n^2}\bigg|_0^{\pi}=\frac{4\cos n\pi}{n^2}=\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Таким образом, ряд Фурье для данной функции имеет вид:

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}.$$

Этот ряд сходится во всех точках и его сумма равна $f(x)$. ◄

Аудиторные задачи

Указанные функции разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$. Определить сумму ряда в точках разрыва и на концах интервала $(-\pi,\pi)$, построить график функции и суммы соответствующего ряда (также и вне интервала $(-\pi,\pi)$):

5.2.4.

5.2.3. 5.2.5.

5.2.6.

Задание на дом

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом $T=2\pi$, если:

5.2.7. 5.2.8.

Ряд Фурье для функций с периодом $2l$.

Разложение в ряд Фурье непериодических функций

5.3.1. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную несколькими формулами

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-1,\ -1+\alpha),\\ 0, & x\in(-1+\alpha,\ 0),\\ 1, & x\in(0,\ \alpha),\\ 0, & x\in(\alpha,\ 1),\end{cases}$$

где α – некоторое число, $\alpha\in(0,\ 1)$.

► Разложим заданную функцию в ряд

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{l}\left(\int_{-l}^{l+\alpha}dx+\int_{-l+\alpha}^{0}0\,dx+\int_0^{\alpha}dx+\int_{\alpha}^{1}0\,dx\right)=\frac{2\alpha}{l}.$$

Легко видеть, что

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{n\pi}\left((-1)^n + 1\right)\sin\frac{n\pi\alpha}{l},$$

$$b_n = \frac{1}{l}\left(\int_{-l}^{-l+\alpha}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx + \int_{0}^{\alpha}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right) = \frac{1}{n\pi}\left((-1)^n + 1\right)\left(1 - \cos\frac{n\pi\alpha}{l}\right),$$

таким образом, при $n = 2k+1$ (нечётном) все $a_{2k+1} = b_{2k+1} = 0$, тогда как $a_{2k} = \frac{1}{k\pi}\sin\frac{2k\pi\alpha}{l}$, $b_{2k} = \frac{1}{k\pi}\left(1 - \cos\frac{2k\pi\alpha}{l}\right)$, $k \in N$. Особенно простой результат получается, если $\alpha = \frac{l}{2}$. Тогда

$$a_{2k} = \frac{1}{k\pi}\sin k\pi = 0,\ b_{2k} = \frac{1}{k\pi}\left(1 - \cos k\pi\right) = \frac{1 - (-1)^k}{k\pi},$$

и ряд принимает вид:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{6\pi x}{l} + \ldots\right). \blacktriangleleft$$

5.3.2. Разложить функцию $f(x) = x(\pi - x)$ в ряд синусов в интервале $(0,\ \pi)$. Использовать полученный результат для нахождения суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

► Так как по условию задачи заданная непериодическая функция $f(x)$ доопределяется на интервале $(-\pi, 0)$ нечётным образом, воспользуемся формулой (6):

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx\,dx = \left|\begin{array}{l} u = \pi x - x^2,\ dv = \sin nx dx \\ du = (\pi - 2x)dx,\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\left.\frac{x(\pi - x)\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\right)\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos nx dx = \left|\begin{array}{l} u = \pi - 2x,\ dv = \cos nx dx \\ du = -2dx,\ v = \frac{\sin nx}{n} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left(\left.(\pi - 2x)\sin nx\right|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\sin nx dx\right) = -\frac{4}{\pi n^3}\left.\cos nx\right|_0^{\pi} = 4\frac{1 - (-1)^n}{\pi n^3}$$

и ряд принимает вид:

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

При $x=\dfrac{\pi}{2}$ получим

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{\pi^2}{4}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Тогда сумма заданного ЧР $S=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\dfrac{\pi^3}{32}$. ◄

<u>Аудиторные задачи</u>

I. Разложить в ряд Фурье функции $f(x)$ с периодом $T=2l$:

55.3.4.

5.3.3.

5.3.5.

II. Доопределяя заданную на $(0,\ l)$ функцию $f(x)$, получить для неё ряд Фурье:

5.3.6.

по косинусам.

5.3.7.

по синусам.

5.3.8.

<u>Задание на дом</u>

5.3.9.

5.3.10.

Восьмое практическое занятие

Дифференциальные уравнения первого порядка

Диф. уравнения с разделяющимися переменными

Пример 1. Решить уравнение $y' = x\left(y^2 + 1\right)$.

Решение: $\dfrac{d\,y}{y^2 + 1} = x\,dx \quad \Rightarrow \operatorname{arg\,tg} y = \dfrac{x^2}{2} + C$.

Пример 2. Решить уравнение $y' - xy^2 = 2xy$.

