МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ»
(КНИТУ-КАИ)
Чистопольский филиал «Восток»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ И ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

по дисциплине

ТЕОРИЯ ИГР

Индекс по учебному плану: **Б1.В.02**
Направление подготовки: **38.03.01 Экономика**
Квалификация: **Бакалавр**
Профиль подготовки: **Экономика малого и среднего предпринимательства**
Типы задач профессиональной деятельности: **расчетно-экономический, организационно-управленческий, научно-исследовательский**

Рекомендовано УМК ЧФ КНИТУ-КАИ

Чистополь 2023

Темы практических занятий, образцы решения задач по каждой теме приведены в учебных пособиях [1-4], для подготовки к практическим занятиям можно руководствоваться учебными пособиями [5-8]. Темы и задачи для практических занятий, домашнего задания приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Практические занятия

№ п/п	№ темы	Темы практических занятий.	Трудоемкость (час.)
1	1	Теоретические основы теории игр.	2
2	2	Матричные игры.	4
3	3	Игры с седловой точкой.	2
4	4	Позиционные игры.	2
5	5	Бескоалиционные игры.	4
6	6	Кооперативные игры.	2

1. Власов Д.А. Введение в теорию игр: учебное пособие / Д.А. Власов. – Москва: ИНФРА-М, 2023. – 222 с. – Текст: электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1513124

2. Благодатских А. И. Сборник задач и упражнений по теории игр: учебное пособие / А. И. Благодатских, Н. Н. Петров. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург: Лань, 2021. – 304 с. – ISBN 978-5-8114-1665-3. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/168661

3. Мазалов В. В. Математическая теория игр и приложения: учебное пособие для вузов / В. В. Мазалов. – 4-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург: Лань, 2021 – 500 с. – ISBN 978-5-8114-5627-7. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/153917

4. Сигал А. В. Теория игр и ее экономические приложения: учебное пособие / А.В. Сигал. – Москва: ИНФРА-М, 2022. – 418 с. – Текст: электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1759767

5. Колокольцов В. Н. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации (Теория игр для всех): учебное пособие / В. Н. Колокольцов, О. А. Малафеев. – Санкт-Петербург: Лань, 2021. – 624 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/168398
6. Лемешко Б. Ю. Теория игр и исследование операций / Лемешко Б.Ю. - Новосибирск: НГТУ, 2013. – 167 с. – Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/558878
7. Сапронов И. В. Теория игр: Учебное пособие / Сапронов И.В., Уточкина Е.О., Раецкая Е.В. – Воронеж: ВГЛТУ им. Г.Ф. Морозова, 2013. – 204 с. – Текст: электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/858524
8. Невежин В. П. Теория игр. Примеры и задачи: учебное пособие / В.П. Невежин. – Москва: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2023. – 128 с. – Текст: электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1900974

Таблица 2 – Лабораторные работы

№ п/п	№ темы	Наименование лабораторных работ	Трудоемкость (час.)
1	2	Решение матричной игры (m$\times$n) среди смешанных стратегий.	4
2	3	Игры с седловой точкой. Вычисление верхней и нижней цены игры. Определение равновесной ситуации.	4
3	4	Позиционные игры.	2
4	5	Бескоалиционные игры. Решение биматричной игры (2x2).	4
5	6	Кооперативные игры.	2

<u>Лабораторная работа №1</u>

Решение матричной игры ($m \times n$) среди смешанных стратегий

Для запуска программы необходимо открыть файл Игры.exe, на экране появится форма с предложением заполнить поля количеством строк и столбцов исходной задачи:

