Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Ильшат Ринатович Мухаметзянов
Должность: директор
Дата подписания: 13.07.2023 14:34:25
Уникальный программный ключ:
aba80b84033c9ef196388e9ea0434f90e83a40954ba270e84bcbe64f02d1d8d0

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»
Чистопольский филиал «Восток»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

по дисциплине

«Специальные разделы математики»

Индекс по учебному плану: **Б1.О.16**
Направление подготовки: **12.03.01 Приборостроение**
Квалификация: **Бакалавр**
Профиль подготовки: **Приборостроение**
Вид профессиональной деятельности: **проектно-конструкторский, производственно-технологический**

Чистополь
2023 г.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. **Извлечение корня.** Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ \varphi=\arg z,\ k=0,1,...,n-1,\ z\neq 0.$$

2. **Элементарные функции комплексного переменного.** Значения показательной функции комплексного переменного $z=x+iy$ вычисляются по формуле

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y). \qquad (1)$$

Показательная функция e^z обладает следующими свойствами:

$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$,

где z_1 и z_2 - любые комплексные числа;

$e^{z+2\pi ki}=e^z$, $k=0$, $\pm1,...$, т.е. e^z

является периодической функцией с основным периодом $2\pi i$.

Тригонометрические функции $\omega=\sin z$ и $\omega=\cos z$ - периодические с действительным периодом 2π и имеют только действительные нули $z=k\pi$ и $z=\pi/2+k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ соответственно.

$\sin^2 z+\cos^2 z=1$.

Функции $\omega=tgz$ и $\omega=tgz$ определяются равенствами

$$tgz=\frac{\sin z}{\cos z};\ ctgz=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Гиперболические функции определяются равенствами:

$$shz=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\ chz=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\ thz=\frac{shz}{chz},\ cthz=\frac{chz}{shz}.$$

Имеют место тождества $shiz=i\sin z$, или $\sin z=-ishiz$; $chiz=\cos z$, $tgiz=itgz$, $ctgiz=-ictgz$.

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};\quad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};$$

Пользуясь этими равенствами можно получить ряд формул, связывающих гиперболические функции.

$-sh^2iz+ch^2iz=1$, $ch^2z-sh^2z=1$,

Логарифмическая функция $\omega=Lnz$, где $z\neq0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$Lnz=\ln|z|+iArgz=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

Значение функции, которое получается при $k=0$, называется главным значением и обозначается

$\ln z=\ln|z|+i\arg z$, где $-\pi<\arg z\leq\pi$.

Логарифмическая функция обладает следующими свойствами:

$$Ln(z_1,z_2)=Lnz_1+Lnz_2,\ Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=Lnz_z-Lnz_2,$$

$$Lnz^n=nLnz+2\pi ki,\ k=0,\pm1,\pm2,...,\ Ln\sqrt[n]{z}=\frac{1}{n}Lnz.$$

Функции $Arc\sin z$, $Arc\cos z$, $Arctgz$, $Arcctgz$ определяются как обратные к функциям $\sin z$, $\cos z$, tgx, $ctgz$ соответственно. Так, если $z=\cos w$, то w называется арккосинусом числа z и обозначается $w=Arc\cos z$. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую:

$$Arc\sin z=-iLn\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right),\ Arc\cos z=-iLn\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),\ Arctgz=-\frac{i}{2}Ln\frac{1+iz}{1-iz},\ Arcctgz=\frac{i}{2}Ln\frac{z-i}{z+i}.$$

Значения, соответствующие главному значению логарифма, обозначаются теми же символами со строчной буквы ($\arcsin z$, $\arccos z$, $arctgz$, $arcctgz$); они называются главными значениями.

Задача 1

Найти все значения корня

$\sqrt[3]{-i27}$

Корень n-ой степени из комплексного числа Z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{|Z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right),$$

где φ - аргумент комплексного числа Z, обозначается $\varphi=argZ$; k принимает значения $k=0,1,\ldots,n-1$;

$Z\neq 0$

$Z=-i27$

$x+iy=-i27$, т. е.