Решение:

$$y' = xy(2 + y)$$

$$\frac{dy}{dx} = xy(2 + y)$$

$$\frac{dy}{y(2 + y)} = xdx$$

$$\int \frac{dy}{y(2 + y)} = \int xdx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y + 2} = \frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|2 + y| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{2 + y}\right|$$

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{2 + y}\right| = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $y - y' = y^2 + xy'$

2. $x\dfrac{dx}{dt} + t = 1$

Пример 3. Решить уравнение $xydx + (x+1)dy = 0$.

Решение:

$$\frac{x\,dx}{x+1} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$\int \frac{x\,dx}{x+1} + \int \frac{dy}{y} = \ln C$$

$$\int dx - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dy}{y} = \ln C \qquad .$$

$$x - \ln|x+1| + \ln|y| = \ln C$$

$$\ln|y| = \ln|x+1| - \ln e^{x} + \ln C$$

$$y = C(x+1)e^{-x}$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$
2. $\left(xy - xy^3\right)dx + dy = 0$

Пример 4. Решить уравнение $y' = \cos(y-x)$.

Решение:

$$z = y - x \quad \Rightarrow z' = y' - 1 \quad \Rightarrow y' = z' + 1$$

$$z' + 1 = \cos z$$

$$\frac{dz}{dx} = \cos z - 1$$

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = \int dx + C$$

$$\int \frac{dz}{\cos z - 1} = -\int \frac{dz}{2\sin^2 \frac{z}{2}} = -\int \frac{d\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^2 \frac{z}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{z}{2}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{z}{2} = x + C \qquad .$$

$$z = y - x \Rightarrow \operatorname{ctg}\frac{y-x}{2} = x + C$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $(x+y)^2 + y' = 1$

Пример 5. При начальных условиях $y(0)=1$решить задач Коши для дифференциального уравнения $(x^2-1)y'+2xy^2=0$.

Решение:

$$(x^2-1)\frac{dy}{dx}+2xy^2=0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=\frac{2xdx}{1-x^2} \Rightarrow$$

$$\int\frac{dy}{y^2}=\int\frac{2xdx}{1-x^2} \Rightarrow -\frac{1}{y}=-\ln\left|1-x^2\right|-\ln C \quad .$$

$$1=y\ln\left|C(1-x^2)\right|$$

Подставляя в общее решение $x_0=0$ $y_0=1$

$$1=y\ln\left|C(1-0^2)\right| \Rightarrow 1=\ln C$$

$$C=e$$

$$1=y\ln\left|e(1-x^2)\right|$$

$$y=1+\ln\left|1-x^2\right|$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $y'\mathrm{ctg}x+y=2; \quad y(0)=-1$

2. $y'x+y=y^2; \quad y(1)=0{,}5$

Девятое практическое занятие

Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

Пример 1. Проверить, что функция $f(x,y)=\dfrac{x^4\ln\frac{x}{y}}{x+y\,\mathrm{argtg}\,\frac{y}{x}}$ является однородной функцией и определить ее измерение.

Решение:

$$f(xt,yt)=\frac{(xt)^4\ln\frac{xt}{yt}}{xt+yt\,\mathrm{argtg}\,\frac{yt}{xt}}=\frac{t^4x^4\ln\frac{x}{y}}{t\left(x+y\,\mathrm{argtg}\,\frac{y}{x}\right)}=t^3\frac{x^4\ln\frac{x}{y}}{x+y\,\mathrm{argtg}\,\frac{y}{x}}=t^3f(x,y)$$

Пример 2. Найти решение уравнение $y^2+x^2y'=xyy'$.

Решение: Решением это уравнение, относительно y'

$$y' = \frac{y^2}{x(y-x)}.$$

Т.к. $f(x,y) = \frac{y^2}{x(y-x)}$, стоящая в правой части этого уравнения, является однородной функцией нулевого измерения, поскольку $f(xt, yt) = f(x,y)$, то уравнение является однородным. Сделаем замену $y = ux$, $y' = u'x + u$

$$u'x + u = \frac{u^2x^2}{x(ux-x)}$$

$$u'x = \frac{u^2}{u-1} - u$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1}$$

$$\int \frac{u-1}{u}du = \int \frac{dx}{x} - \ln C$$

$$\int du - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} - \ln C$$

$$u - \ln|u| = \ln|x| - \ln C$$

$$ux = Ce^u$$

$$y = Ce^{\frac{y}{x}}$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $xy' - y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$;

2. $y'x - y = (y+x)\ln\frac{x+y}{x}$

Пример 3. Найти решение уравнение $(x+2y)dx - xdy = 0$.

Решение: Сделаем замену $y = ux$, $dy = udx + xdu$

$$(x+2ux)dx - x(udx + xdu)$$

$$x((1+u)dx - xdu) = 0$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad (1+u)dx - xdu = 0$$

Разделяя в последнем уравнении переменные и интегрируя, найдем его решение

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{1+u} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{u}+\ln C$$

$$\ln|x|=\ln|1+u|+\ln C$$

$$x=C(1+u)$$

$$x=C\left(1+\frac{y}{x}\right)$$

$$x^2=C(x+y)$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0$
2. $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx=xdy$

Десятое практическое занятие

Метод Лагранжа (вариации)

Пример 1. Решить уравнение $xy'-2y=2x^4$.

