МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический
университет им. А.Н. Туполева-КАИ»
Чистопольский филиал «Восток»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

по дисциплине

«Теория вероятностей и математическая статистика»

Индекс по учебному плану: **Б1.О.09.03**
Направление подготовки: **38.03.01 Экономика**
Квалификация: **Бакалавр**
Профиль подготовки:
Экономика малого и среднего предпринимательства
Типы задач профессиональной деятельности:
расчетно-экономический,
организационно-управленческий
научно-исследовательский

Рекомендованы УМК ЧФ КНИТУ-КАИ

Чистополь
2023 г.

Данные методические указания подготовлены по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Наряду с кратким изложением теоретического материала они содержат разобранные примеры и большое количество задач для самостоятельного решения.

Методические указания состоят из двух частей. В первую часть вошли параграфы: классическое определение вероятности, теоремы сложения и умножения вероятностей, формулы полной вероятности, Байеса, Бернулли, Лапласа, Пуассона, законы распределения вероятностей дискретной случайной величины, числовые характеристики дискретных случайных величин, функция и плотность вероятностей случайной величины, плотность распределения вероятностей и числовые характеристики непрерывной случайной величины, равномерное и показательное распределение, нормальное распределение.

Методические указания могут быть использованы для проведения практических занятий.

§1. Классическое определение вероятности

При классическом определении вероятность появления события А вычисляется по формуле:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события А; n – общее число равновозможных элементарных исходов испытания.

Пример 1. Брошены 2 игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится шестерка.

Решение. Общее количество равновозможных элементарных исходов испытания найдем по принципу умножения: $n=6\times 6=36$. Благоприятствующим интересующему нас событию являются следующие исходы: 1) 6, 2; 2) 6, 4; 3) 6, 6; 4) 2, 6; 5) 4, 6. Здесь первым записано число очков, выпавших на первой кости, вторым – число очков на второй кости. Таким образом, число благоприятных исходов m=5, следовательно

$$P(A)=\frac{5}{36}.$$

Пример 2. В конверте 10 карточек с номерами 1, 2, …10. Наудачу извлечены 6 карточек. Найти вероятность того, что среди извлеченных окажутся: а) карточка №1, б) карточки №1 и №2.

Решение. Общее число равновозможных элементарных исходов испытания равно числу наборов по 6 карточек из 10, отличающихся хотя бы одной карточкой, т.е. $n=C_{10}^{6}$. Найдем число благоприятных исходов: в наборе есть карточка №1, а остальные 5 имеют другие номера, следовательно, их можно извлечь C_9^5 способами. Тогда

$$m = C_9^5, \text{ а } P = \frac{C_9^5}{C_{10}^6} = 0.6.$$

б) Поскольку среди отобранных в этом случае есть карточки №1 и №2, то из оставшихся 8 извлекаются 4, следовательно

$$m = C_8^4, \text{ а } P = \frac{C_8^4}{C_{10}^6} = \frac{1}{3}.$$

Пример 3. Из 10 букв разрезной азбуки составлено слово «математика». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы, а затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «математика».

Решение. Общее число исходов испытания равно числу перестановок 10 букв, т.е. $n = P_{10} = 10!$ Если бы слово состояло из разных букв, то благоприятным был один исход. Но в заданном слове «м» повторяется 2 раза, «а» - 3 раза, «т» - 2 раза, поэтому возможны их перестановки, при которых слово не изменяется. Поэтому

$m = 2! \times 3! \times 2! = 24$, а $p = \frac{m}{n} = \frac{24}{10!} = \frac{1}{151200}$.

РЕШИТЬ.САМОСТОЯТЕЛЬНО

4. В коробке 6 одинаковых занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

5. В ящике содержится 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

6. Устройство состоит из 5 элементов, из которых 2 изношены. При включении устройства случайным образом включаются 2 элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

7. На складе имеется 15 кинескопов, причем 10 из них изготовлены Воронежским заводом. Найти вероятность того, что среди 5 наудачу взятых кинескопов - 3 кинескопа воронежского завода.

8. Наудачу выбирается пятизначное число. Какова вероятность следующих событий: A={число одинаково читается как слева направо, так и справа налево (как, например, 13531)}, B={число кратно пяти}, C={число состоит из нечетных цифр}.

9. Подбрасываются две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: A={числа очков на обеих костях совпадают}, B={число очков на первой кости больше, чем на второй}, C={сумма очков четна}, D={сумма очков больше двух}, E={сумма очков не меньше пяти}, F={хотя бы на одной кости появится цифра шесть}, G={произведение выпавших очков равно шести}.

10. Пяти полевым радиостанциям разрешено во время учений работать на шести радиоволнах. Выбор волны на каждой радиостанции производится наудачу. Найти вероятности следующих событий: A={при одновременной работе всех пяти радиостанций хотя бы две волны не совпадут}, B={будут использованы различные радиоволны}.

11. На шахматную доску случайным образом ставят две ладьи – белую и черную. Какова вероятность, что ладьи не побьют друг друга?

12. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятности следующих событий: A={будут выбраны одни третьекурсники}, B={все первокурсники попадут на конференцию}, C={не будет выбрано ни одного второкурсника}, D={будет выбран следующий состав: 1 первокурсник, 2 второкурсника и 2 третьекурсника}.

13. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом, если

а) число мест равно 8;

б) число мест равно 12.

14. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, причем все комбинации цифр равновероятны, найти вероятности следующих событий: A={четыре последние цифры телефонного номера одинаковы}, B={все цифры различны}, C={номер начинается с цифры 5}, D={номер содержит три цифры 5, две цифры 1 и две цифры 2}.

15. Шесть пассажиров поднимаются на лифте семиэтажного дома. Считая, что движение лифта начинается с цокольного этажа, найти вероятности следующих событий: A={на первых трех этажах не выйдет ни один из пассажиров}, B={все пассажиры выйдут на первых шести этажах}, C={на пятом, шестом и седьмом этажах выйдут по два пассажира}, D={все пассажиры выйдут на одном этаже}.

§2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Если события несовместны, то P(AB)=0 и формула принимает вид:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B).$$

Если события независимы, то P(B/A)=P(B) и формула принимает вид:

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Пример 16. В первой урне 6 белых и 4 черных шара, а во второй – 5 белых и 7 черных шара. Из первой урны случайно взяли 3 шара, а из второй – 2 шара. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров:

1) все шары одного цвета;

2) только 3 белых шара;

3) хотя бы один белый шар;

Решение. Шары вынимают из обеих урн независимо. Элементарными событиями будут сочетания по 3 шара из 10 или по 2 из 12. Введем обозначение событий: A_1 – все вынутые шары одного цвета, A_2 – среди извлеченных шаров только 3 белых, A_3 – среди извлеченных шаров имеется хотя бы один белый.

Пусть из первой урны извлечены: B_1 – 3 белых шара, B_2 – 2 белых и один черный, B_3 – 1 белый и 2 черных, B_4 – 3 черных шара. Из второй урны извлечены: D_1 – 2 белых шара, D_2 – 1 белый и 1 черный шар, D_3 – 2 черных шара.

1) Найдем $P(A_1)$. Для этого выразим событие A_1 через B_i и D_k: $A_1=B_1D_1+B_4D_3$. События B_i и D_k независимы, а B_1D_1 и B_4D_3 – несовместны, поэтому

$$P(A_1)=P(B_1)P(D_1)+P(B_4)P(D_3).$$

Количество элементарных равновозможных исходов для первой и второй урны соответственно равны:

$$n_1=C_{10}^3=120;\ n_2=C_{12}^2=66.$$

Найдем количество благоприятных исходов для событий B_i, D_k:

$$m(B_1)=C_6^3=20;\ m(B_2)=C_6^2C_4^1=60;\ m(B_3)=C_6^1C_4^2=36;\ m(B_4)=C_4^3=4;$$

$$m(D_1)=C_5^2=10;\ m(D_2)=C_5^1C_7^1=35;\ m(D_3)=C_7^2=21;$$

Следовательно:

$$P(A_1)=\frac{m(B_1)}{n_1}\frac{m(D_1)}{n_2}+\frac{m(B_4)}{n_1}\frac{m(D_3)}{n_2}=\frac{20}{120}\frac{10}{66}+\frac{4}{120}\frac{21}{66}=\frac{71}{1980}.$$

2) $A_2=B_1D_3+B_2D_2+B_3D_1$.

$$P(A_2)=P(B_1)P(D_3)+P(B_2)P(D_2)+P(B_3)P(D_1)=$$
$$=\frac{20}{120}\frac{21}{66}+\frac{60}{120}\frac{35}{66}+\frac{36}{120}\frac{10}{66}=\frac{4}{11}.$$

3) Для отыскания $P(A_3)$ введем противоположное событие $\bar{A}_3$: среди извлеченных шаров нет белых. Тогда $P(\bar{A}_3)=P(B_4)P(D_3)=\frac{4}{120}\frac{21}{66}=\frac{7}{660}$,

$$P(A_3)=1-P(\overline{A_3})=1-\frac{7}{660}=\frac{653}{660}.$$

Пример 17. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0.6; 0.7; 0.8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать:

1) только один элемент;

2) только два элемента;

3) все три элемента;

Решение. Введем обозначения событий: A_1 – безотказно работает только один элемент, A_2 – только два, A_3 – все три, B – безотказно работает первый элемент, C – работает второй, D – работает третий. По условию задачи P(B)=0.6; P(C)=0.7; P(D)=0.8.

1) $A_1 = B\bar{C}\bar{D} + C\bar{B}\bar{D} + \bar{B}\bar{C}D$. Тогда:

$$P(A_1) = P(B)P(\bar{C})P(\bar{D}) + P(\bar{B})P(C)P(\bar{D}) +$$
$$+ P(\bar{B})P(\bar{C})P(D) = 0.6 \times 0.3 \times 0.2 + 0.4 \times 0.7 \times 0.2 +$$
$$+ 0.4 \times 0.3 \times 0.8 = 0.188.$$

2) $A_2 = BC\bar{D} + B\bar{C}D + \bar{B}CD$,

$$P(A_2) = 0.6 \times 0.7 \times 0.2 + 0.6 \times 0.3 \times 0.8 + 0.4 \times 0.7 \times 0.8 = 0.452$$

3) $A_3 = BCD$,

$$P(A_3) = P(B)P(C)P(D) = 0.6 \times 0.7 \times 0.8 = 0.336.$$

Пример 18. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что безотказно будут работать:

1) хотя бы 2 элемента;

2) хотя бы 1 элемент;

Решение. Пусть событие E – работают хотя бы 2 элемента, K – работает хотя бы 1 элемент.

1) $E = A_2 + A_3$,

$$P(E) = P(A_2) + P(A_3) = 0.452 + 0.336 = 0.788.$$

2) Введем противоположное событие $\bar{K}$ - отказали все три элемента. Тогда:

$$P(\bar{K}) = P(\bar{B})P(\bar{C})P(\bar{D}) = 0.4 \times 0.3 \times 0.2 = 0.024,$$
$$P(K) = 1 - P(\bar{K}) = 1 - 0.024 = 0.976.$$

Пример 19. Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события: A – выпадение герба на первой монете; D – выпадение хотя бы одного герба; E – выпадение хотя бы одной цифры; F – выпадение герба на второй монете. Определить, зависимы или независимы пары событий: 1) A и E, 2) A и F, 3) D и E, 4) D или F.

Решение. Для независимых событий условная вероятность равна безусловной, а для зависимых – они не равны. Выпишем все исходы испытания: г, г; г, ц; ц, г; ц, ц и определим в каждом случае безусловные и условные вероятности.

1) $P(E) = \frac{3}{4}$; $P(E/A) = \frac{1}{2}$; события зависимы.

2) $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(A/F) = \frac{1}{2}$; события независимы.

3) $P(D) = \frac{3}{4}$; $P(D/E) = \frac{2}{3}$; события зависимы.

4) $P(D) = \frac{3}{4}$; $P(D/F) = \frac{2}{2} = 1$; события зависимы.

20. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор

сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

21. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

22. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

23. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

24. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

25. Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причем каждый должен сделать по два выстрела. Попавший в мишень первым получает приз. Найти вероятность того, что стрелки получат приз.

26. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

27. При одном цикле обзора радиолокационной станции, следящей за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью p. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен.

28. Имеется m радиолокационных станций, каждая из которых за один цикл обзора обнаруживает объект с вероятностью p (независимо от других циклов и других станций). За время T каждая станция успевает сделать n циклов. Найти вероятности следующих событий: A – объект будет обнаружен хотя бы одной из станций, B – объект будет обнаружен каждой станцией.

29. Завод выпускает радиолампы, каждая лампа может с вероятностью p иметь дефект. После изготовления лампы проверяются последовательно 3 контролерами: первый контролер обнаруживает имеющийся дефект с вероятностью P_1, второй и третий с вероятностью P_2 и P_3. В случае обнаружения дефекта изделие бракуется. Определить вероятность событий: A – изделие будет забраковано, B – изделие будет забраковано вторым контролером, C – изделие будет забраковано всеми контролерами.

30. В технической системе некоторые узлы дублированы. Схемы дублирования узлов и их надежности указаны на рисунках. Определить надежность P системы.

31. Пусть пространство $S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ и три его подмножества: $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{7, 9, 11\}$ и $C = (1, 3, 9, 11\}$. Найдите

$A \cup B$ $\quad A \cap B$ $\quad A \cap B \cap C$ $\quad \overline{C}$ $\quad \overline{(B \cap C)}$ $\quad A — B$

$B \cup C$ $\quad A \cap C$ $\quad \overline{A}$ $\quad \overline{A} \cap B$ $\quad A — C$ $\quad (A — B) \cup B$

$A \cup C$ $\quad B \cap C$ $\quad \overline{B}$ $\quad A \cap \overline{B}$ $\quad C — A$ $\quad (A — B) \cup C$

32. Используя операции над множествами, докажите справедливость следующих выражений:

а) $A \cup (A \cap B) = A,$

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

в) $A \cup (A \cap B)=A \cup B,$

г) $(A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B) = A.$

33. Пусть каждому элементу введенных в задаче 31 пространства и подпространств соответствует вероятность 1/6. Найдите следующие вероятности:

а) $P(A)$, б) $P(B)$, в)$P(C)$, г) $P(A \cup B)$, д) $P(A \cup C)$, е) $P((A — C) \cup B)$.