$x=0,\ y=-27$

Изобразим комплексное число на плоскости и отметим угол φ на чертеже, угол φ откладываем от положительного направления оси OX до радиус-вектора, соединяющего начало координат и число Z.

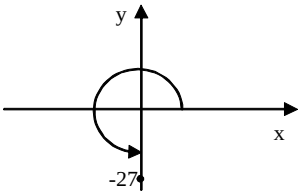

Рис. 1

Сначала найдем модуль числа Z, который находится по формуле:

$$|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|Z| = |x+iy| = |-i27| = \sqrt{0^2+(-27)^2} = 27$$

$\varphi = \frac{3\pi}{2}$, или $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ тогда подставим в формулу найденные $|z|$ и φ и 3 значения k, в нашем примере k будет 0, 1, 2.

$$\sqrt[3]{-27i} = \sqrt[3]{27}\cdot\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)\right)$$

k = 0

$$z_0 = \sqrt[3]{27}\cdot\left(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\cdot\sin(-\frac{\pi}{6})\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$$

k = 1

$$z_1 = \sqrt[3]{27}\cdot\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 1}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 1}{3}\right)\right) =$$

$$= 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right)\right) = 3(0+i) = 3i$$

k = 2

$$z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 2}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi\cdot 2}{3}\right)\right) = 3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\cdot$$

Изобразим решение на окружности с центром в точке O(0;0) и радиусом 3.

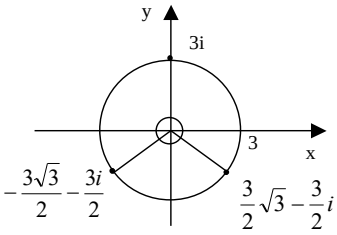

Рис. 2

Задача 2

Представить в алгебраической форме

$ch\left(3+\frac{\pi i}{4}\right)$

Гиперболическая функция ch Z определяется равенствами

$chZ=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$, а значение показательной функции вычисляется по формуле

$e^{z}=e^{x}(\cos y+i\cdot\sin y)$ найдем значения x и y из условия

$ch\left(3+\frac{\pi i}{4}\right)\Rightarrow x=3 \qquad y=\frac{\pi}{4}$ подставим числовые значения x и y в формулу, получим:

$e^{Z}=e^{3}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=e^{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, аналогично запишем $e^{-3-\frac{\pi}{4}i}=e^{-3}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$, тогда,

$$ch(3+\frac{\pi i}{4})=\frac{e^{(3+\frac{\pi i}{4})}+e^{-(3+\frac{\pi i}{4})}}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(e^{3}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})+e^{-3}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))=$$

$$=\frac{1}{2}(e^{3}\frac{\sqrt{2}}{2}+e^{3}\frac{\sqrt{2}}{2}i+e^{-3}\frac{\sqrt{2}}{2}-e^{-3}\frac{\sqrt{2}}{2}i)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(e^{3}+e^{-3})+i\frac{\sqrt{2}}{4}(e^{3}-e^{-3})$$

Задача 3

Представить в алгебраической форме

Arctg 1

Воспользуемся формулой

$ArctgZ=-\frac{i}{2}Ln\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|$ Рассмотрим

$$Ln\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|=Ln|1+iz|-Ln|1-iz|=Ln|1+i(x+iy)|-Ln|1-i(x+iy)|=$$

$$=Ln|1+ix-y|-Ln|1-ix+y|$$

По условию **Z=1⇒ x+iy=1⇒ x=1, y=0**

Тогда подставим данные задачи в формулу и получим:

. $Ln|1+i\cdot1-0|-Ln|1-i\cdot1+0|=Ln|1+i|-Ln|1-i|$. Пусть $1+i=Z_1$, $1-i=Z_2$

Найдем по формуле

$Ln=\ln|Z|+i(\arg Z+2\pi k)$, $к=0, \pm1, \pm2, \ldots$

$|Z_1|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Изобразим Z_1 на координатной плоскости

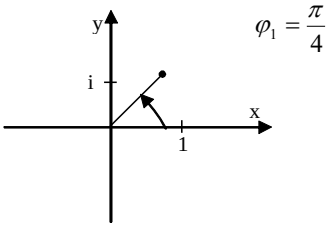

Рис. 3

$|Z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Изобразим Z_2 на координатной плоскости