Решение: $y'-\frac{2}{x}y=2x^3$. Запишем ЛОУ $y'-\frac{2}{x}y=0$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{x}y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y}=2\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x}+\ln C$$

$$\ln|y|=2\ln|x|+\ln C$$

$$y=Cx^2$$

Затем общее решение ЛНУ будем искать в виде $y=C(x)x^2$.

$$\frac{d(C(x))}{dx}x^2+2xC(x)-\frac{2}{x}C(x)x^2=2x^3$$

$$\frac{d(C(x))}{dx}=2x$$

$$C(x)=2\int xdx+C=x^2+C$$

$$y=\left(x^2+C\right)x^2$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $2x\left(x^2+y\right)dx=dy$

2. $y'+ytgx=\dfrac{1}{\cos x}$

3. $x^2y'+xy+1=0$

Метод Бернулли

Пример 2. Решить уравнение $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$.

Решение: $y'+\dfrac{(x+1)}{x}y=3xe^{-x}$.

$$y=uv$$

$$v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}+\frac{x+1}{x}uv=3xe^{-x}$$

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}+\frac{x+1}{x}v\right)=3xe^{-x}$$

$$\frac{dv}{dx}+\frac{x+1}{x}v=0$$

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{x+1}{x}v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v}=-\frac{x+1}{x}dx$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{x+1}{x}dx$$

$$\ln|v|=-x-\ln|x| \quad \Rightarrow \quad v=\frac{e^{-x}}{x}$$

$$\frac{e^{-x}}{x}\frac{du}{dx}=3xe^{-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx}=3x^2$$

$$u=3\int x^2dx+C=x^3+C$$

$$y=uv=\frac{x^3+C}{xe^x}$$

$$y=\left(x^2+C\right)x^2$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $y\sin x+y'\cos x=1$

Уравнения Бернулли

Пример 3. Решить уравнение $y' + xy = x^3 y^3$.

Решение: $y' + xy = x^3 y^3 \quad \Big| : y^3$

$$y' y^{-3} + xy^{-2} = x^3$$
$$z = y^{-2} \quad \Rightarrow \quad z' = -2y^{-3} y'$$
$$z' - 2xz = -2x^3$$
$$z' - 2xz = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{z} = 2xdx \quad \Rightarrow$$
$$\ln|z| = x^2 + \ln C \Rightarrow \quad z = Ce^{x^2}$$
$$z = C(x)e^{x^2}$$
$$z' = C'e^{x^2} + 2xCe^{x^2} \quad \Rightarrow$$
$$C'(x)e^{x^2} = -2x^3$$
$$dC = -2x^3 e^{-x^2} dx \quad \Rightarrow \quad C(x) = -\int 2x^3 e^{-x^2} dx + C$$
$$C(x) = \left(x^2 + 1\right)e^{-x^2} + C$$
$$z = \left(x^2 + 1\right) + Ce^{x^2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{y^2} = 1 + x^2 + Ce^{x^2}$$

Одиннадцатое практическое занятие

Уравнения в полных дифференциалах

Пример 1. Решить уравнение $\left(1 + y^2 \sin 2x\right)dx - 2\cos^2 x dy = 0$.

Решение:

$$M(x,y) = 1 + y^2 \sin 2x; \; N(x,y) = -2y\cos^2 x$$
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y\sin 2x; \; \frac{\partial N}{\partial x} = -2y(-2\cos x \sin x) = 2y\sin 2x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + y^2 \sin 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y\cos^2 x$$

$$u(x, y) = \int \left(1 + y^2 \sin 2x\right) dx + C(y)x = x - \frac{1}{2} y^2 \cos 2x + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -y\cos 2x + \frac{d(C(y))}{dy} = -2y\cos^2 x$$

$$\frac{d(C(y))}{dy} = y\left(\cos 2x - 2\cos^2 x\right) = y\left(\cos^2 x - \sin^2 x - 2\cos^2 x\right) = -y$$

$$C(y) = -\int y dy + C = -\frac{y^2}{2} + C$$

$$u(x, y) = x - \frac{1}{2} y^2 \cos 2x - \frac{y^2}{2} + C = x - \frac{y^2}{2}(1 + \cos 2x) + C = x - y^2 \cos^2 x + C$$

Задачи для самостоятельного решения:

1. $xy^2 y' = x^2 + y^3$
2. $\left(2x^2 y \ln y - x\right) y' = y$
3. $e^y dx - \left(2y + xe^y\right) dy = 0$
4. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2} dx = \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3} dy$
5. $(\cos x - x\sin x) ydx + (x\cos x - 2y) dy = 0$