34. Два полупроводниковых диода соединены последовательно. Вероятность короткого замыкания каждого из них составляет 0,05, а обрыва — 0,1. Если считать, что неисправность, возникшая в одном диоде, не влияет па работу другого, то какова вероятность работоспособности цепи?

§3. Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Пусть событие А может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2 \dots H_n$, образующих полную группу ($\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$). Тогда вероятность события А равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на собственную условную вероятность события А:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i).$$

Это равенство называют формулой полной вероятности.

Если известно, что событие А произошло, то вероятности гипотез могут быть найдены по формулам Бейеса:

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) P(A / H_i)}{P(A)}.$$

Пример 35. В монтажном цехе к устройству присоединяется электродвигатель. Электродвигатели поставляются тремя заводами-изготовителями в количестве 19, 6, 11 штук и могут безотказно работать до конца гарантийного срока соответственно с вероятностями 0.85, 0.76 и 0.71. Рабочий берет случайно один двигатель и монтирует его к устройству.
1) Найти вероятность того, что этот электродвигатель проработает до конца гарантийного срока.
2) Двигатель не вышел из строя. Найти вероятность того, что он изготовлен соответственно первым или вторым заводом.

Решение. Рассмотрим следующие события:
А – двигатель работает безотказно до конца гарантийного срока.

Гипотеза H_i – рабочий возьмет двигатель из продукции "i"-го завода. Из условия задачи $P(H_1)=19/36$, т.к. всего двигателей 36, а первый завод поставил 19; $P(H_2)=6/36$; $P(H_3)=11/36$. $\sum_{i=1}^{3} P(H_i) = 19/36 + 6/36 + 11/36 = 1$, следовательно гипотезы H_1, H_2, H_3 образуют полную группу. Условная вероятность того, что двигатель не выйдет из строя, если он изготовлен первым заводом $P(A/H_1)=0.85$; для второго завода $P(A/H_2)=0.76$; для третьего - $P(A/H_3)=0.71$. Тогда:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) +$$
$$+ P(H_3)P(A/H_3) = 0.85 \times 19/36 + 0.76 \times 6/36 + 0.71 \times 11/36 =$$
$$= 0.792.$$

По формуле Бейеса найдем условные вероятности гипотез:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0.528 \times 0.85}{0.792} = 0.566,$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0.167 \times 0.76}{0.792} = 0.160.$$

36. В вычислительной лаборатории имеются шесть клавишных автоматов и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

37. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей - на заводе №2 и 18 деталей - на заводе №3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе № 1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах № 2 и № 3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

38. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

39. Вероятности того, что во время работы цифровой электронной машины произойдет сбой в арифметическом устройстве, в оперативной памяти, в остальных устройствах, относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в оперативной памяти и в остальных устройствах соответственно равны 0,8; 0,9; 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

36. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

40. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6, 0,5 и 0,4.

41. Партия транзисторов, среди которых 10% дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0.95 дефект (если он есть) обнаруживается и существует ненулевая вероятность 0.03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Какова вероятность того, что случайно выбранный транзистор будет дефектным?

42. На вход радиолокационного устройства с вероятностью 0.8 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0.2 – только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью 0.7; если только помеха – то с вероятностью 0.3. Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе есть полезный сигнал.

43. В коробке с немаркированными цифровыми микросхемами лежит 200 шестиэлементных инверторов, 100 схем совпадения, 50 JK-триггеров, 25 декадных счетчиков и 25 четырехразрядных сдвиговых регистров.

а) Какова вероятность того, что взятая наугад микросхема окажется JK-триггером?

б) Какова вероятность того, что взятая наугад микросхема не является инвертором?

в) Если известно, что первая взятая микросхема оказалась сдвиговым регистром, то какова вероятность вытаскивания такой же микросхемы во второй раз?

44. Для задачи 44 дополнительно известно, что неисправны 10 % инверторов, 15 % схем совпадения, 18 % триггеров, а также 20 % счетчиков и сдвиговых регистров.

а) Какова вероятность вытаскивания наугад исправного счетчика?

б) Какова вероятность того, что извлеченная наугад микросхема исправна, если известно, что это JK-триггер?

в) Какова вероятность того, что извлеченная микросхема — декадный счетчик, . если известно, что она исправна?

45. Предприятие выпускает небольшие электрические двигатели мощностью 73,6, 368 и 736 Вт, работающие либо от однофазной сети питания переменного тока с номинальным напряжением 120 или 240 В, либо от трехфазной сети с номинальным напряжением 240 В. Различать эти двигатели можно только по маркировке. На складе имеется 3000 таких двигателей в количествах, указанных в таблице. На одном из двигателей маркировка отсутствует. Определите вероятность того, что

Мощность двигателя, Вт	Количество двигателей с питанием от сети переменного тока с напряжением		
	120 В	240 В (однофазная сеть)	240 В (трехфазная сеть)
73,6	900	400	0
368	200	500	100
736	100	200	600

а) мощность этого двигателя равна 368 Вт,

б) сеть его питания должна быть однофазной с напряжением 240 В,

в) мощность двигателя 736 Вт, и он работает от трехфазной сети 240 В,

г) мощность двигателя 73,6 Вт и он предназначен для работы при напряжении сети 120 В.

47. Пусть для случая, описанного в предыдущей задаче, 10% двигателей для сети питания с напряжением 120 В и 5 % двигателей для однофазной сети питания с напряжением 240 В промаркированы неправильно. Какова вероятность того, что произвольно взятый двигатель

а) окажется неправильно промаркирован?

б) из группы двигателей для однофазной сети 240 В неправильно промаркирован?

§4. Формулы Бернулли, Лапласа и Пуассона

Формула Бернулли. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p (0<p<1), событие наступит равно k раз (безразлично в какой последовательности), равна

$$p_n(k) = C_n^k \times p^k \times q^{n-k}, \text{ где } q = 1 - p.$$

При больших n эта вероятность может быть приближенно вычислена по формуле Лапласа:

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \times p \times q}} \times \varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - n \times p}{\sqrt{n \times p \times q}},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \times \pi}} \times e^{-x^2/2}.$$

Значения функции φ(x) для положительных x затабулированы, а для отрицательных x следует воспользоваться четностью функции: φ(-x)= φ(x).

Если n велико, а вероятность появления события близка к нулю, то большую точность вычисления дает приближенная формула Пуассона:

$$p_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = np.$$

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0<p<1$), событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$p_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $x_1 = \frac{(k_1 - np)}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{(k_2 - np)}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$

Интегральная функция Лапласа Ф(x) затабулирована для x>0, при x<0 следует использовать свойство нечетности функции Ф(-x)=Ф(x).

Пример 48. В каждом из 700 независимых испытаний событие А происходит с постоянной вероятностью 0.35. Найти вероятность того, что событие А произойдет: а) 270 раз; б) не менее 230 и не более 270 раз; в) не менее 270 раз.

Решение. По условию задачи n=700; p=0.35; q=0.65. Поскольку n достаточно велико, воспользуемся приближенными формулами Лапласа.

а) k=270. Найти $P_{700}(270)$.

$\sqrt{npq} = \sqrt{700 \times 0.35 \times 0.65} = 12.6, \quad x = (270 - 700 \times 0.35)/12.6 = 1.98.$

По таблице находим:

$$\varphi(1.98) = 0.0562, \quad P_{700}(270) \approx \varphi(1.98)/12.6 = 0.0562/12.6 = 0.0045 .$$

б) k_1=230, k_2=270. Найти $P_{700}(230 \le k \le 270)$.

$$x_1 = (230 - 700 \times 0.35)/12.6 = -1.19, \quad x_2 = (270 - 700 \times 0.35)/12.6 = 1.98.$$

Значения Ф(x) найдем по таблице:

$$P_{700}(230 \le k \le 270) \approx \Phi(1.98) - \Phi(-1.19) =$$
$$= \Phi(1.98) + \Phi(1.19) = 0.859.$$

в) $k \ge 270$. Найти $P_{700}(270 \le k \le 700)$.

$$P_{700}(270 \le k \le 700) = \Phi(36.1) - \Phi(1.98) = 0.0238..$$

Пример 49. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0.4. Найти вероятность того, что при 4 выстрелах мишень будет поражена: а) 3 раза; б) не менее 3 раз; в) хотя бы один раз.

Решение. По условию n=4; p=0.4; q=0.6.

а) $p_4(3) = C_4^3 0.4^3 0.6^1 = 4 \times 0.64 \times 0.6 = 0.1536.$

б) $p_4(k \ge 3) = p_4(3) + p_4(4) = 0.1536 + 0.4^4 = 0.1729$.

в) $p_4(k \ge 1) = 1 - p_4(k < 1) = 1 - p_4(0) =$
$= 1 - C_4^0 \times 0.4^0 \times 0.6^4 = 0.9424.$.

Пример 50. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью 0,005. Найти вероятность того, что среди 200 соединений произойдет: а) одно неправильное соединение; б) меньше 3 неправильных соединений; в) больше 2 неправильных соединений.

Решение. Вероятность рассматриваемого события мала, поэтому воспользуемся формулой Пуассона. По условию n=200, λ=np=200*0.05.

а) k=1, Найти: $P_{200}(1)$.

По формуле Пуассона:

$P_{200}(1) = e^{-1} = 0.3679.$

б) k<3. Найти: P_{200} ($0 \le k < 3$).

$P_{200}(0 \le k < 3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) = e^{-1}(1+1+0{,}5) = 0{,}9197$.
в) $k>2$. Найти: $P_{200}(k>2)$.
Эту задачу проще решить, если перейти к противоположным событиям.
$P_{200}(k>2) = 1 - P_{200}(k \le 2) = 1 - (P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2)) =$
$= 1 - P_{200}(k<3) = 1 - 0{,}9197 = 0{,}0803$.

51. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех? б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

52. Устройство состоит из трех независимо работающих основных элементов. Устройство отказывает, если откажет хотя бы один элемент. Вероятность отказа каждого элемента за время t равна 0,1. Найти вероятность безотказной работы устройства за время t если:
а) работают только основные элементы;
б) включен один резервный элемент;
в) включены два резервных элемента.
Предполагается, что резервные элементы работают в том же режиме, что и основные, вероятность отказа каждого резервного элемента также равна 0,1 и устройство отказывает, если работает менее трех элементов.

53. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей: а) два мальчика; б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков; г) не менее двух и не более трех мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

54. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

55. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не менее 1470 раз; в) не более 1469 раз.

56. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз?

57. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно 4 бракованных.

58. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) менее двух; в) более двух; г) хотя бы одну.

59. Изготовитель радиоэлектронного оборудования закупает 1000 интегральных микросхем, каждая из которых с вероятностью 0,01 может оказаться неисправной. Какова вероятность того, что

а) неисправны будут ровно 10 микросхем?

б) все микросхемы окажутся исправными?

в) из всех микросхем неисправна будет лишь одна?

§5. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины Числовые характеристики дискретных случайных величин

Законом распределения дискретной случайной величины называют перечень её возможных значений и соответствующих им вероятностей. Он может быть в виде таблицы, называемой рядом распределения, первая строка которой содержит возможные значения xi, а вторая- вероятность Pi их появления:

x_i	x_1	x_2........	x_n
P_i	P_1	P_2........	P_n

где $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1.$

Если множество возможных значений X бесконечно (счётно), то ряд $p_1+p_2+\ldots p_n+\ldots$ сходится и его сумма равна 1.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех её возможных значений на вероятности их появления:

$$m_x = M(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i p_i$$

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1) M(C)=C;

2) M(CX)=CM(X);

3) $M(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i)$

4) Для взаимно независимых случайных величин:

$M(X_1X_2\ldots X_n)= M(X_1)\ M(X_2)\ M(X_3)\ldots M(X_n).$

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания: $Д[X]=M[X-M(X)]^2$.

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1) $Д(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$;
2) Д(C)=0;
3) $Д(CX)=C^2\ Д(X)$, где C- постоянная величина.

Для независимых случайных величин:

$$Д(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Д(X_i).$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из её дисперсии:

$$\sigma(X) = \sigma_X = \sqrt{Д(X)}.$$

Пример 60. Для проведения технологических испытаний из партии в 100 радиоэлектронных блоков, среди которых имеется 10 неисправных, взяты 5 блоков. Построить ряд распределения случайного числа X бракованных блоков в выборке.

Решение. Число бракованных блоков в выборке может быть любым числом в пределах от 0 до 5, поэтому частные значения x_i случайной величины X равны: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$; $x_6 = 5$.

Общее число возможных элементарных исходов испытаний равно числу способов, которыми можно извлечь n блоков из N, т. е. равно числу сочетаний из N элементов по n: C_N^n. Среди n блоков d - бракованные. Из Q бракованных блоков можно взять d блоков dC_Q^d способами, при этом остальные n - d блоков будут годными. Выбрать же n - d годных блоков из n - Q годных можно C_{N-Q}^{n-d} способами. Следовательно, число благоприятных исходов равно $C_Q^d C_{N-Q}^{n-d}$. Искомая вероятность равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех элементарных исходов:

$$P_{d,n} = \frac{C_Q^d C_{N-Q}^{n-d}}{C_N^n}.$$

В нашем случае N = 100, $Q = 10$, $n = 5$, тогда вероятность того, что в выборке окажется d бракованных радиоэлектронных блоков (P = 0, 1, 2, 3, 4, 5), равна

$$P\{X = d\} = \frac{C_{10}^d C_{90}^{5-d}}{C_{100}^5}.$$

В результате расчетов по этой формуле с точностью до 0,001 получим
$P_1 = P\{X = 0\} = 0{,}583$; $P_2 = P\{X = 1\} = 0{,}340$; $P_3 = P\{X = 2\} = 0{,}070$; $P_4 = P\{X = 3\} = 0{,}007$; $P_5 = P\{X = 4\} = 0$, $P_6 = P\{X = 5\} = 0$.