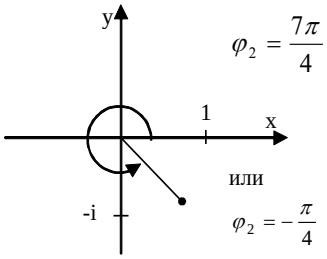

Рис. 4

$Ln|Z_1| = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$ $Ln|Z_2| = \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$

$Ln|1+i| - Ln|1-i| = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) - \ln\sqrt{2} - i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) =$

$= i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k - 2\pi k\right) = i\left(\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\pi i$

$Arctg 1 = -\frac{i}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\pi i\right) = \frac{1}{4}\pi$

Итак, после вычислений получили:

$Arctg\, 1 = \frac{\pi}{4}$

Задача 4

Вычертить область, заданную неравенствами

$|\mathrm{Re}\, z| \le 1$, $|\mathrm{Im}\, z| < 2$

$Z = x + iy$

$\mathrm{Re}\, z = x$ $\mathrm{Im}\, z = y$,т.е.

$|x| \le 1$ $|y| < 2$

Неравенство $|x| \le 1$ на графике представляет собой бесконечную вертикальную полосу с границами $x = -1$ и $x = 1$, а неравенство $|y| < 2$ представляет бесконечную горизонтальную полосу с границами $y = -2$ и $y = 2$, причем имеем строгое неравенство, поэтому на чертеже отметим эти линии пунктиром. При наложении этих решений, т.е. решая совместно систему $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -2 < y < 2 \end{cases}$ получим такую область:

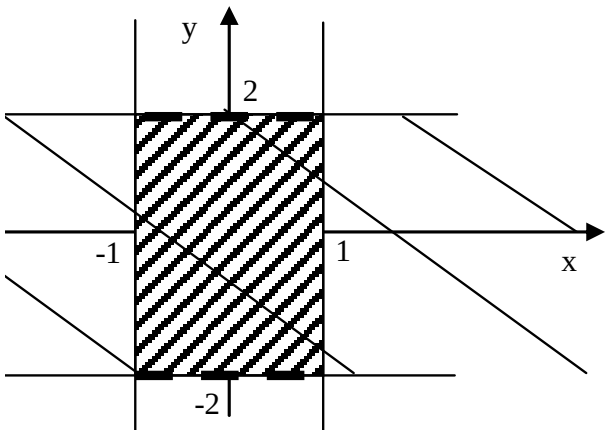

Рис. 5

Задача 5

Определить вид кривой

$Z = t^2 - 2t + 3 + i\left(t^2 - 2t + 1\right)$

$$x(t) = t^2 - 2t + 3$$
$$y(t) = t^2 - 2t + 1$$

Управление вида $Z = Z(t) = x(t) + iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которые имеют вид

x=x(t), y=y(t) в нашем случае имеем

$x(t)=t^2-2t+3$

$y(t)=t^2-2t+1$

$x(t)=t^2-2t+1+2$

$y(t)=(t-1)^2$

$\begin{matrix} x(t) = (t-1)^2 + 2 \\ y(t) = (t-1)^2 \end{matrix}$, т.е. можно записать $x(t) = y(t) + 2$, а значит $y = x - 2$. Это уравнение задает прямую *y=x-2*

Задача 6

Проверить, что V является мнимой частью аналитической функции. Восстановить аналитическую в окрестности точки Z_0 функцию t(Z) по известной мнимой V(x;y) и значению $f(Z_0)$

V=2xy+x, f(0)=0

Если f(2) - аналитическая функция $\Rightarrow$ выполняются условия Коши – Римана

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Найдем частные производные первого порядка для заданной функции

Имеем

$\frac{\partial V}{\partial y} = (2xy + x)'_y = 2x$, следовательно

$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x$. Отсюда интегрируя это равенство по переменной *x* находим:

$\int \frac{\partial U}{\partial x} = \int 2x dx$, находим

$U = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$

$U = x^2 + \varphi(y)$. Теперь снова дифференцируем функцию *U* по переменной *y*, а далее найдем производную по переменной *x* для функции *V*.

$\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi'(y)$

$\frac{\partial V}{\partial x} = (2xy + x)'_x = 2y + 1 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$

$2y + 1 = -\varphi'(y)$

$\varphi'(y) = -2y - 1$

Найдем $\varphi(y)$, для этого проинтегрируем по переменной y

$\varphi(y) = -\int (2y+1)dy$

$\varphi(y) = -y^2 - y + c$

Отсюда $U=x^2-y^2-y+c$

$f(Z) = U + iV$.Подставим полученную функцию U и данную функцию V, получим выражение, которое затем преобразуем.

Значит $f(Z)=(x^2-y^2-y+c)+i(2xy+x)=x^2-y^2-y+c+2ixy+ix=x^2+2ixy+(iy)^2+ +ix+ i^2y+c = (x+iy)^2+i(x+iy)+c= z^2+iz+c$, т.е.

$f(z)=z^2+iz+c$

Воспользуемся частными условиями $f(0) = 0$

$f(0)=0$

$f(0)=0^2+i\cdot 0+c=0 \Rightarrow \ c=0$

Итак, мы получили

$f(z)=z^2+iz$

Задача 7

Вычислить интеграл от функции комплексного переменного по данной кривой

$\int\limits_L Z|Z|dz; L: \{|Z| = 1, \operatorname{Im} Z \geq 0\}$

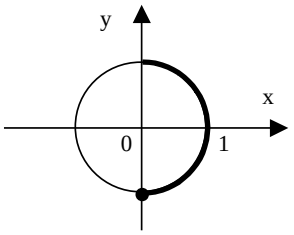

Рис. 6

|Z|=1 – это окружность

с центром в точке (0;0) и радиусом равным 1

$ImZ \geq 0 \Rightarrow X \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \arg Z \leq \frac{\pi}{2}$

Уравнение |Z|=1 запишем в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Параметр t изменяется в пределах $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Найдем дифференциалы от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} dx = -\sin t dt \\ dy = \cos t dt \end{cases}$$

$z \cdot |z| = (x+iy)\cdot\sqrt{x^2+y^2} = x\sqrt{x^2+y^2} + iy\sqrt{x^2+y^2}$, т.е.

$U = x\sqrt{x^2+y^2} \quad V = y\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$

$$\int_L z|z|dz = \int x\sqrt{x^2+y^2}\,dx - y\sqrt{x^2+y^2}\,dy + i\int_L y\sqrt{x^2+y^2}\,dx + x\sqrt{x^2+y^2}\,dy =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\cdot(-\sin t)dt - \sin t\cdot 1\cdot \cos t dt +$$

$$+ i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cdot 1\cdot(-\sin t)dt + \cos t\cdot 1\cdot \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -2\sin t\cos t dt + i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)dt =$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt + i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt =$$

$$= +\frac{1}{2}\cos 2t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + i\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cos\pi - \cos(-\pi)\right) + i\frac{1}{2}\left(\sin\pi - \sin(-\pi)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-1-(-1)\right) + i\frac{1}{2}(0-0) = 0$$

Задача 8

Найти все лорановские разложения данной функции по степеням Z

$$\frac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3} = f(z)$$

$$\frac{15z+450}{z\left(-2z^2+15z+225\right)} = \left|\begin{array}{l} -2z^2+15z+225=0 \\ D = 15^2 - 4\cdot(-2)\cdot 225 = 2025 = 45^2 \\ z_{1,2} = \dfrac{-15\pm\sqrt{2025}}{-4} = -\dfrac{15}{2};\ 15 \end{array}\right.$$

$$\frac{15z+450}{z\left(-2z^2+15z+225\right)} = \frac{15z+450}{z\left(-2\left(z+\frac{15}{2}\right)(z-15)\right)} = \frac{15z+450}{-2z\left(z+\frac{15}{2}\right)(z-15)}$$

Представим функцию f(z) в виде

$$\frac{15z+450}{-2z\left(z+\frac{15}{2}\right)(z-15)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+\frac{15}{2}} + \frac{C}{z-15}$$, тогда

$$-\frac{15}{2}z - \frac{450}{2} = A\left(z+\frac{15}{2}\right)(z-15) + Bz(z-15) + Cz\left(z+\frac{15}{2}\right)$$

Пусть $z=0$, подставляя в полученное уравнение найдем значение А $-\frac{450}{2} = -\frac{225}{2}A \Rightarrow A = \frac{450}{225} = 2$.