По результатам расчета выписываем ряд распределения:

x_L	0	1	2	3	4	5
P_{dtn}	0,583	0,340	0,070	0,007	0	0

Пример 57. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

x_i	-5	2	3	4
P_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Решение. Найдем математическое ожидание и дисперсию. Все промежуточные вычисления удобно внести в таблицу:

x_i	-5	2	3	4	$\sum$
P_i	0,4	0,3	0,1	0,2	1
$x_i * P_i$	-2	0,6	0,3	0,8	-0,3
x_i^2	25	4	9	16	
$x_i^2 * P_i$	10	1,2	0,9	3,2	15,3

Тогда получаем:

$$\mathrm{M(X)} = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = -0.3,$$

$$\mathrm{M(X^2)} = \sum_{i=1}^{4} x_i{}^2 p_i = 15.3,$$

$$Д(X) = 15.3 - (-0.3)^2 = 15.21$$

$$\sigma_X = \sqrt{15.21} = 3.9$$

62. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X—числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

63. Две игральные кости одновременно бросают два раза. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X—числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

64. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Обставить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

65. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

66. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0,5$; $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0,3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что M(X)=8.

67. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1= 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: M(X) = 2,3, $M(X^2) = 5,9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

68. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины Z = 3X + 2Y, если известно, что D(X) = 5, D(Y) = 6.

69. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

а)

X	4,3	5,1	10,6.
p	0,2	0,3	0,5

б)

X	131	140	160	180.
p	0,05	0,10	0,25	0,60

70. Найти дисперсию дискретной случайной величины X—числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что M(X)=0,9.

71. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3
p	0,4	0,6

Найти начальные моменты первого, второго и третьего порядка.

§6. Функция и плотность распределения вероятностей случайной величины

Функцией распределения вероятностей (интегральной функцией распределения) случайной величины называют функцию F(x), определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т.е. F(x)=P(X<x).

Из определения следует, что эта функция принимает значения от 0 до 1, причем $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$, не может убывать, а вероятность попадания случайной величины X на интервал (a,b) вычисляется по формуле:

P(a<X<b)=F(b)-F(a).

Пример72. Количество блоков РЭА, собираемых на различных операциях на конвейерной линии за один и тот же период времени, задано законом распределения:

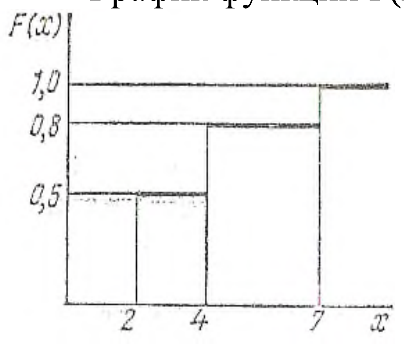
$x_£$	2	4	7
p_t	0,5	0,3	0,2

Определить интегральную функцию *F (x),* характеризующую вероятность сборки требуемого количества блоков по операциям и построить ее график.

Решение. Если $X \le 2$, то $F\ (x)\ = 0$, так как значений, меньших 2, X не принимает. Если 2<X≤4, то *F(x)=0,5* по условию примера. Если $4 < X \le 7$, F (x) = 0,8. Действительно, X может принять значение 2 с вероятностью 0,5 и значение 4 с вероятностью 0,3. Следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, X принимает (по теореме сложения вероятностей несовместимых событий) с вероятностью 0,8. Если X>7, то *F(x)* = 1, так как событие *X≤7* достоверно и вероятность его равна единице. Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2; \\ 0,5 & \text{при} \quad 2 < x \le 4; \\ 0,8 & \text{при} \quad 4 < x \le 7; \\ 1 & \text{при} \quad x > 7. \end{cases}$$

График функции F(x) приведен ниже.



Пример73. Изменение центра группирования погрешности тонкопленочного резистора на точностной диаграмме процесса напыления можно описать интегральным законом распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 2;\\ 0{,}5x-1 & \text{при} \quad 2<x\le 4;\\ 1 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что среднее значение погрешности примет значения: а) меньшее 0,2; б) меньшее 3; в) не меньшее 3; г) не меньшее 5.

Решение. Так как при $X \le 2$ функция $F(x)=0$ то $F(0,2) = 0$, т. е. $P\{X<0,2\}=0$.

$P\ \{X < 3\} = F\ (3) = (0,5 \cdot 3 - 1) = 0,5$.

Так как сумма вероятностей противоположных событий равна единице, а события $X \ge 3$ и $X < 3$ противоположны,

$P\{X\ge3\}+P\{X<3\}=1$.

Тогда, учитывая, что $P\ (X < 3) = 0,5$, получим $P\ (X \ge 3) = 1\text{-}0,5 = 0,5$, $P\ \{X \ge 5\} + P\{X < 5\} = 1$ и учитывая, что при $X>4$ $P\{x\}=1$ получим

$P\ \{X\ge5\} = 1 - P\ (X<5) = 1 - F\ (5) = 1 - 1 = 0$.

74. Случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $F\ (x) = 1/2 + (\text{arctg}\ x)/\pi$. Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале (O, 1).

75. Функция распределения непрерывной случайной величины X (времени безотказной работы некоторого устройства) равна $F(x)=l\text{-}e^{-x/T}$ $(x\ge O)$. Найти вероятность безотказной работы устройства за время $x\ge T$.

76. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\, x\le 0;\\ x^2 & \text{при}\, 0<x\le 1;\\ 1 & \text{при}\, x>1.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате четырех независимых испытаний величина X ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу (0,25, 0,75).

77. Случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $F(x)=(1/2)+(1/\pi)\text{arctg}(x/2)$. Найти возможное значение x_1, удовлетворяющее условию: с вероятностью 1/6 случайная величина X в результате испытания примет значение, большее x_1.

78. Дискретная случайная величина задана законом распределения

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти функцию распределения и построить ее график.

§7. Плотность распределения вероятностей и числовые характеристики случайной величины

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины (дифференциальной функцией распределения) называют первую производную от интегральной функции распределения: f(x)=F'(X). Из этого определения и свойств функции распределения следует, что

1. $f(x) \geq 0;$
2. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx;$
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1;$
4. $P(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называют число

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$Д(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)\,dx = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Пример 79. Плотность распределения времени T сборки РЭА на поточной линии

$$f(T) = AT^2e^{-\lambda T} \qquad (\lambda > 0, \quad 0 < T < \infty)$$

Найти коэффициент A, функцию распределения времени сборки РЭА и вероятность того, что время сборки будет находиться в пределах интервала (0,1A).

Решение. На основании свойства функции распределения случайной величины

$$F(T) = \int\limits_0^\infty f(T)dT = \int\limits_0^\infty AT^2e^{-\lambda T}dT = 1| \int\limits_0^\infty T^2e^{-\lambda T}dT.$$

Дважды интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_0^\infty T^2e^{-\lambda T}dT = \frac{2}{\lambda^3} \text{ и } \quad A = \frac{\lambda^3}{2}, \text{ тогда } f(T) = \frac{\lambda^3}{2}T^2e^{-\lambda T}.$$

Функция распределения равна

$$F(T) = \int\limits_0^{T_1} \frac{\lambda^3}{2}T^2e^{-\lambda T}dT = 1 - \frac{\lambda^2T^2 + 2\lambda T + 2}{2}e^{-\lambda T}$$

Вероятность того, что время сборки РЭА не выйдет за пределы (0; 1/λ):

$$P\{0 < T < 1/\lambda\} = \frac{\lambda^3}{2}\int_0^{\frac{1}{\lambda}} T^2 e^{-\lambda T} dT = \frac{\lambda^3}{2}\left(-\frac{T^2}{\lambda}e^{-\lambda T} - \frac{2}{\lambda^3}Te^{-\lambda T} - \frac{2}{\lambda^3}e^{-\lambda T}\right)\Big|_0^{\frac{1}{\lambda}} =$$

$$= 1 - \frac{5}{2e} \approx 0{,}086$$

Пример 80. Плотность вероятности отклонения выходного сопротивления блока РЭА от номинального значения R_0 в пределах поля допуска 2δ описывается законом

$$f(r) = \frac{1}{\pi\sqrt{R_0^2 - r^2}}.$$

Найти математическое ожидание и дисперсию отклонения сопротивления от номинального значения.

Решение.

$$M\{R\} = \int_{-\delta}^{\delta} rf(r)dr = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{rdr}{\sqrt{R_0^2 - r^2}}.$$

Поскольку подынтегральная функция нечетная и пределы интегрирования симметричны относительно начала координат, интеграл равен 0.
Следовательно, $M\{R\} = 0$.

$$\sigma^2\{R\} = \int_{-\delta}^{\delta}[r - M\{R\}]^2 f(r)dr = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{r^2dr}{\sqrt{R_0^2 - r^2}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{r^2dr}{\sqrt{R_0^2 - r^2}}.$$

Сделав подстановку $r = a \sin x$, получим

$$\sigma^2\{R\} = \frac{R_0}{\pi} arcsin\frac{R_0}{\delta} - \frac{1}{\pi}\delta\sqrt{R_0^2 - \delta^2}.$$

Пример 81. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \cos x & \text{при } 0 < x \le \pi/2; \\ 0 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти: 1. F(x); 2. M(X); 3. Д(X).

Решение. 1. Для отыскания F(x) используем формулу $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

Если $x \le 0$, то

$f(x) = 0$, а $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx = 0.$

Если $0 < x \le \pi/2$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^x \cos xdx = \sin xdx$$

Если $x > \pi/2$, то f(x)=0, а

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{x} 0dx = 1.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \sin x & \text{при } 0 < x \le \pi/2; \\ 1 & \text{при } x > \pi/2. \end{cases}$$

2. $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{\pi/2} x \cos x dx = x\sin x + x\cos x \Big|_{0}^{\pi/2} = \pi/2 - 1.$

3. $M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_{0}^{\pi/2} x^2 \cos x dx.$

Дважды интегрируя по частям получим:

$M(X^2) = \pi^2/4 - 2$, тогда $Д(X) = \pi^2/4 - 2 - (\pi/2 - 1)^2 = \pi - 3.$

82. Найти f(x), M(X), Д(X) в задачах 74, 75.

83. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0; \\ \sin x & \text{при } 0 < x \le \pi/2; \\ 0 & \text{при } x \ge \pi/2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения F(x).

84. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x) = 2C/(1 + x^2)$. Найти постоянный параметр C.

85. Случайная величина X в интервале (—3, 3) задана плотностью распределения $f(x) = 1/(\pi\sqrt{9 - x^2})$; вне этого интервала $f(x) = 0$.

а) Найти дисперсию X;

б) что вероятнее: в результате испытания окажется X<1 или X>1?

86. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2; \\ x/4 + 1/2 & \text{при } -2 < x \le 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

87. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x_0^3/x^3 & \text{при } x \ge x_0 \ (x_0 > 0); \\ 0 & \text{при } x < x_0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение X.

§8. Равномерное и показательное распределения

Равномерным называют распределение непрерывной случайной величины X, если на интервале (a,b), которому принадлежат все возможные значения X, плотность сохраняет постоянное значение, а вне этого интервала равна нулю, т.е.

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a} & при \quad a<x<b, \\ 0 & при \quad x>b. \end{cases}$$

Показательным (экспоненциальным) распределением называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & при \quad x \ge 0, \end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина. Функция распределения показательного закона

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x<0, \\ 1-e^{-\lambda x} & при \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия соответственно равны

$$M(X) = \frac{1}{\lambda};\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2};\ \sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

Пример 88. Цена деления шкалы амперметра равна 0,10A. Показания амперметра округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02A.

Решение. Ошибку округления можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале (0;0,1) между двумя целыми делениями. Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{0,1}=10 & при \quad 0<x<0,1, \\ 0 & при \quad x \le 0, x \ge 0,1. \end{cases}$$

Тогда $P(0,02 < X < 0,08) = \int\limits_{0,02}^{0,08} 10dx = 0,6$.

Пример 89. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение . Найти вероятность того, что за время длительностью t=100 часов: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Решение. а) По определению $F(t) = P(T < t)$, следовательно она определяет вероятность отказа элемента за время t, поэтому

$$P(T < 100) = 1 - e^{-0,03*100} - (1 - e^{-0,03*100}) = 1 - e^{-3} = 0,95 .$$

б) Событие «элемент не откажет» является противоположным рассмотренному, поэтому его вероятность

$P = 1 - 0,95 = 0,05$

90. Радиоэлектронный блок собирается на поточной линии, такт сборки 2 мин. Готовый блок снимается с конвейера для контроля и регулировки в произвольный момент времени в пределах такта. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение времени нахождения готового блока на конвейере. Время нахождения блока на конвейере подчиняется закону равномерного распределения случайных величин.

91. Вероятность выхода из строя РЭА за определенное время выражается формулой $\mathrm{P}\{t\} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$. Определить среднее время работы РЭА до выхода из строя.

92. Разрабатываемый спутник связи должен характеризоваться средним временем наработки на отказ 5 лет. Считая реальное время наработки на отказ случайной экспоненциально распределенной величиной, определите вероятность того, что

а) спутник проработает менее 5 лет,

б) спутник проработает не менее 10 лет,

в) спутник откажет в течение 6-го года.

93. Некий квартиросъемщик купил четыре лампочки накаливания со средним сроком службы 1000 ч. Одну из них он установил в настольную лампу, а остальные оставил про запас, на случай, если лампа перегорит. Определите:

а) ожидаемую суммарную продолжительность службы четырех ламп,

б) вероятность того, что четыре лампы в сумме проработают 5000 часов или более,

в) вероятность того, что общий срок службы всех ламп не превысит 2000 часов.

94. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

95. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

96. Найти математическое ожидание случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (2, 8).

97. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (2, 8).

98. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0.02t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0.05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью t=6 ч: а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один элемент откажет; г) хотя бы один элемент откажет.

§9. Нормальное распределение

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где a-математическое ожидание, σ - среднее квадратичное отклонение X. Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α,β):

$$P(\alpha\le X<\beta)=\Phi[\frac{\beta-a}{\sigma}]-\Phi[\frac{\alpha-a}{\sigma}],,$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}dz$ - функция Лапласа.

Пример 99. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X примет значение: а) в интервале (-1,2); б) меньше -1; в) больше 2; г) отличающееся от своего среднего значения по абсолютной величине не больше, чем на 1.

Решение. По условию задачи a=0, σ=2, тогда:

а) $P(-1<X<2)=\Phi(\frac{2-0}{2})-\Phi(\frac{-1-0}{2})=\Phi(1)+\Phi(+0{,}5)$
$=0{,}3413+0{,}1915=0{,}5328;$

б) $P(X<-1)=P(-\infty<X<-1)=\Phi(-0{,}5)-\Phi(-\infty)=$
$=0{,}5-0{,}1915=0{,}3085;$

в) $P(X>2)=P(2<x<\infty)=\Phi(\infty)-\Phi(1)=$
$=0{,}5-0{,}3413=0{,}1587;$

г) $P(|X-0|\le 1)=P(-1\le X\le 1)=\Phi(0{,}5)-\Phi(-0{,}5)=$
$2\Phi(0{,}5)=2\cdot 0{,}1915=0{,}3829.$

Здесь значения функции Φ(x) были найдены по таблице и учитывалось, что Φ(-x) = -Φ(x), а $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)=0{,}5$.

100. Плотность распределения ошибки выходного параметра РЭА имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Сборочные операции изменяют числовые характеристики распределения, не изменяя закона. Что больше увеличивает вероятность появления брака: систематическое смещение значения ошибки выходного параметра на *a* единиц или увеличение дисперсии ошибки на эти же *a* единиц?

101. Математическое ожидание и дисперсия случайного напряжения с нормальным распределением равны 10 В и 25 В^2 соответственно. Какова вероятность того, что измеренное значение напряжения

а) будет больше 0?

б) будет находиться в интервале от 0 до математического ожидания?

в) будет в два раза больше математического ожидания?

102. Широко распространенный метод обнаружения сигнала в присутствии шума заключается в установлении определенного порогового уровня, с которым производится сравнение результатов измерения напряжения, включающего полезный сигнал и шум. Если установленный

порог превышается, то считают, что полезный сигнал присутствует. Естественно, иногда и при отсутствии сигнала шум превосходит этот порог, и такая ситуация называется *ложной тревогой.* Желательно, чтобы вероятность ложной тревоги была ничтожно мала. В то же время необходимо, чтобы результат любого измерения, проведенного при наличии сигнала, смешанного с шумом, с большой вероятностью превосходил установленный порог. Она называется *вероятностью правильного обнаружения* и должна как можно меньше отличаться от 1. Пусть шум характеризуется нормальным распределением с нулевым математическим ожиданием и дисперсией 1$В^2$, а установленный порог равен 5 В.

а) Определите вероятность ложной тревоги.

б) Определите вероятность правильного обнаружения сигнала величиной 8 В в присутствии шума с заданными выше параметрами.

103. Математическое ожидание и среднее вадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15, 25).

104. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ = 20 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

105. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ = 20 мм и математическим ожиданием а = 0. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

106. Вывести «правило трех сигм»: вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормально распределенной случайной величины будет меньше утроенного среднего квадратического отклонения, равна 0,9973.

107. Станок-автомат изготовляет валики, причем контролируется их диаметр X. Считая, что X—нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием а=10мм и средним квадратическим отклонением σ = 0,1 мм, найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

Ответы:

4. P=1/720. **5.** P=24/91. **6.** P=0.3. **7.** P≈0.4. **8.** P(A)=0.01. P(B)=0.2, P(C)=5/144. **9.** P(A)=1/6, P(B)=5/12, P(C)=1/2, P(D)=35/36, P(E)=5/6, P(F)=11/36, P(G)=1/9. **10.** P(A)=$1-1/6^4$, P(B)=$5!/6^5$. **11.** 7/9. **12.** P(A)=1/143, P(B)=2/91, P(C)=12/143, P(D)=30/143. **13.** а) P=1/4, б) P=1/6. **14.** P(A)=0.001, P(B) ≈0.0605, P(C)=0.1, P(D) $\approx 2.1\times 10^{-5}$. **15.** P(A)=1/216, P(B)=1/6, P(C)$\approx 3.2\times 10^{-4}$, P(D) $\approx 2.5\times 10^{-5}$. **20.** P=0.14. **21.** P=0.18. **22.** а) P=0.6976, б) P=0.9572. **23.** P=57/115. **24.** P=0.126. **25.** P≈0.76. **26.** P=0.8. **27.** P=$1-(1-P)^n$. **28.** P(A)=$1-(1-P)^{mn}$, P(B)=$[1-(1-P)^n]^m$. **29.** P(A)=$(1-q_1q_2q_3)p$, P(B)=Pq_1P_2, P(C)=$PP_1P_2P_3$. **33.** а) P=1/2, б) P=1/2, в) P=2/3, г) P=1, д) P=5/6, е) P=2/3. **34.** P=0.8075. **36.** P=0.89. **37.** P=0.78. **38.** P=0.5. **39.** P=0.87. **40.** P=3/7. **41.** P=10/19. **42.** P=0.122. **43.** P≈0.903. **44.** а) 1/8, б) 1/2, в) 0.0602. **45.** а) 1/20, б) 41/50, в) 20/346. **46.** а) 4/15, б) 11/30, в) 1/5, г) 3/10. **47.** а) 7/120, б) 1/20. **51.** а) вероятнее выиграть одну партию из 2: $P_2(1)=1/2$; $P_4(2)=3/8$, б) вероятнее выиграть не менее двух партий из четырех. **52.** а) 0,729, б) 0,95, в) 0,99. **53.** а) 0,31, б) 0,48, в) 0,52, г) 0,62. **54.** $P_{100}(75)=0.0456$. **55.** а) 0,4236, б) 0,5, в) 0,5. **56.** n=100. **57.** P=0,09. **58.** а) 0,224, б) 0,1992, в) 0,5768, г) 0,95. **59.** а) 0,1268, б) $4{,}32\times 10^{-5}$, в) $4{,}36\times 10^{-4}$. 62.

x_i	0	1	2	3	4
P_i	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

65. а) 0,0613, б) 0,9197, в) 0,019, г) 0,632. **66.** $x_3=21$, $P_3=0{,}2$. **67.** $P_1=0{,}2$; $P_2=0{,}3$; $P_3=0{,}5$. **68.** D(Z)=69. **69.** а) D(X)≈8,545; $\sigma_x\approx 2{,}923$; б) D(X)≈248,95; $\sigma_x\approx 15{,}78$. **70.** D(X)=0,495. **71.** ν_1=M(X)=2,2; ν_2=M(X^2)=5,8; ν_3=M(X^3)=16,6. **74.** P=1/4. **75.** P(X≥T)=1/e. **76.** P=0,25. **77.** $x_1=2\sqrt{3}$.

83. $F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0,\\ 1-\cos x, \text{ при } 0<x\le \pi/2,\\ 1, \text{ при } x>\pi/2.\end{cases}$ **84.** C=1/2. **85.** а) D(X)=4,5; б) P(-3<X<1)=0,5+(1/π)arcsin(1/3), P(1<X<3)=0,5-(1/π)arcsin(1/3). **86.** M(X)=0, D[X]=4/3. **87.** M(X)=$3x_0/2$, Д(X)=$3x_0^2/4$, $\sigma_x=\sqrt{3}x_0/2$. **90.** M(T)=1 мин.; σ(T)=0,58 мин. **94.** а) 0,4 ; б) 0,5. **95.** 0,6. **96.** M(X)=5. 97. D(X)=3. **98.** а) 0,03; б) 0,66; в) 0,31; г) 0,34. **100.** Увеличение дисперсии. **101.** а) 0,9772; б) 0,4772; в) 0,0228. **102**. а) $0{,}2867\cdot 10^{-6}$; б) 0,9987. **103.** 0,6826. **104.** 0,383. **105.** 0,41. **107.** (9,7; 10,3).

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
Часть 1

Вариант 1.1

1) Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит трех.
2) В урне три белых и пять черных шаров. Наудачу вынимают два шара. Какова вероятность того, что эти шары разных цветов?
3) Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0.9. Найти вероятность того, что в результате двух выстрелов будет хотя бы одно попадание.
4) В тире имеется пять винтовок, вероятности попадания в цель из которых равны соответственно 0.5, 0.6, 0,7, 0,8 и 0,9. Найти вероятность попадания в цель из взятой наугад винтовки.
5) 30% изделий некоторого предприятия – продукция высшего сорта. Приобретено 4 изделия этого предприятия. Какова вероятность того, что 2 из них высшего сорта?
6) Найти вероятность того, что среди 300 изделий окажется более трех бракованных, если в среднем бракованные изделия составляют 1,5%.
7) Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0.5, для второго – 0.4. *X*– число попаданий в мишень. Требуется для дискретной случайной величины *X:* а) построить ряд распределения; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$; в) найти вероятность $P(X<M(X))$.
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ bx^2+0.5, & 0\le x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$$

Найти: а) константу b; функцию распределения F(x), в ответ ввести F(l/3); F(l/2); в) MX; г) DX; д) P(1/3 < X < 1/2).

9) Весы для тяжелых предметов считаются годными, если отклонение *X* от контрольного веса на более чувствительных весах не превышает 18 г Величина *X* – нормально распределенная и $M(X)=0$, $D(X)=10$ г. Сколько процентов пригодных весов изготавливает завод? Ответ округлить до целых.

Вариант 1.2

1) На тридцати карточках написаны числа от 11 до 40. Найти вероятность того, что сумма цифр числа на взятой наугад карточке равна 5–ти или 9–ти.
2) Студент знает 50 из 60 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает два вопроса, содержащиеся в экзаменационном билете.
3) Игральная кость бросается шесть раз. Найти вероятность того, что число

выпавших очков ни разу не повторится.

4) Из урны, содержавшей 3 белых и 7 черных шаров, один шар неизвестного цвета утерян. Найти вероятность извлечь наудачу из урны шар белого цвета.
5) Изделия некоторого предприятия содержат 5% брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу изделий окажутся два бракованных.
6) Полагая вероятность рождения мальчика равной 0.5, найти вероятность того, что среди 200 новорожденных будет: а) 100 мальчиков, б) от 90 до 110 мальчиков.
7) Из коробки, содержащей 3 синих и 4 красных карандаша, наудачу вынимают 3 карандаша. X – число красных карандашей среди вынутых. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$; в) найти вероятность $P(X<M(X))$.
8) Задана плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} a|x|, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Найти: а) константу а; б) функцию распределения $F(x)$, в ответ ввести значения $F(-1/2)$, $F(1/2)$; в) $M(X)$; г) $D(X)$; д) $P(-1/2 < X < 2)$.

9) Компоненты изготовляемого лекарства отвешиваются на весах, ошибка X которых распределена нормально, причём $M(X)= 0$, $\sigma(X)= 0.00003$ г. Норма веса лекарства 0.02 г. Определить вероятность отбракования лекарства, если максимально допустимый вес принятого к использованию лекарства 0.021г.

Вариант 3

1) В урне 2 красных, 7 зеленых , 5 синих и 10 неокрашенных шаров. Наудачу извлекается один шар. Какова вероятность того, что шар окажется окрашенным?
2) В партии из десяти изделий два бракованных. Наудачу выбирают пять изделий. Какова вероятность того, что среди них одно бракованное?
3) В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Найти вероятность того, что обе пуговицы одного цвета.
4) Имеется десять одинаковых урн, из которых в девяти находятся по 2 белых и 2 черных шара, а в одной – 5 белых и 1 черный шар. Из взятой наугад урны извлечен белый шар. Какова вероятность того, что шар извлечен из урны, содержавшей 5 белых шаров?
5) Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41–го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из пяти покупателей только одному потребуется обувь этого размера.
6) Среди семян ржи имеется 0.4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 5000 семян обнаружить 5 семян сорняков?
7) Игральная кость бросается до появления шестерки, но не более семи раз. X– число бросаний кости. Требуется для дискретной случайной величины

X: а) построить ряд распределения; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$; в) найти вероятность $P(X<M(X))$.

8) Задана плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ ax^3+b, & -1<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

Найти: а) константы a; b б) функцию распределения F(x), в ответ ввести значения F(–1/2), F(1/2); в) $M(X)$; г) $D(X)$; д) P(–1/2 < X < 0.5).

9) Изделие считается пригодным, если отклонение его размера от номинала не превышает по модулю 1.45 мм. Случайные отклонения X распределены нормально, причём $M(X)=0$, $\sigma(X)=1.5$ мм. Определить вероятность того, что случайно взятое изделие является пригодным.