Пусть $z = -\frac{15}{2}$, тогда $\frac{225}{4} - \frac{450}{2} = B\cdot(-\frac{15}{2})\left(-\frac{15}{2}-15\right) \Rightarrow B = -1$

Пусть $z=15$, тогда

$$-\frac{225}{2} - \frac{450}{2} = C\cdot 15\cdot\left(15+\frac{15}{2}\right) \Rightarrow C = -1$$

$$\frac{15z+450}{-2z\left(z+\frac{15}{2}\right)(z-15)} = \frac{2}{z} - \frac{1}{z+\frac{15}{2}} - \frac{1}{z-15}$$

Функция f(z) имеет три особых точки:

$Z_1=0$; $Z_2 = -\frac{15}{2}$; $Z_3=15$. Она аналитична в областях

а) $0<|z|<\frac{15}{2}$ б) $\frac{15}{2}<|z|<15$ в) $|z|>15$

а) в круге $0<|z|<\frac{15}{2}$ имеем: $-\frac{2}{z}=-2\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{2}{z}$

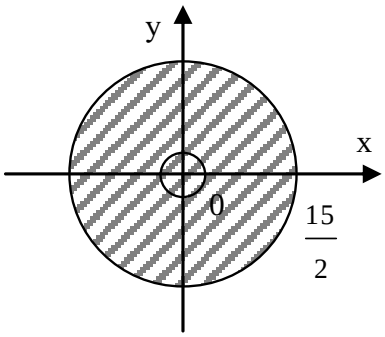

Рис. 7

$$\frac{-1}{z+\frac{15}{2}}=-\left(\frac{1}{z+\frac{15}{2}}\right)=-\left(\frac{1}{\frac{15}{2}\left(1+\frac{z}{\frac{15}{2}}\right)}\right)=-\frac{2}{15}\left(\frac{1}{1-(-\frac{z}{\frac{15}{2}})}\right)=-\frac{2}{15}\left(1-\frac{2z}{15}+\frac{4z^2}{225}-...\right)$$ здесь $\left|-\frac{z}{\frac{15}{2}}\right|<1$,

т.е. $|z|<\frac{15}{2}$

$$-\frac{1}{z-15}=-\left(\frac{1}{-15\left(1-\frac{z}{15}\right)}\right)=\frac{1}{15}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{15}}\right)=\frac{1}{15}\left(1+\frac{z}{15}+\frac{z^2}{225}+...\right)$$

здесь $\left|\frac{z}{15}\right|<1$, т.е. $|z|<15$

Следовательно

$$f(z)=\frac{15z+450}{-2z\left(z+\frac{15}{2}\right)(z-15)}=-\frac{2}{z}-\frac{2}{15}\left(1-\frac{2z}{15}+\frac{4z^2}{225}+...\right)+\frac{1}{15}\left(1+\frac{z}{15}+\frac{z^2}{225}+...\right)=$$

$$=-\frac{2}{z}-\frac{2}{15}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{(2z)}{15}\right)^n+\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{15}\right)^n$$

б) в кольце $\frac{15}{2}<|z|<15$

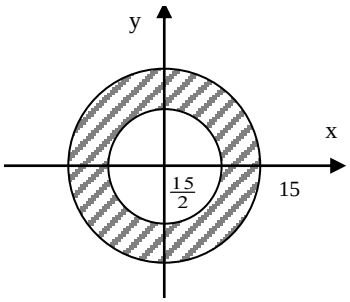

Рис. 8

$$\frac{-1}{z+\frac{15}{2}}=-\left(\frac{1}{z\left(1+\frac{15}{2z}\right)}\right)=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{\frac{15}{2}}{z})}=-\frac{1}{z}\left(1-\frac{15}{2z}+\frac{225}{4z^2}-...\right)=|z|>\frac{15}{2}$$

$$=-\frac{1}{z}+\frac{15}{2z^2}-\frac{225}{4z^3}+...$$

$$-\frac{1}{z-15}=-\left(\frac{1}{-15\left(1-\frac{z}{15}\right)}\right)=\frac{1}{15}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{15}}\right)=\frac{1}{15}\left(1+\frac{z}{15}+\frac{z^2}{225}+...\right)\quad |z|<15$$

Следовательно в кольце $\frac{15}{2}<|z|<15$

$$f(z)=\frac{15z+450}{-2z\left(z+\frac{15}{2}\right)(z-15)}=-\frac{2}{z}+\left(-\frac{1}{z}+\frac{15}{2z^2}-\frac{225}{4z3}+\ldots\right)+\frac{1}{15}\left(1+\frac{z}{15}+\frac{z^2}{225}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{2}{z}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{15}{2}\right)^{n-1}(-\frac{1}{z})^n\right)+\frac{1}{15}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{15}\right)^n\right)$$

в) в области $|z|>15$ имеем:

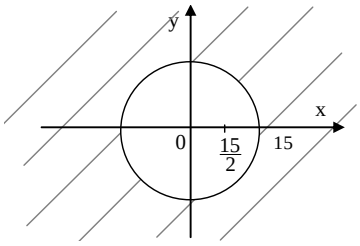

Рис. 9

$$\frac{-1}{z-15}=-\left(\frac{1}{z\left(1-\frac{15}{z}\right)}\right)=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{15}{z}+\frac{225}{z^2}+\ldots\right)=-\frac{1}{z}-\frac{15}{2z^2}-\frac{225}{z^3}-\ldots$$

$$\frac{-1}{z+\frac{15}{2}}=-\left(\frac{1}{z\left(1+\frac{15}{2z}\right)}\right)=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{\frac{15}{2}}{z})}=-\frac{1}{z}\left(1-\frac{15}{2z}+\frac{225}{4z^2}-...\right)=$$

$$=-\frac{1}{z}+\frac{15}{2z^2}-\frac{225}{4z^3}+...$$

Следовательно

$$f(z)=\frac{15z+450}{-2z\left(z+\frac{15}{2}\right)(z-15)}=-\frac{2}{z}+\left(-\frac{1}{z}+\frac{15}{2z^2}-\frac{225}{4z^3}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{15}{z^2}+\frac{225}{z^3}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{2}{z}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{15}{2}\right)^{n-1}(-\frac{1}{z})^n\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{15^{n-1}}{z^n}\right)$$

Задача 9

Определить тип особой точки

$$f(z)=\frac{e^{z^3}-1}{e^z-1-z}$$

$Z_0=0$ – особая точка Найдем нули знаменателя $e^z-1-z=0\Rightarrow z_0=0$

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{z^3}-1}{e^z-1-z}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{z\to 0}\frac{e^{z^3}\cdot 3z^2}{e^z-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\left(e^{z^3}\right)^{|}\cdot 3z^2+\left(3z^2\right)^{|}\cdot e^{z^3}}{e^z}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{z^3}\cdot\left(3z^2\right)^2+6ze^{z^3}}{e^z}=0$$ Z_0 – устранимая особая точка

Задача 10

Для данной функции найти изолированные особые точки и определить их тип

$$f(z)=\frac{\sin \pi z}{z^4-1}e^{\frac{1}{z}}$$

$Z_5=0;\ Z^4-1=0$

$(Z^2-1)(Z^2+1)=0$

$(Z-1)(Z+1)(Z-i)(Z+i)=0$

$Z_1=1;\ Z_2=-1;\ Z_3=i;\ Z_4=-i$

Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 – изолированные особые точки

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{Z\to 1}\frac{\sin \pi z}{z^4-1}\cdot e^{\frac{1}{z}}=\lim_{Z\to 1}e^{\frac{1}{z}}\cdot\lim_{Z\to 1}\frac{\pi\cos\pi z}{4z^3}=e\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi e}{4}$$