Вариант 4

1) Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит пяти.
2) В урне пять пронумерованных шаров с номерами от 1 до 5. Из урны наугад один за другим вынимаются все шары. Найти вероятность того, что их номера будут идти в возрастающем порядке.
3) Стрелок ведет огонь по приближающейся цели. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0.4 и увеличивается на 0.1 для каждого последующего выстрела. Какова вероятность получить два попадания при трех выстрелах?
4) В шкафу стоят однотипные приборы, из которых 15 новых и 10 уже бывших в эксплуатации. Берутся наугад два прибора и эксплуатируются в течение некоторого времени, после чего возвращаются в шкаф. Затем вторично берутся наугад два прибора. Найти вероятность того, что оба вторично взятых прибора новые.
5) Имеется 10 партий изделий, каждая из которых содержит по 20 изделий первого сорта и 5 изделий второго сорта. Из каждой партии берут по изделию. Найти вероятность того, что взяты изделия одного сорта.
6) Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад уложенных монет число монет, расположенных «орлом» вверх, находится в пределах от 45 до 55?
7) Вероятность попадания мячом в корзину при каждом бросании равна 0,4. X– число попаданий при пяти бросках. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Задана плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}a(1-x^2), & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

Найти: а) константу a; б) функцию распределения F(x); в ответ ввести значения F(0), F(1/2); в) M(X),; г) D(X); д) P(0 < X < 0.5).

9) Случайные ошибки измерителя глубины распределены по нормальному закону. Какую среднеквадратическую ошибку должен иметь измеритель глубины, чтобы с вероятностью 0.7 ошибка измерения глубины по модулю была меньше 150 м.

Вариант 5

1) На сорока карточках написаны числа от 21 до 60. Найти вероятность того, что сумма цифр числа на взятой наугад карточке равна пяти или восьми.
2) Слово «интеграл» составлено из букв разрезной азбуки. Из этих восьми карточек наудачу извлекают четыре и складывают в ряд друг за другом в порядке появления. Какова вероятность получить при этом слово «игра»?
3) Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0.96 для первого сигнализатора и 0.98 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.
4) На складе вперемешку хранятся лампы, полученные с четырех заводов: 250 – с первого завода, 525 – со второго, 275 –с третьего и 950 – с четвертого. Вероятность того, что лампа проработает больше 1500 часов, для продукции этих заводов соответственно равна 0.15, 0.3, 0.2 и 0.1. Найти вероятность того, что взятая наугад лампа проработает больше 1500 часов.
5) Имеется пять одинаковых партий изделий. Каждая партия состоит из четырех изделий первого сорта и одного изделия второго сорта. Из каждой партии берут по изделию. Найти вероятность того, что среди выбранных изделий хотя бы три изделия первого сорта.
6) Вероятность для любого абонента позвонить на коммутатор в течение часа равна 0.02. Телефонная станция обслуживает 250 абонентов, Какова вероятность того, что в течение часа позвонят три абонента?
7) Монета подбрасывается шесть раз. X – произведение числа выпадений «орла» на число выпадений «решки». Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$P_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [2,4] \\ 0, & x \notin [2,4] \end{cases}$$

Другая случайная величина связана с ξ функциональной зависимостью $\eta = 2\xi^3 + 1$. Определить математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$ случайной величины η.

9) Средняя дальность полёта снаряда равна *m*. Предполагается, что дальность полёта *X* распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением 100 м. Найти, какой процент снарядов даёт перелёт от 120 м до150 м.

Вариант 6

1) В урне 10 белых, 15 синих и 25 красных, шаров. Найти вероятность того, что взятый наудачу шар окажется белым.
2) В урне 2 белых, 3 черных и 5 синих шаров. Наудачу извлечены три шара. Какова вероятность того, что все три шара разных цветов?
3) Деталь проходит три операции обработки. Вероятность получения брака на первой операции равна 0.02, на второй – 0.03, на третьей – 0.04. Найти вероятность получения детали без брака после трех операций.
4) На склад поступило 200 подшипников с первого завода, 460 – со второго и 340 – с третьего. Вероятность брака в продукции первого завода равна 0.03, второго – 0.02, третьего – 0.01. Взятый наугад подшипник оказался бракованным. Найти вероятность того, что он изготовлен на первом заводе.
5) Вероятность изготовления годной детали равна 0.7, а вероятность того, что годная деталь первого сорта равна 0.3. Наудачу взято 5 деталей. Найти вероятность того, что среди них ровно три детали первого сорта.
6) Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий выбраковано будет не более чем 17 изделий?
7) В партии из десяти деталей имеется 8 стандартных. Наугад взято 4 детали. X – число стандартных деталей среди взятых деталей. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$P_{\xi}(x)=\begin{cases}(b\cdot x^2-a), & x\in[2,4]\\ 0, & x\notin[2,4]\end{cases}$$

Найти *a, b*. Другая случайная величина связана с ξ функциональной зависимостью $\eta=2\xi+1$. Определить математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$ случайной величины η.

9) Завод изготавливает бруски. Номинальный размер (длина) бруска *d* = 15 мм. Фактический диаметр – случайная величина с математическим ожиданием 15.5 мм и среднеквадратическим отклонением 0.3 мм. При контроле бракуются все бруски, диаметр которых отличается от номинала более, чем на 0.1 мм. Определить процент брака.

Вариант 7

1) Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит семи.
2) В партии из 50 изделий 6 бракованных. Из партии выбираются наудачу 5 изделий. Определить вероятность того, что среди этих пяти изделий два бракованных.
3) В партии 20 изделий, из них 7 нестандартных. Наудачу взято 5 изделий. Найти вероятность того, что среди выбранных изделий хотя бы два нестандартных.

4) Среди двадцати пяти экзаменационных билетов пять «хороших». Найти вероятности того, что: а) первый студент взял «хороший» билет; б) второй студент взял «хороший» билет.
5) Найти вероятность того, что при десяти бросаниях монеты «орел» выпадет пять раз.
6) В магазин отправлено 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка будет разбита, равна 0.003. Найти вероятность того, что магазин получит хотя бы одну разбитую бутылку.
7) В ящике лежат пять изделий, из которых одно бракованное. Из ящика извлекают изделия одно за другим до тех пор, пока не будет вынуто бракованное изделие. X – число вынутых изделий. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Задана плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ ax^2, & -1 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Найти: а) константу *a*; б) функцию распределения F(x), в ответ ввести значения F(–1/3), F(1/3); в) M(X), г) D(X); д) P(–1/2 < X < 0.5).

9) Случайная величина *X* – отклонение размера изделия от нормы – нормально распределенная, причём M(X)= 0. Найти σ(X), если известно, что P(– 1<*X*<1) = 0.3.

Вариант 8

1) Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число кратно 5?
2) Слово «математика» составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу извлекают отсюда три буквы и располагают друг за другом в порядке извлечения. Какова вероятность того, что при этом получится слово «мак»?
3) Из колоды, содержащей 36 карт, вынимают наудачу четыре карты. Найти вероятность того, что среди взятых карт есть хотя бы один туз.
4) Имеется три урны. Первая содержит 2 белых и 3 черных шара, вторая – 4 белых и 1 черный, третья – 3 белых шара. Наугад берется урна и из нее извлекается шар. Найти вероятность того, что извлечен белый шар.
5) Сделано 14 выстрелов по цели. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.2. Найти вероятность того, что произошло три попадания в цель.
6) Вероятность появления события A в каждом из 1500 испытаний равна 0.4. Найти вероятность того, что число появлений события A заключено между: а) 570 и 630, б) 600 и 660.
7) Игральную кость бросают пять раз. X – число выпадений шести очков. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность

P(X<M(X)).

8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ b\cdot x^2+0.5, & 0\le x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

Найти: а) константу *b*; функцию распределения F(x), в ответ ввести F(l/3); F(l/2); в) M(X); г) D(X); д) P(0.3 < x < 0.9).

9) Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение *X* её контролируемого размера от номинала не превышает 18 мм. Величина *X* распределена нормально, причём σ(X)=9 мм. Найти вероятность того, что деталь будет признана годной.

Вариант 9

1) Все буквы русского алфавита написаны на 33–х карточках. Наудачу извлекается одна карточка. Найти вероятность того, что на этой карточке написана гласная буква.
2) В урне 6 белых и 4 черных шара. Из урны наудачу извлечены 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них 2 белых и 3 черных.
3) Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа станок потребует внимания рабочего, для первого станка равна 0.9, для второго – 0.8. для третьего – 0.7. Найти вероятность того, что в течение часа по крайней мере один из станков потребует внимания рабочего.
4) В первой урне – 1 белый и 2 черных шара, во второй – 3 белых и 3 черных шара. Из второй урны наугад переложили в первую один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар находился ранее во второй урне, если известно, что он белый.
5) Партия изделий содержит 5% брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наудачу изделий: а) нет ни одного бракованного, б) два бракованных изделия.
6) Вероятность производства бракованной детали равна 0.008. Какова вероятность наиболее вероятного числа бракованных деталей среди наудачу отобранных тысячи деталей?
7) Игральную кость бросают дважды. X– абсолютная величина разности выпавших очков. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$P_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+a, & x\in[2,4]\\ 0, & x\notin[2,4]\end{cases}$$

Найти a. Другая случайная величина связана с ξ функциональной зависимостью $\eta = 2\xi^3 + 1$. Определить математическое ожидание $M\eta$ и дисперсию $D\eta$ случайной величины η.

9) Средняя дальность полёта пули равна $2m$. Предполагается, что дальность полёта X распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением 90 м. Найти, какой процент снарядов даёт перелёт от 100 м до 110 м.

Вариант 10

1) Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит девяти.
2) При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наугад, зная, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.
3) Имеется две одинаковых партии изделий, содержащих по семи изделий первого сорта и по одному изделию второго сорта. Из каждой партии берут по четыре изделия. Найти вероятность того, что состав партий останется одинаковым.
4) В группе из десяти студентов, пришедших на экзамен, три студента подготовлены отлично, четыре – хорошо, два – посредственно и один – плохо. Отлично подготовленный студент знает все 20 вопросов экзаменационных билетов, хорошо подготовленный – 16, посредственно подготовленный – 10, плохо подготовленный – 5. Вызванный наугад студент ответил на все три вопроса билета. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен отлично.
5) Имеется 7 одинаковых партий изделий. Каждая партия состоит из пяти изделий первого сорта и трех изделий второго сорта. Из каждой партии берут наудачу по одному изделию. Найти вероятность того, что взято не более одного изделия второго сорта.
6) Опыт состоит в бросании монеты 4040 раз (опыт Бюффона), «орел» выпал 2048 раз. Найти вероятность того, что при повторении опыта Бюффона относительная частота появления «орла» отклонится от 0.5 не более чем в опыте Бюффона.
7) Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Охотник стреляет до первого попадания, но успевает сделать не более пяти выстрелов. X – число произведенных выстрелов. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ ax^2 + 0.5, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти: а) константу a; функцию распределения F(x), в ответ ввести F(1.3); F(0.5); в) MX; г) DX; д) P(0.3 < X < 0.8).

9) Производится стрельба по цели, имеющей вид полосы шириной 25 м. Прицеливание производится по средней линии полосы. Среднеквадратическое отклонение точки попадания от середины полосы равно 16 м. Найти вероятность попадания в полосу при одном выстреле.

Вариант 11

1) Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что 20 нацело делится на это число ?
2) Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д наудачу выбирают три. Какова вероятность того, что из этих трех карточек можно составить слово «ДВА»?
3) Партия состоит из четырех изделий первого сорта и шести изделий второго сорта. Наудачу взято три изделия. Какова вероятность того, что ровно два из них одного сорта?
4) В урне лежит один шар неизвестного цвета – с равной вероятностью белый или черный. В урну опускается белый шар и затем наудачу извлекается один шар, оказавшийся белым. Какова вероятность того, что в урне остался белый шар?
5) Имеется пять одинаковых партий изделий. Каждая партия состоит из двух изделий первого сорта и трех изделий второго сорта. Из каждой партии берут по изделию. Найти вероятность того, что среди взятых изделий есть хотя бы одно изделие первого сорта.
6) Книга издана тиражом 10 тысяч экземпляров. Вероятность того, что экземпляр книги сброшюрован неправильно, равна 0.0001. Найти вероятность того, что тираж содержит 5 бракованных книг.
7) В этой задаче требуется для дискретной случайной величины X – сумма очков, выпавших при двух бросаниях игральной кости: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ bx^2+0.5, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Найти: а) константу b; функцию распределения F(x), в ответ ввести F(l/3); F(l/2); в) MX; г) DX; д) P(1/3 < X < 1/2).

9) Завод изготавливает весы. Весы считаются годными, если отклонение X от контрольного веса на более чувствительных весах не превышает 0.18 г. Величина X – нормально распределенная и M(X)=0, D(X)=0.10 г. Сколько процентов пригодных весов изготавливает завод?

Вариант 12

1) Подброшены две монеты. Какова вероятность того, что на обеих монетах

выпадет «орёл»?

2) В классе 10 мальчиков и 20 девочек. Наугад отобраны трое учащихся. Какова вероятность того, что среди них две девочки и один мальчик?
3) Из двух орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания из первого орудия равна 0.85, из второго – 0.91. Найти вероятность поражения цели, если для ее поражения достаточно одного попадания.
4) Из пяти стрелков двое попадают в цель с вероятностью 0.6, а остальные – с вероятностью 0.4. Наугад выбран стрелок. Определить, какое из двух событий вероятнее: A={выбранный стрелок попал в цель}, B={выбранный стрелок промахнулся}.
5) Всхожесть семян данного сорта равна 80%. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут не менее четырех.
6) Вероятность появления события в каждом из 625 испытаний равна 0.8. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не более чем на 0.04.
7) Имеется семь заготовок для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из каждой заготовки равна 0.8. X – число заготовок, оставшихся после изготовления первой годной детали. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M\left(X\right)$ и дисперсию $D\left(X\right)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P($\alpha < X < \beta$). Исходные данные: a=1.5; b=3.0; α=2.0; β=2.5.

9) Компоненты изготовляемого лекарства отвешиваются на весах, ошибка X которых распределена нормально, причём $M(X)=0$, $\sigma(X)=0.003$ г. Норма веса лекарства 0.02 г., максимально допустимый вес принятого к использованию лекарства 0.021 г. Определить вероятность брака.