$Z=1$ – устранимая особая точка

$$\lim_{z\to -1}\frac{\sin \pi z}{z^4-1}\cdot e^{\frac{1}{z}}=\lim_{z\to -1}e^{\frac{1}{z}}\cdot\lim_{z\to -1}\frac{(\sin\pi z)'}{(z^4-1)'}=\lim_{z\to -1}e^{\frac{1}{z}}\cdot\lim_{z\to -1}\frac{\pi\cos\pi z}{4z^3}=\frac{1}{e}\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4e}$$

$z=-1$-устранимая особая точка

$$\lim_{z\to i}\frac{\sin \pi z}{z^4-1}\cdot e^{\frac{1}{z}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{z\to i}e^{\frac{1}{z}}\cdot\lim_{z\to i}\frac{(\sin\pi z)'}{(z^4-1)'}=e^{\frac{1}{i}}\cdot\lim_{z\to i}\frac{\pi\cos\pi z}{4z^3}=e^{\frac{1}{i}}\cdot\frac{\pi}{-4i}\cdot\cos\pi i$$

$z=1$ – устранимая особая точка

$$\lim_{z\to -i}\frac{\sin \pi z}{z^4-1}\cdot e^{\frac{1}{z}}=\left[\frac{0}{0}\right]=e^{-\frac{1}{i}}\cdot\frac{\pi}{4i}\cos(-\pi i)$$

$z=-1$ – устранимая особая точка

Задача 11

Найти оригинал по заданному изображению:

$$F(p)=\frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}.$$

Разобьем дробь на сумму простейших дробей, используя метод неопределённых коэффициентов:

$$F(p)=\frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)}==\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2-6p+10}=\frac{A(p^2-6p+10)+(Bp+C)(p-1)}{(p-1)(p^2-6p+10)};$$

$$3p-2=A(p^2-6p+10)+Bp^2-Bp+Cp-C.$$

Составим равенства при одинаковых степенях p :

p^2 0=A+B

p^1 3=-6A-B+C

p^0 -2=10A-C. Решая полученную систему уравнений получим : A=$\frac{1}{5}$ $B=-\frac{1}{5}$ C=4.

$$F(p)=\frac{1}{5(p-1)}+\frac{-\frac{1}{5}p+4}{p^2-6p+10}=\frac{1}{5(p-1)}+\frac{-\frac{1}{5}p+4}{(p-3)^2+1}=$$

$$=\frac{1}{5(p-1)}-\frac{1}{5}\left(\frac{p-20}{(p-3)^2+1}\right)=\frac{1}{5(p-1)}-\frac{1}{5}\left(\frac{p-3-17}{(p-3)^2+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{5(p-1)}-\frac{1}{5}\left(\frac{p-3}{(p-3)^2+1}\right)+\frac{17}{5}\left(\frac{1}{(p-3)^2+1}\right)=\frac{1}{5}e^t-\frac{1}{5}e^{3t}\cos t+$$

$$+\frac{17}{5}e^{3t}\sin t=f(t)$$

Задача 12

Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''-3y'+2y=2e^t\cos\frac{t}{2},$$

$$y(0)=1,\ y'(0)=0$$

Решение:

Пусть $y(t) \doteqdot F(p) = F,$

Тогда

$$y'(t) \doteqdot pF - y(0) = pF - 1$$

$$y''(t) \doteqdot p^2F - py(0) - y'(0) = p^2F - p - 0 = p^2F - p$$

Правая часть уравнения по таблице оригиналов и изображений будет иметь вид:

$2e^t \cos\frac{t}{2} \doteqdot 2\frac{p-1}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}$ Подставим в уравнение и получим:

$$p^2F - p - 3(pF-1) + 2F = \frac{2(p-1)}{(p-1)^2+\frac{1}{4}}$$

$$F(p^2 - 3p + 2) = \frac{2(p-1)}{p^2 - 2p + \frac{5}{4}} + p - 3 =$$

$$= \frac{2p - 2 + (p-3)(p^2 - 2p + \frac{5}{4})}{p^2 - 2p + \frac{5}{4}} =$$

$$= \frac{p^3 - 5p^2 + \frac{37}{4}p - \frac{23}{4}}{p^2 - 2p + \frac{5}{4}};$$

$$F = \frac{p^3 - 5p^2 + \frac{37}{4}p - \frac{23}{4}}{(p^2 - 2p + \frac{5}{4})(p^2 - 3p + 2)}$$