Вариант 13

1) Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков не превосходит трёх.
2) Слово «интеграл» составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу извлекают отсюда три буквы и располагают друг за другом в порядке извлечения. Какова вероятность получить слово «тир»?
3) В урне 5 белых и 7 черных шаров. Наудачу вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что оба шара одного цвета.
4) В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника равна 0.9,

для велосипедиста – 0.8, для бегуна – 0.75. Найти вероятность того, что выбранный наугад спортсмен выполнит норму.
5) Изделия некоторого предприятия содержат 6% брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад изделий не более одного бракованного.
6) Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.001. Найти вероятность хотя бы одного попадания, если число выстрелов равно 5000.
7) По мишени производится четыре выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле равной 0.85. X – число попаданий в мишень. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$; в) найти вероятность $P(X<M(X))$.
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M\left(X\right)$ и дисперсию $D\left(X\right)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P($\alpha < X < \beta$). Исходные данные: a=2.5; b=4.0; α=3.0; β=3.5.

9) Изделие успешно проходит контроль, если отклонение его размера от номинала не превышает по модулю 1.3 мм. Случайные отклонения X распределены нормально, причём $M(X)=0$, $\sigma(X)=1.1$ мм. Определить вероятность того, что случайно взятое изделие успешно пройдет контроль.

Вариант 14

1) Наудачу выбрана кость домино из полного набора (28 шт.). Какова вероятность того, что сумма очков на ней равна пяти?
2) В урне 43 белых и 21 черный шар. Наудачу извлечены 9 шаров. Какова вероятность того, что среди них 5 белых и 4 черных.
3) В урне 20 шаров, из них 5 черных. Наудачу взято 3 шара. Найти вероятность того, что среди них есть хотя бы один черный.
4) По самолету производится три выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.5. при втором – 0.6, при третьем – 0.8. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0.3, при двух попаданиях – с вероятностью 0.6. при трех попаданиях – с вероятностью 1. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет выведен из строя.
5) Что вероятнее: выиграть у равносильного противника две партии из четырех или четыре из восьми? Ничейные исходы не учитываются.
6) Опыт состоит в бросании игральной кости 600 раз. Найти вероятность того, что относительная частота выпадения шестерки отклонится от вероятности выпадения шестерки в одном бросании менее чем на 0.02.
7) На пути движения автомобиля имеется четыре светофора, каждый из которых разрешает или запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0.5. X – число светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).

8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P(α <X<β). Исходные данные: a=1.5; b=2.5; α=2.0; β=2.5.

9) Случайные ошибки измерителя глубины распределены по нормальному закону. Какую среднеквадратическую ошибку должен иметь измеритель глубины, чтобы с вероятностью 0.3 ошибка измерения глубины по модулю была меньше 130 м.

Вариант 15

1) Подброшены две монеты. Какова вероятность того, что хотя бы на одной монете выпадет «орёл»?
2) Слово «математика» составлено из букв разрезной азбуки. Наудачу извлекают отсюда три буквы и располагают друг за другом в порядке извлечения. Какова вероятность того, что при этом получится слово «кит»?
3) Партия содержит 8 изделий первого сорта и 32 изделия второго сорта. Наудачу взято 5 изделий. Найти вероятность того, что среди них ровно 4 изделия одного сорта.
4) Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания для первого охотника равна 0.2, а для второго – 0.6. Произошло только одно попадание. Найти вероятность того, что промахнулся первый охотник.
5) Для прядения смешаны поровну белый и окрашенный хлопок. Какова вероятность среди пяти случайно выбранных волокон смеси обнаружить менее двух окрашенных?
6) Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения в пути для каждого изделия равна 0.0002. Найти вероятность того, что будет повреждено не более трех изделий.
7) Монету подбрасывают шесть раз. X – отношение числа появлений «орла» к числу появлений «решки». Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M\left(X\right)$ и дисперсию $D\left(X\right)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P($\alpha < X < \beta$). Исходные данные: a=1.0; b=3.5; α=2.0; β=2.5.

9) Средняя дальность полёта снаряда равна m. Предполагается, что дальность полёта X распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением 30 м. Найти, какой процент снарядов даёт перелёт от 65 м до100 м.

Вариант 16

1) Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков не превосходит пяти.
2) На один ряд, состоящий из семи мест, случайным образом рассаживаются семь учеников. Найти вероятность того, что три определенных ученика окажутся рядом.
3) В урне 20 шаров, из них 3 черных. Наудачу взято 5 шаров. Найти вероятность того, что среди взятых шаров не более одного черного.
4) На сборку поступают детали с трех станков. Известно, что первый станок дает 0.3% брака, второй – 0.2%, третий – 0.4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого станка поступило 1000, со второго – 2000 и с третьего – 2500 деталей.
5) Что вероятнее, выиграть у равносильного противника две партии из четырех или четыре из восьми? Ничейные исходы не учитываются.
6) Вероятность появления некоторого события при одном испытании равна 0.4. Найти вероятность того, что при 1000 испытаний относительная частота этого события отклонится от вероятности не более чем на 0.05.
7) Два стрелка стреляют по одной мишени, делая по два выстрела. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0.5, для второго – 0.6. X – общее число попаданий в мишень. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases} a, & x\in[\gamma,b] \\ 0, & x\notin[\gamma,b] \end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M\left(X\right)$ и дисперсию $D\left(X\right)$ случайной величины X, функцию распределения $F(x)$ и вероятность P($\alpha < X < \beta$). Исходные данные: a=1.0; b=3.5; α=2.5; β=3.0.

9) Завод изготавливает бруски. Номинальный размер (длина) бруска d =10 мм. Фактический диаметр – случайная величина с математическим ожиданием 12.5 мм и среднеквадратическим отклонением 0.26 мм. При контроле бракуются все бруски, диаметр которых отличается от номинала более, чем на 0.01 мм. Определить процент брака.

Вариант 17

1) Экзаменационные работы зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что номер наугад взятой работы кратен 10 или 11?
2) Найти вероятность того, что все четыре туза в хорошо перетасованной колоде из 36–и карт окажутся вместе.
3) Три стрелка одновременно стреляют в одну мишень. Найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина, если вероятности попадания в мишень для каждого из стрелков соответственно равны 0.9, 0.8 и 0.7.
4) Изделия определенного вида изготавливаются на трех поточных линиях. Первая линия производит 20% изделий, вторая – 30%, третья – 50%. Каждая линия характеризуется соответственно следующими показателями выхода годных изделий: 95%, 98% и 97%. Найти вероятность того, что взятое наугад и оказавшееся бракованным изделие изготовлено на первой линии.
5) Сделано 14 выстрелов по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.2. Найти наивероятнейшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.
6) Сколько нужно провести опытов с бросанием монеты, чтобы с вероятностью 0.92 можно было ожидать, что относительная частота выпадения «орла» отклонится от вероятности 0.5 менее чем на 0.01 ?
7) Приобретено пять лотерейных билетов. Вероятность выигрыша по одному билету равна 0,05. X – число выигравших билетов. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases} a, & x\in[\gamma,b] \\ 0, & x\notin[\gamma,b] \end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P($\alpha < X < \beta$). Исходные данные: a=1.0; b=2.8; α=2.1; β=2.5.

9) Случайная величина X – отклонение концентрации раствора от нормы – нормально распределенная, причём $M(X)$=0. Найти $\sigma(X)$, если известно, что $P(-0.01<X<0.01)=0.3$.

Вариант 18

1) Подброшены две монеты. Какова вероятность того, что только на одной монете выпадет «орёл»?
2) Десять человек случайным образом рассаживаются за круглым столом. Какова вероятность того, что два определенных лица окажутся сидящими рядом?
3) Имеется две партии изделий. Каждая партия состоит из пяти изделий первого сорта и трех – второго сорта. Из каждой партии наугад берут по два

изделия. Найти вероятность того, что состав партий останется одинаковым.

4) В ящик, содержащий три одинаковых детали, брошена одна стандартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равновероятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находившихся в ящике.
5) Производится четыре независимых выстрела по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.5. Для разрушения цели достаточно хотя бы одного попадания. Найти вероятность того, что цель будет разрушена.
6) Вероятность получения положительного результата в каждом из опытов равна 0.9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0.98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?
7) Охотник имеет четыре патрона и стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.25. X– число израсходованных патронов. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases} a, & x\in[\gamma,b] \\ 0, & x\notin[\gamma,b] \end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M\left(X\right)$ и дисперсию $D\left(X\right)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P(α<X<β). Исходные данные: a=1.0; b=2.0; α=1.2; β=1.8.

9) Деталь, взятая с конвейера, считается годной, если отклонение *X* её контролируемого размера от номинала не превышает 0.15мм. Величина *X* распределена нормально, причём *σ(X)*=0.9мм. Найти вероятность того, что деталь не будет признана браком.

Вариант 19

1) Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков не превосходит семи.
2) В партии 20 изделий, из них 7 нестандартных. Наудачу взято 5 изделий. Найти вероятность того, что среди выбранных изделий 2 нестандартных.
3) В партии десять изделий, из которых три нестандартных. Наудачу взято пять изделий. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одно нестандартное.
4) Вероятность того, что изделие некоторого предприятия удовлетворяет стандарту, равна 0.95. Упрощенная схема проверки качества дает положительный результат с вероятностью 0.98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, и с вероятностью 0.05 для изделий, не удовлетворяющих стандарту. Найти вероятность того, что изделие,

признанное стандартным, действительно стандартное.

5) Производится восемь независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна 0.1. Найти вероятность того, что событие A появится в этих испытаниях хотя бы один раз.
6) Вероятность успеха в каждом из 400 испытаний равна 0.8. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0.9876 абсолютная величина отклонения относительной частоты успеха от его вероятности не превышала ε.
7) Игральную кость бросают до двух подряд появлений шестерки, но не более шести раз. X– число бросаний. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases} a, & x\in[\gamma,b] \\ 0, & x\notin[\gamma,b] \end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M\left(X\right)$ и дисперсию $D\left(X\right)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P(α<X<β). Исходные данные: a=0.5; b=1.0; α=–0.5; β=0.5.

9) Средняя дальность полёта пули равна m. Предполагается, что дальность полёта X распределена по нормальному закону со средним квадратичным отклонением 50м. Найти, какой процент снарядов даёт перелёт от 150 м до 200 м.

Вариант 20

1) Наудачу выбирается целое число от 1 до 30 включительно. Какова вероятность того, что оно является делителем числа 30?
2) Из десяти лотерейных билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов находятся оба выигрышных.
3) Стрелок стреляет три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0.8. при втором – 0.7, при третьем – 0.6. Какова вероятность того, что будет только одно попадание?
4) Имеется шесть одинаковых урн. В пяти урнах находится по 2 белых и 2 черных шара, а в одной – 5 белых и 1 черный шар. Из взятой наугад урны извлечен шар, оказавшийся белым. Найти вероятность того, что шар взят из урны, содержавшей 5 белых шаров.
5) Производится четыре независимых выстрела по цели. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0.5. Для разрушения цели достаточно хотя бы одного попадания. Найти вероятность того, что цель будет разрушена
6) Вероятность появления события A в каждом испытании равна 0.8. Сколько нужно провести испытаний, чтобы с вероятностью 0.9 можно было ожидать, что событие A появится не менее чем 75 раз?

7) Из пяти ключей к замку подходит только один. X – число неудачных попыток открыть замок. Требуется для дискретной случайной величины X: а) построить ряд распределения; б) вычислить M(X), D(X) и σ(X); в) найти вероятность P(X<M(X)).
8) Дана плотность распределения случайной величины X :

$$f(x)=\begin{cases} a, & x\in[\gamma,b] \\ 0, & x\notin[\gamma,b] \end{cases}$$

Найти: параметр γ; определить математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X, функцию распределения F(x) и вероятность P($\alpha<X<\beta$). Исходные данные: a=0.5; b=5.0; α=3.5; β=4.0.

9) Производится стрельба по цели, имеющей вид полосы шириной 65 м. Прицеливание производится по средней линии полосы. Среднеквадратическое отклонение точки попадания от середины полосы равно 18 м. Найти вероятность попадания в полосу при одном выстреле.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Часть 2

Задача 2.1. Путем опроса получены данные (n=80):

Выполнить задания:

а) получить дискретный вариационный ряд и статистическое распределение выборки;

б) построить полигон частот;

в) составить ряд распределения относительных частот;

г) составить эмпирическую функцию распределения;

д) построить график эмпирической функции распределения;

е) найти основные числовые характеристики вариационного ряда (по возможности использовать упрощающие формулы для их нахождения):

1) выборочное среднее $\overline{x}_B$;

2) выборочную дисперсию $D(X)$;

3) выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$;

4) коэффициент вариации V;

5) интерпретировать полученные результаты.

Задача 2.2*[1]*. В таблице (исходные данные для задания 2) приведены размеры диаметров головок 100 заклепок (в мм), изготовленных станком (который делает их тысячами). Все контролируемые условия, в которых работал станок, оставались неизменными. В тоже время диаметры головок раз от разу несколько изменялись. Характерная черта случайных колебаний: изменения выглядят бессистемными, хаотичными.

Выполнить задания:

1. Для выборки диаметров головок заклепок вычислить *среднее значение, медиану, дисперсию, минимальный и максимальный элементы*.
2. Для выборки диаметров шляпок заклепок построить гистограмму частот с шагом группировки h (например, 0,075мм) на интервале от X_{min} (например, 13мм) до X_{max} (например, 13,75мм) (без учета сильно выделяющегося наблюдения)
3. Используя инструмент <*Описательная статистика*> создать таблицу основных статистических характеристик и разместить ее с соответствующим заголовком справа от исходных данных. Уметь объяснить смысл каждой статистики.
4. Обработать данные с целью выдвижения гипотезы о виде распределения наблюдаемой случайной величины и ее проверки.
5. Проверить выдвинутую гипотезу. Сделать выводы.

[1] Рекомендуется выполнять в Excel или в MathCad.

Вариант 2.1

Исходные данные для задания 1 варианта 2.1

1 4 1 4 3 3 3 1 0 6	1 2 3 5 1 4 3 3 5 1	5 2 4 3 2 2 3 3 1 3
2 3 1 1 4 3 1 4 3 1	6 4 3 4 2 3 2 3 3 1	4 6 1 4 5 3 4 2 4 5
2 6 4 1 3 3 4 1 3 1	0 1 4 6 4 7 4 1 3 5	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.1

13,53	13,34	13,45	13,42	13,29	13,38	13,45	13,50
13,55	13,33	13,32	13,69	13,46	13,32	13,32	13,48
13,29	13,25	13,44	13,60	13,43	13,51	13,43	13,38
13,24	13,28	13,58	13,31	13,31	13,45	13,43	13,44
13,34	13,49	13,50	13,38	13,48	13,43	13,37	13,29
13,54	13,33	13,36	13,46	13,23	13,44	13,38	13,27
13,66	13,26	13,40	13,52	13,59	13,48	13,46	13,40
13,43	13,26	13,50	13,38	13,43	13,34	13,41	13,24
13,42	13,55	13,37	13,41	13,38	13,14	13,42	13,52
13,38	13,54	13,30	13,18	13,32	13,46	13,39	13,35
13,34	13,37	13,50	13,61	13,42	13,32	13,35	13,40
13,57	13,31	13,40	13,36	13,28	13,58	13,58	13,38
13,32	13,20	13,43	13,34				

Вариант 2.2

Исходные данные для задания 1 варианта 2.2

1 5 1 4 2 2 3 1 0 6	5 2 3 5 1 4 1 1 5 1	5 2 4 3 2 2 3 0 1 3
2 3 2 3 4 3 1 4 3 1	3 4 3 4 2 3 2 3 3 1	3 6 1 4 5 3 4 2 4 5
1 2 4 1 3 3 4 1 3 1	0 1 4 6 4 7 4 1 0 5	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.2

13,33	13,33	13,31	13,45	13,39	13,45	13,41	13,45
13,39	13,43	13,54	13,64	13,40	13,55	13,40	13,26
13,42	13,50	13,32	13,31	13,28	13,52	13,46	13,63
13,38	13,44	13,52	13,53	13,37	13,33	13,24	13,13
13,53	13,53	13,39	13,57	13,51	13,34	13,39	13,47
13,51	13,48	13,62	13,58	13,57	13,33	13,51	13,40
13,30	13,48	13,40	13,57	13,51	13,40	13,52	13,56
13,40	13,34	13,23	13,37	13,48	13,48	13,62	13,35
13,40	13,36	13,45	13,48	13,29	13,58	13,44	13,56
13,28	13,59	13,47	13,46	13,62	13,54	13,20	13,38
13,43	13,36	13,56	13,51	13,47	13,40	13,29	13,20
13,46	13,44	13,42	13,29	13,41	13,39	13,50	13,48
13,26	13,37	13,28	13,39				

Вариант 2.3

Исходные данные для задания 1 варианта 2.3

2 1 1 3 2 2 3 1 0 5	6 2 3 5 0 4 1 1 5 0	1 2 4 3 2 2 3 0 1 3
1 3 2 4 4 3 1 4 3 6	1 4 3 4 2 3 2 3 3 1	2 6 1 4 5 3 4 2 4 5
0 2 4 1 3 3 4 1 3 6	1 0 4 6 4 7 4 1 0 6	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.3

12,52	12,34	12,45	12,42	12,39	12,38	12,45	12,50
12,55	12,22	12,02	12,69	12,46	12,22	12,22	12,48
12,39	12,35	12,44	12,60	12,42	12,51	12,42	12,28
12,24	12,28	12,58	12,21	12,21	12,45	12,42	12,44
12,24	12,49	12,50	12,28	12,48	12,42	12,27	12,29
12,54	12,22	12,26	12,46	12,32	12,44	12,28	12,37
12,66	12,26	12,40	12,52	12,59	12,48	12,46	12,40
12,42	12,26	12,50	12,28	12,42	12,24	12,41	12,24
12,42	12,55	12,27	12,41	12,28	12,14	12,42	12,52
12,28	12,54	12,10	12,18	12,22	12,46	12,29	12,25
12,24	12,37	12,50	12,61	12,42	12,32	12,25	12,40
12,57	12,21	12,40	12,26	12,18	12,58	12,58	12,38
12,22	12,20	12,42	12,24				

Вариант 2.4

Исходные данные для задания 1 варианта 2.4

2 0 0 3 2 2 3 1 0 5	5 4 3 5 0 4 1 1 5 0	0 1 3 3 2 2 3 0 1 3
1 3 2 4 4 3 1 4 3 6	1 5 4 5 2 3 2 3 3 1	2 6 1 4 5 3 4 2 4 5
1 1 2 1 3 3 4 1 3 6	6 6 7 6 4 7 4 1 0 6	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.4

14,14	14,54	14,41	14,45	14,19	14,45	14,41	14,45
14,29	14,24	14,54	14,64	14,40	14,55	14,20	14,26
14,42	14,50	14,42	14,21	14,28	14,52	14,76	14,64
14,48	14,60	14,52	14,54	14,47	14,12	14,23	14,15
14,54	14,54	14,49	14,57	14,51	14,34	14,49	14,47
14,51	14,48	14,62	14,58	14,57	14,33	14,51	14,40
14,40	14,48	14,40	14,57	14,51	14,40	14,52	14,56
14,40	14,44	14,24	14,47	14,48	14,48	14,62	14,35
14,40	14,46	14,45	14,48	14,29	14,58	14,33	14,56
14,28	14,59	14,47	14,46	14,62	14,54	14,20	14,38
14,44	14,46	14,56	14,51	14,47	14,40	14,29	14,20
14,46	14,44	14,42	14,29	14,41	14,49	14,50	14,18
14,26	14,47	14,28	14,49				

Вариант 2.5

Исходные данные для задания 1 варианта 2.5

2 0 0 3 2 2 2 3 1 0 5	5 4 3 5 0 4 1 1 5 0	0 1 3 3 2 2 3 0 1 3
1 3 2 4 4 3 1 4 3 6	1 5 4 5 2 3 2 3 3 1	2 6 1 4 5 3 4 2 4 5
1 1 2 1 3 3 4 1 3 6	6 6 7 6 4 7 4 1 0 6	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.5

11,58	11,14	11,45	11,42	11,29	11,38	11,45	11,50
11,55	11,11	11,12	11,69	11,46	11,12	11,12	11,48
11,29	11,25	11,44	11,60	11,41	11,51	11,41	11,18
11,24	11,28	11,58	11,61	11,33	11,45	11,41	11,44
11,14	11,49	11,50	11,28	11,48	11,41	11,17	11,39
11,54	11,11	11,16	11,46	11,21	11,44	11,18	11,17
11,66	11,26	11,40	11,52	11,59	11,48	11,46	11,40
11,41	11,26	11,50	11,18	11,42	11,14	11,41	11,24
11,42	11,55	11,17	11,41	11,38	11,24	11,42	11,52
11,18	11,54	11,10	11,18	11,22	11,46	11,19	11,25
11,24	11,17	11,50	11,63	11,42	11,12	11,25	11,40
11,57	11,11	11,40	11,16	11,28	11,58	11,58	11,18
11,12	11,20	11,42	11,14				

Вариант 2.6

Исходные данные для задания 1 варианта 2.6

0 4 1 4 3 3 3 0 0 6	1 2 3 5 1 4 3 3 5 1	1 2 4 3 2 2 3 3 0 3
1 3 1 1 4 0 1 4 3 1	1 4 3 1 2 3 2 3 3 1	4 1 1 4 5 3 4 2 4 5
2 6 4 1 3 3 4 1 3 1	0 1 4 6 4 7 4 0 3 5	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.6

10,51	10,24	10,45	10,42	10,29	10,08	10,45	10,50
10,55	10,10	10,02	10,69	10,46	10,02	10,02	10,48
10,29	10,25	10,44	10,60	10,40	10,51	10,40	10,08
10,24	10,28	10,58	10,01	10,61	10,45	10,43	10,44
10,14	10,49	10,50	10,08	10,48	10,40	10,07	10,29
10,54	10,00	10,06	10,46	10,23	10,44	10,08	10,27
10,66	10,26	10,40	10,52	10,59	10,48	10,46	10,43
10,43	10,26	10,50	10,08	10,40	10,04	10,41	10,24
10,42	10,55	10,47	10,41	10,08	10,14	10,42	10,52
10,68	10,54	10,64	10,18	10,02	10,46	10,19	10,15
10,14	10,07	10,57	10,61	10,42	10,12	10,15	10,43
10,57	10,01	10,44	10,06	10,28	10,58	10,58	10,08
10,02	10,20	10,45	10,04				

Вариант 2.7

Исходные данные для задания 1 варианта 2.7

2 5 1 4 3 3 4 1 0 6	5 1 4 1 2 3 3 3 5 1	5 2 4 3 2 0 3 3 1 3
3 2 1 1 4 3 1 4 3 0	2 3 3 1 6 4 3 4 2 3	1 6 1 4 5 3 4 2 4 1
6 3 3 4 1 6 4 1 3 0	0 1 4 6 1 0 1 1 3 2	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.7

18,51	18,04	18,45	18,42	18,29	18,10	18,45	18,50
18,55	18,08	18,02	18,69	18,46	18,02	18,12	18,40
18,29	18,25	18,44	18,60	18,41	18,51	18,41	18,10
18,24	18,28	18,58	18,11	18,01	18,45	18,48	18,44
18,04	18,49	18,50	18,08	18,48	18,40	18,07	18,29
18,54	18,08	18,86	18,46	18,28	18,44	18,08	18,27
18,66	18,26	18,40	18,52	18,59	18,48	18,46	18,40
18,48	18,26	18,50	18,88	18,48	18,84	18,41	18,24
18,42	18,55	18,87	18,41	18,88	18,14	18,42	18,52
18,88	18,54	18,80	18,18	18,82	18,46	18,89	18,85
18,84	18,87	18,50	18,61	18,42	18,82	18,85	18,40
18,57	18,81	18,40	18,86	18,28	18,58	18,58	18,88
18,82	18,20	18,48	18,84				

Вариант 2.8

Исходные данные для задания 1 варианта 2.8

1 4 7 4 3 3 3 1 0 6	1 2 3 5 1 4 7 3 5 1	5 2 4 3 7 2 3 7 1 3
1 3 1 1 4 3 1 4 7 1	1 4 3 4 2 3 2 3 3 1	5 6 1 4 5 7 4 2 4 5
1 7 4 1 7 3 4 7 3 1	0 1 4 6 4 7 4 1 3 5	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.8

11,51	11,14	11,45	11,42	11,29	11,18	11,45	11,50
11,55	11,11	11,12	11,69	11,46	11,12	11,12	11,48
11,29	11,25	11,44	11,60	11,41	11,51	11,41	11,18
11,24	11,28	11,58	11,11	11,11	11,45	11,41	11,44
11,14	11,49	11,50	11,18	11,48	11,41	11,17	11,29
11,54	11,11	11,16	11,46	11,21	11,44	11,18	11,27
11,66	11,26	11,40	11,52	11,59	11,48	11,46	11,40
11,41	11,26	11,50	11,18	11,41	11,14	11,41	11,24
11,42	11,55	11,17	11,41	11,18	11,14	11,42	11,52
11,18	11,54	11,10	11,18	11,12	11,46	11,19	11,15
11,14	11,17	11,50	11,61	11,42	11,12	11,15	11,40
11,57	11,11	11,40	11,16	11,28	11,58	11,58	11,18
11,12	11,20	11,41	11,14				

Вариант 2.9

Исходные данные для задания 1 варианта 2.9

0 4 1 4 3 3 3 1 0 6	1 2 3 5 0 4 3 3 5 1	5 2 4 3 2 2 3 3 1 3
0 3 1 1 4 0 1 4 3 1	6 4 3 4 2 3 2 3 1 1	0 1 1 4 5 3 4 2 4 5
0 6 4 1 3 3 4 1 3 1	1 1 4 6 4 2 4 1 3 5	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.9

19,50	19,14	19,45	19,42	19,29	19,08	19,45	19,50
19,55	19,19	19,02	19,69	19,46	19,02	19,92	19,48
19,29	19,25	19,44	19,60	19,49	19,51	19,49	19,08
19,24	19,28	19,58	19,11	19,01	19,45	19,49	19,44
19,14	19,49	19,50	19,08	19,48	19,49	19,07	19,29
19,54	19,19	19,06	19,46	19,29	19,44	19,18	19,27
19,16	19,26	19,40	19,52	19,59	19,48	19,46	19,40
19,49	19,26	19,50	19,08	19,49	19,04	19,41	19,24
19,42	19,55	19,17	19,41	19,08	19,14	19,42	19,52
19,08	19,54	19,10	19,18	19,02	19,46	19,09	19,05
19,04	19,07	19,50	19,61	19,42	19,02	19,05	19,40
19,57	19,01	19,40	19,06	19,28	19,58	19,58	19,08
19,02	19,20	19,49	19,04				

Вариант 2.10

Исходные данные для задания 1 варианта 2.10

1 4 1 4 8 8 8 1 0 6	1 2 8 5 1 4 8 8 5 1	5 2 4 8 2 2 8 8 1 8
2 8 1 1 4 8 1 4 8 1	6 4 8 4 2 8 2 8 8 1	4 6 1 4 5 8 4 2 4 5
2 6 4 1 8 8 4 1 8 1	0 1 4 6 4 7 4 1 8 5	

Исходные данные для задания 2 варианта 2.10

17,57	17,74	17,45	17,42	17,29	17,78	17,45	17,50
17,55	17,77	17,72	17,69	17,46	17,72	17,72	17,48
17,29	17,25	17,44	17,60	17,47	17,51	17,47	17,78
17,24	17,28	17,58	17,71	17,71	17,45	17,47	17,44
17,74	17,49	17,50	17,78	17,48	17,47	17,77	17,29
17,54	17,77	17,76	17,46	17,27	17,44	17,78	17,27
17,66	17,26	17,40	17,52	17,59	17,48	17,46	17,40
17,47	17,26	17,50	17,78	17,47	17,74	17,41	17,24
17,42	17,55	17,77	17,41	17,78	17,14	17,42	17,52
17,78	17,54	17,70	17,18	17,72	17,46	17,79	17,75
17,74	17,77	17,50	17,61	17,42	17,72	17,75	17,40
17,57	17,71	17,40	17,76	17,28	17,58	17,58	17,78
17,72	17,20	17,47	17,74				

3.1. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 3 (ч.2)

Задача 2.1. Путем опроса получены следующие данные (n=80):

2 4 2 4 1 1 1 2 0 6	1 2 1 2 2 4 1 1 5 1	0 2 4 1 2 2 1 1 1 1
1 1 1 1 2 1 1 4 1 1	7 4 1 4 2 1 2 1 1 1	4 1 1 4 5 1 4 2 4 5
1 6 4 1 1 2 4 1 1 1	0 0 4 6 4 7 4 1 1 5	

Выполнить задания:

а) получить дискретный вариационный ряд и статистическое распределение выборки;

б) построить полигон частот;

в) составить ряд распределения относительных частот;

г) составить эмпирическую функцию распределения;

д) построить график эмпирической функции распределения;

е) найти основные числовые характеристики вариационного ряда (по возможности использовать упрощающие формулы для их нахождения):

1) выборочное среднее $\overline{x}_B$;

2) выборочную дисперсию $D(X)$;

1) выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$;

4) коэффициент вариации V;

5) интерпретировать полученные результаты.