Разложим полученную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{p^3 - 5p^2 + \frac{37}{4}p - \frac{23}{4}}{(p^2 - 2p + \frac{5}{4})(p^2 - 3p + 2)} = \frac{Ap + B}{p^2 - 2p + \frac{5}{4}} + \frac{C}{p-1} + \frac{D}{p-2}.$$

Получим $A = -\frac{8}{5}, \quad B = 0, \quad C = 2, \quad D = \frac{3}{5}$, значит

$$F(p) = \frac{-\frac{8}{5}p}{p^2 - 2p + \frac{5}{4}} + \frac{2}{p-1} + \frac{\frac{3}{5}}{p-2} = -\frac{8}{5}\frac{(p-1+1)}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} +$$

$$+ 2\frac{1}{p-1} + \frac{3}{5}\frac{1}{p-2} = -\frac{8}{5}\frac{p-1}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} - \frac{8}{5}2\frac{\frac{1}{2}}{(p-1)^2 + \frac{1}{4}} +$$

$$+ 2\frac{1}{p-1} + \frac{3}{5}\frac{1}{p-2} \doteqdot -\frac{8}{5}e^t\cos\frac{t}{2} - \frac{16}{5}e^t\sin\frac{t}{2} + 2e^t + \frac{3}{5}e^{2t} = y(t).$$

Задача 13

Решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = 3x \end{cases};$$

При x(0)=0, y(0)=1.

Решение:

Пусть $x = x(t) \doteqdot X(p) = X;$

$y = y(t) \doteqdot Y(p) = Y.$

Находим, что $x' \doteqdot pX - 0,$

$y' \doteqdot pY - 1,$

Система операторных уравнений примет вид:

$pX = -2X + Y$

$pY - 1 = 3X$

$pX + 2X = Y$ подставим во второе уравнение, получим:

$p(pX + 2X) - 1 = 3X$

$X(p^2 + 2p - 3) = 1$

$$X = \frac{1}{p^2 + 2p - 3} = \frac{1}{(p-1)(p+3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+3}$$

Найдем коэффициенты А и В:

$A(p+3) + B(p-1) = 1$

если

$p = -3, то$

$B = -\frac{1}{4},$

если

$p = 1, то$

$A = \frac{1}{4}$

Значит $X = \frac{1}{4}\frac{1}{p-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{p+3} \doteqdot \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-3t} = x(t),$

Аналогично находим Y, подставим значение X в первое операторное уравнение

$Y = \frac{p+2}{(p-1)(p+3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+3}$, т.е.

$p + 2 = A(p+3) + B(p-1)$

$A = \frac{3}{4}$

$B = \frac{1}{4}$

$$Y = \frac{3}{4}\frac{1}{p-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{p+3} \doteqdot \frac{3}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-3t} = y(t)$$

Ответ: $x(t) = \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-3t}$

$y(t) = \frac{3}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-3t}$

Рекомендации по изучению теоретического материала.

К выполнению контрольной работы следует приступать только после овладения соответствующих разделов курса «математика». Студентам рекомендуется изучать материал в следующем порядке:

1. Ознакомиться с тематикой дисциплины. Просмотреть рекомендуемую литературу.
2. Выбрать 1-2 учебника (методических указаний или пособий) в качестве основных.
3. Изучить материал по учебникам, выбранным из указанных: усвоить основные термины, теоремы, формулы; разобраться в решениях задач, которые приводятся в литературе.
4. Изучая материал курса, составить его краткий конспект.
5. Ответить на вопросы, поставленные после разобранного материала (ответы на вопросы Вы найдёте в содержании данного пособия).

И только после изучения теоретических и практических основ курса следует приступать к выполнению контрольной работы.