Решение.

а) Для составления дискретного вариационного ряда отсортируем данные опроса по величине и расположим их в порядке возрастания:

0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 7 7.

Статистическое распределение выборки представлено в таблице 6.1, в которой первая строка – *варианты* (наблюдаемые значение), вторая строка – *частоты появления этих вариант*).

Таблица 6.1. Варианты и их частоты

x_i	0	1	2	1	4	5	6	7
n_i	4	11	14	24	16	4	1	2

б) Для построения полигона частот найдем относительные частоты ($w_i = n_i / n$, где $n = \sum\limits_{i=1}^{m} n_i$, где m – число различных значений признака X ($m \le n$) и в данном примере m=8), которые будем вычислять с одинаковой точностью. Полигон частот – ломаная линия, соединяющая точки с координатами $\left(x_i, w_i\right)$ (Рис. 6.1). Расчеты запишем в табл. 6.2.

Таблица 6.2. Относительные частоты и накопленные частоты

x_i	n_i	Относительные частоты w_i	Накопленные частоты
0	4	0.050	0.050
1	11	0.161	0.211
2	14	0.175	0.188
1	24	0.100	0.688
4	16	0.200	0.888
5	4	0.050	0.918
6	1	0.018	0.975
7	2	0.025	1.000
Сумма	80	1	

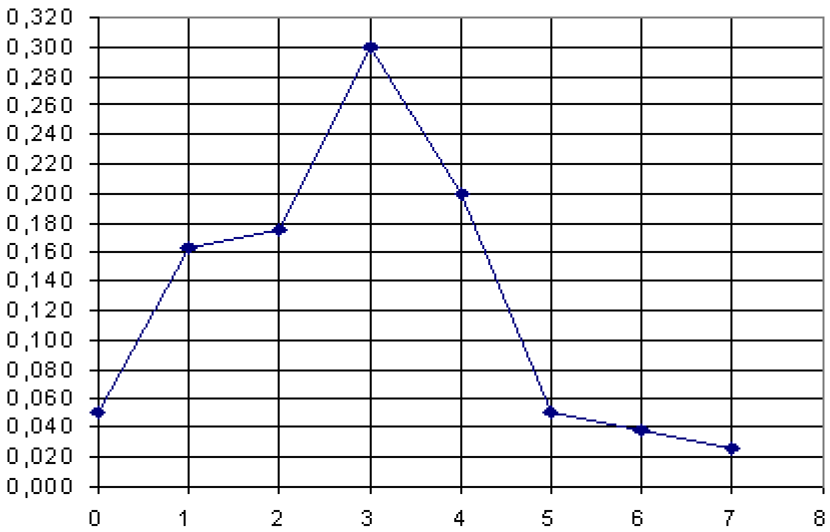


Рис. 6.1. Полигон частот вариационного ряда

в) Запишем ряд распределения (табл. 6.1) относительных частот в виде таблицы 1, в которой первая строка – варианты (изучаемый признак), вторая строка – относительные частоты (*частости*).

Таблица 6.1. Распределение относительных частот появления признака

x_i	0	1	2	1	4	5	6	7
n_i	0.05	0.161	0.175	0.1	0.2	0.05	0.018	0.025

г) Эмпирическую функцию распределения найдем, используя накопленные частоты (табл. 6.1, столбик 4) и формулу (4.1):

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0.05, & 0 < x \le 1, \\ 0.213, & 1 < x \le 2, \\ 0.388, & 2 < x \le 3, \\ 0.688, & 3 < x \le 4, \\ 0.888, & 4 < x \le 5, \\ 0.938, & 5 < x \le 6, \\ 0.975, & 6 < x \le 7, \\ 1 & x > 7. \end{cases}$$

д) Построим график эмпирической функции распределения (рис. 6.2), используя значения, полученные в пункте г).

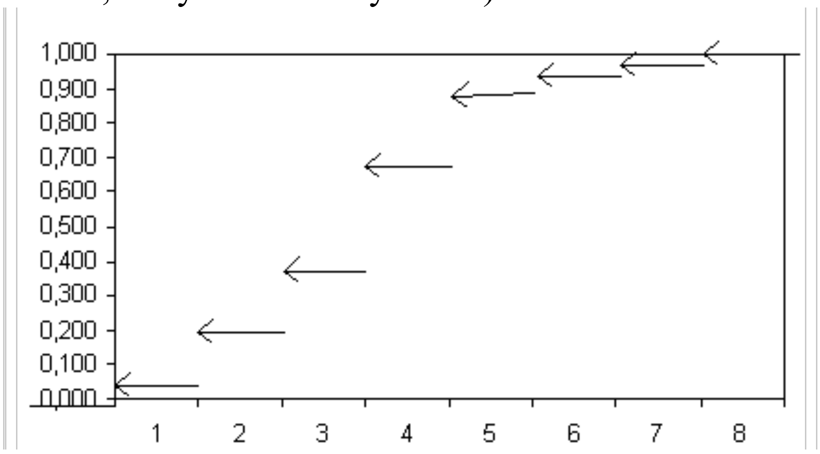


Рис. 6.2. График эмпирической функции распределения

е) Для вычисления выборочного среднего $\overline{x}_{в}$ и выборочной дисперсии $D_{в}$ с использованием приведенных выше формул, удобно составлять расчетную таблицу 6.2:

Таблица 6.2. Расчетная таблица для вычисления выборочных величин

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$\left(x_i - \overline{x}_{в}\right)^2$	$\left(x_i - \overline{x}_{в}\right)^2 \cdot n_i$
0	4	0	8.1796	12.7184
1	11	11	1.4596	44.9748
2	14	28	0.7196	10.1544
1	24	72	0.0196	0.4704
4	16	64	1.2996	20.7916
5	4	20	4.5796	18.1184
6	1	18	9.8596	29.5788
7	2	14	17.1196	14.2792
Сумма	80	229		191.488

Используя суммы, полученные в табл. 6.2, определим искомые величины.

1) Выборочную среднюю $\overline{x}_{_B} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i}{n} = \dfrac{229}{80} \approx 2.86.$

2) Выборочную дисперсию $D_{_B} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x}_{_B}\right)^2 \cdot n_i}{n} = \dfrac{191.488}{80} \approx 2.39.$

1) Выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_{_B}(X) = \sqrt{D_{_B}} = \sqrt{2.39} \approx 1.55.$

4) Коэффициент вариации $V = \dfrac{\sigma_{_B}(X)}{\overline{x}_{_B}} \cdot 100\% = \dfrac{1.55}{2.86} \cdot 100\% \approx 54.2\%.$

5) Интерпретация полученных результатов:

- величина $\overline{x}_{_B} \approx 2.86$ характеризует среднее значение признака *X*;
- среднее квадратическое отклонение $\sigma_{_B}(X)$ описывает абсолютный разброс значений показателя X относительно среднего значения и в данном случае составляет $\sigma_{_B}(X) \approx 1.55$;
- коэффициент вариации *V* характеризует относительную изменчивость показателя *X*, то есть относительный разброс вокруг его среднего значения $\overline{x}_{_B}$, и в данном случае составляет $V \approx 54.2\%$..

Ответ: $\overline{x}_{_B} \approx 2.86$; $D_{_B} \approx 2.39$; $\sigma_{_B}(X) \approx 1.55$; $V \approx 54.2\%$.

Задача 2. См. задание 2 в КР 3 (часть 2)

Алгоритм выполнения задания по проверке статистической гипотезы о виде распределения[2]

1. Определить размах выборки: R=$X_{Max} - X_{Min}$.
2. Назначить число карманов, *m*=8 (любое число от 7 до 25).
3. Найти среднее значение (*M*) и стандартное отклонение (σ).
4. Найти левые и правые границы для карманов, пронумерованных от 0 до *m*. При этом для кармана № 0 правая граница равна минимуму, для кармана № 1 правая граница равна минимальному значению плюс длина кармана, и т.д.
5. Построить гистограмму и выдвинуть гипотезу о виде распределения.
6. Найти значения предполагаемой ФР на границах карманов:

Так, для нормального распределения существует встроенная функция НОРМРАСПР(), где в качестве последнего аргумента печатаем ИСТИНА.

7. Найти теоретические вероятности попадания в карман (разность ФР по границам карманов).

[2] Рекомендуется выполнять в пакетах Excel или MathCad, здесь указаны встроенные функции Excel.

8. Найти теоретические частоты (произведение теоретических вероятностей попадания в карман на объем выборки).

9. Вычислить столбец величин:

(выборочная частота–теоретическая частота)^2 / теоретическая частота.

Сумма этих величин является значением выборочного $\chi^2_{выб}$ критерия.

10.Найти значение теоретического критерия согласия $\chi^2_{теор}$ при заданном уровне значимости (у нас 0.05) можно по формуле ХИ2ОБР (вероятность; число степеней свободы), где число степеней свободы $k=m-1-r$, например, $r=2$ для нормального распределения.

11.Сравниваем $\chi^2_{выб}$ с $\chi^2_{теор}$, делаем вывод: если $\chi^2_{выб} < \chi^2_{теор}$, то нет оснований отвергать основную гипотезу, в противном случае основная гипотеза не принимается.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2}\, dz$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997
4	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49997	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998
4,1	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49998	0,49999	0,49999
4,2	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999
4,3	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999	0,49999
4,4	0,49999	0,49999	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000	0,50000

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

(продолжение)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00007	0,00007	0,00007	0,00006	0,00006
4,2	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00004	0,00004	0,00004
4,3	0,00004	0,00004	0,00004	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003
4,4	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002
4,5	0,00002	0,00002	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,6	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,7	0,000006									
4,8	0,000004									
4,9	0,000002									
5	0,00000									

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы *k*	Уровень значимости α					
	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99
1	6.6	5.0	3.8	0.0039	0.00098	0.00016
2	9.2	7.4	6.0	0.103	0.051	0.020
3	11.3	9.4	7.8	0.352	0.216	0.115
4	133	11.1	9.5	0.711	0.484	0.297
5	151	12.8	11.1	1.15	0.831	0.554
6	16.8	14.4	12.6	1.64	1.24	0.872
7	18.5	16.0	14.1	2.17	1.69	1.24
8	20.1	17.5	15.5	2.73	2.18	1.65
9	21.7	19.0	16.9	3.33	2.70	2.09
10	23.2	20.5	18.3	3.94	3.25	2.56
11	24.7	21.9	19.7	4.57	3.82	3.05
12	26.2	23.3	21 .0	5.23	4.40	3.57
13	27.7	24.7	22.4	5.89	5.01	4.11
14	29.1	26.1	23.7	6.57	5.63	4.66
15	30.6	27.5	25.0	7.26	6.26	5.23
16	32.0	28.8	26.3	7.96	6.91	5.81
17	33.4	30.2	27.6	8.67	7.56	6.41
18	34.8	31.5	28.9	9.39	8.23	7.01
19	36.2	32.9	30.1	10.1	8.91	7.63
20	37.6	34.2	31.4	10.9	9.59	8.26
21	38.9	35.5	32.7	11.6	10.3	8.90
22	40.3	36.8	33.9	12.3	11.0	9.54
23	41.6	38.1	35.2	13.1	11.7	10.2
24	43.0	39.4	36.4	13.8	12.4	10.9
25	44.3	40.6	37.7	14.6	13.1	11.5
26	45.6	41.9	38.9	15.4	13.8	12.2
27	47.0	43.2	40.1	16.2	14.6	12.9
28	48.3	44.5	41.3	16.9	15.3	13.6
29	49.6	45.7	42.6	17.7	16.0	14.3
30	50.9	47.0	43.8	18.5	16.8	15.0

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
1	6.31	12.7	31.82	63.7	318.3	637.0
2	2.92	4.30	6.97	9.92	22.33	31.6
3	2.35	3.18	4.54	5.84	10.22	12.9
4	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	2.01	2.57	3.37	4.03	5.89	6.86
6	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.40
8	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.80	2.20	2.72	3.11	4.03	4.44
12	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.95
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.73	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.72	2.07	2.51	2.82	3.51	3.79
23	1.71	2.07	2.50	2.81	3.59	3.77
24	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.74
25	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.72
26	1.71	2.06	2.48	2.78	3.44	3.71
27	1.71	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
29	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.66	1.98	2.36	2.62	3.17	3.37
∞	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29