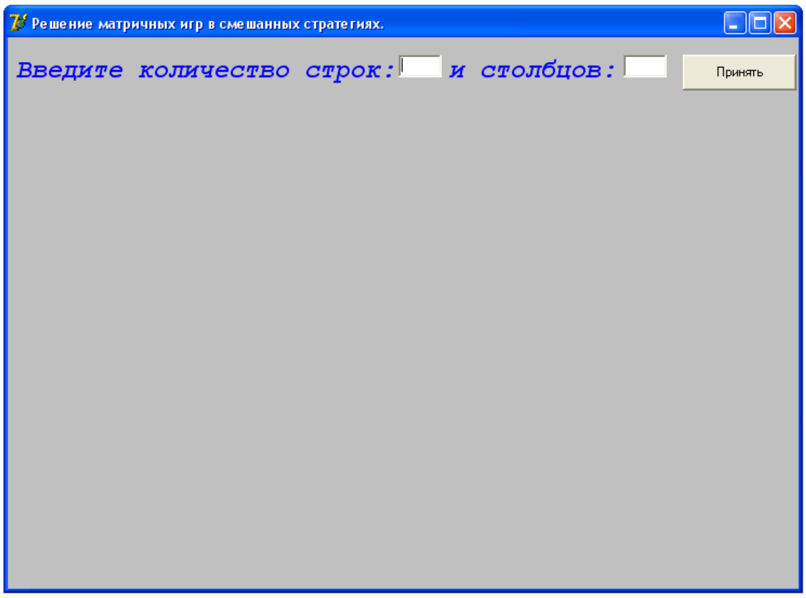


Рис. 1

Введя целые положительные числа, необходимо нажать кнопку «Принять», после чего на экране появится таблица, которую надо заполнить исходными данными поставленной задачи:

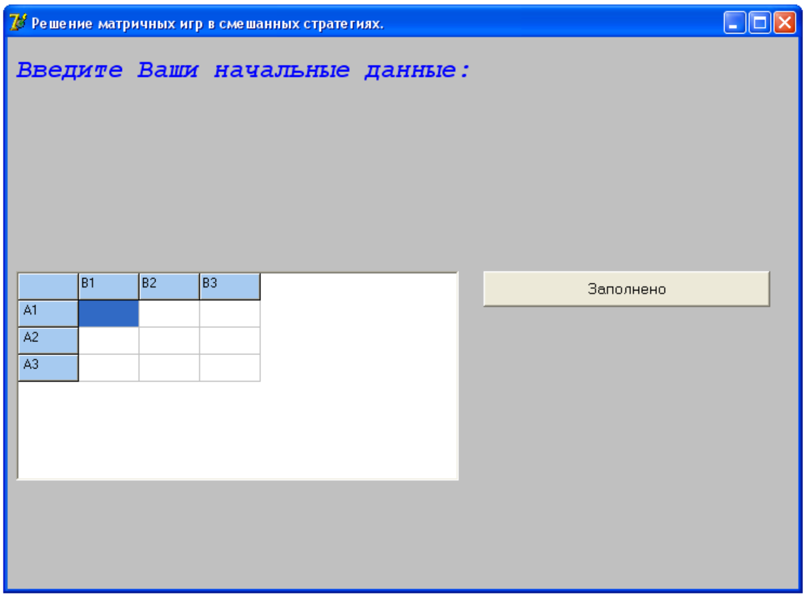


Рис. 2

В таблицу вводятся целые положительные числа и нажимается кнопка «Заполнено». Если данные введены корректно, то данные принимаются, о чем сообщается:

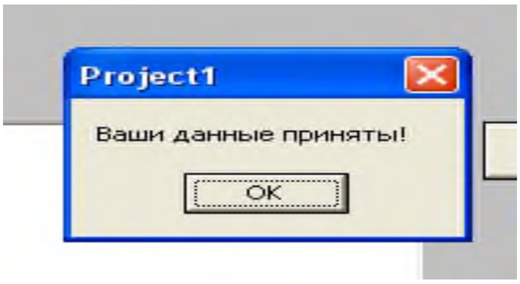


Рис. 3

Появляется кнопка «Решить задачу симплекс-методом»:

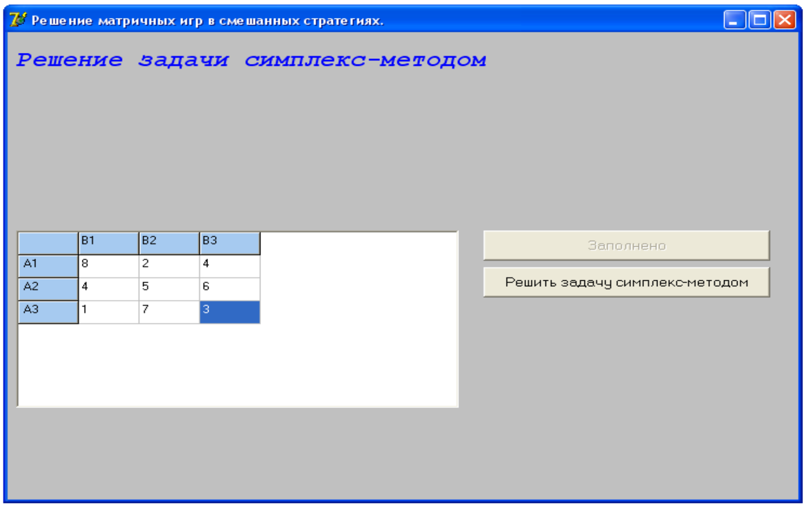
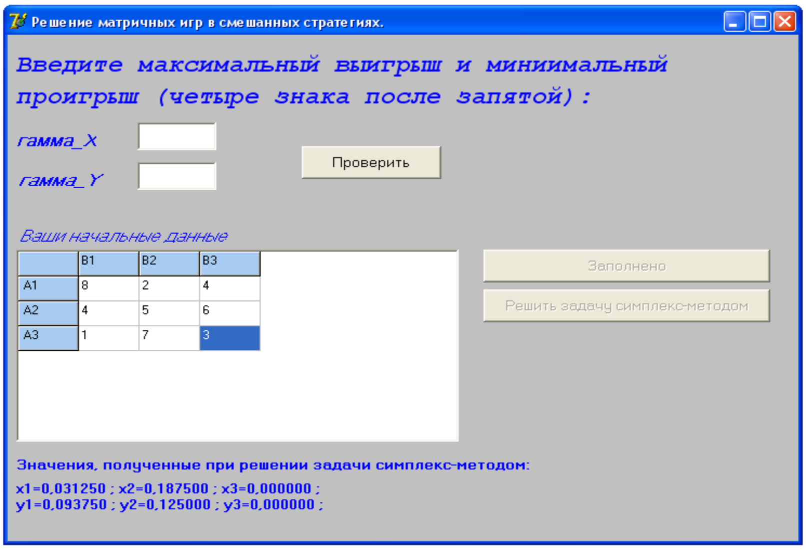


Рис. 4

После нажатия на кнопку «Решить задачу симплекс-методом»: на экран выводится решение этой задачи в случае решения ее на минимум и на максимум:

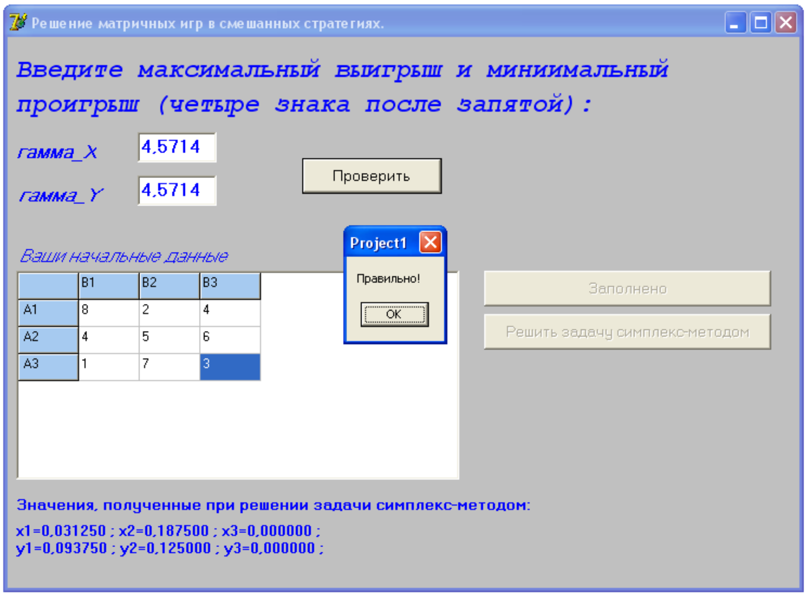


	B1	B2	B3
A1	8	2	4
A2	4	5	6
A3	1	7	3

Рис. 5

Затем необходимо вычислить и ввести в соответствующие поля минимальный проигрыш и максимальный выигрыш. Числа заносятся в поля, округленные до четвертого знака после запятой и ставится именно запятая, а не точка. Затем нажимается кнопка «Проверить».

Если значения введены правильно, то об этом сообщается:



	B1	B2	B3
A1	8	2	4
A2	4	5	6
A3	1	7	3

Рис. 6

И требуется вычислить и ввести значения вероятностей использования стратегий для обоих игроков:

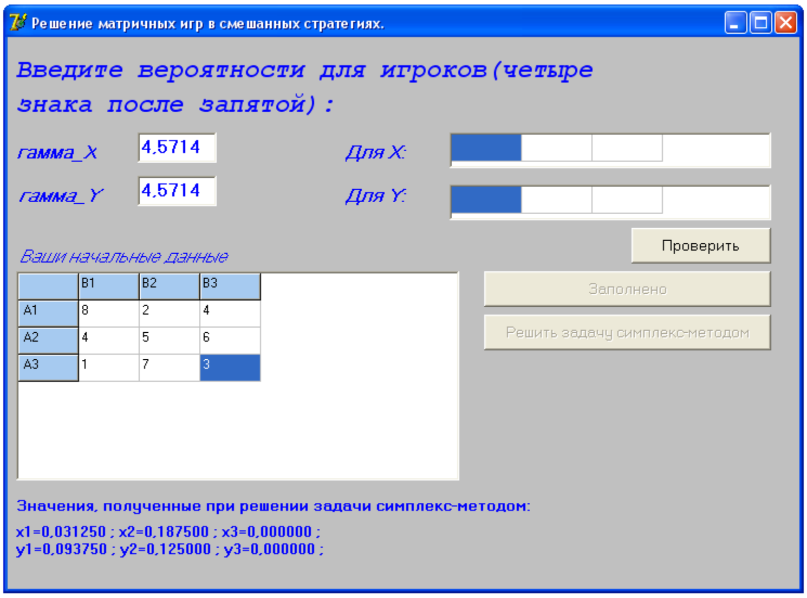


Рис. 7

Данные заполнятся тем же образом и нажимается кнопка «проверить», если введено все правильно, то сообщается, что задача решена:

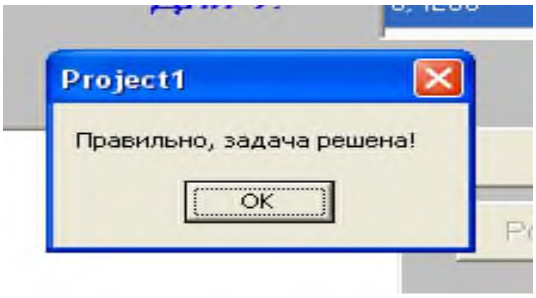


Рис. 8

И выводится количество совершенных ошибок.

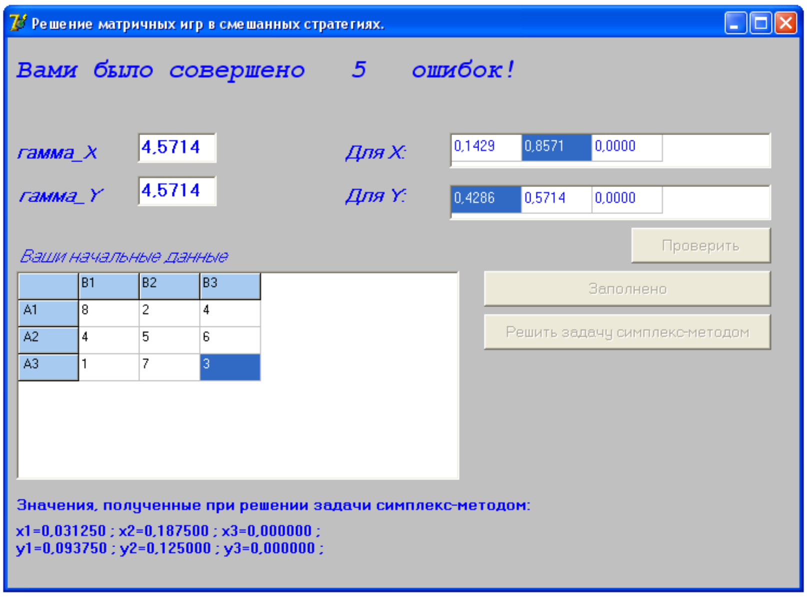


Рис. 9

Варианты заданий.

Вариант №1. *Задача о Лисе и Охотнике.*

У Лисы имеется три норы, куда она может спрятаться от Охотника -A_1, A_2, и A_3. У Охотника живут три собаки: такса, фокстерьер и спиниель. Вероятность того, что Лиса улизнет от Охотника зависит от выбранной Лисой норы, а Охотником – собаки, и отражена в таблице. Найти оптимальные стратегии поведения для Лисы и для Охотника.

	Такса	Фокстерьер	спаниель
Нора №1	0,5	0,6	0,7
Нора №2	0,4	0,7	0,5
Нора №3	0,7	0,6	0,3

Вариант №2. *Задача о Холмсе и Мориарти.*

Профессор Мориарти скрывается от Шерлока Холмса. Холмс располагает тремя видами транспорта для поимки профессора, а Мориарти - тремя транспортными средствами для

Мориарти / Холмс	Авто №1	Авто №2	Авто №3
Авто №1	5	0	4
Авто №2	2	1	0
Авто №3	0	3	5

побега. Выигрыш в скорости со стороны Холмса зависит от выбранных автомобилей и приведен в таблице. Определить оптимальный выбор транспорта для обеих сторон.

Вариант №3. *Задача о Шпионе и Разведчике.*

Разведчик выслеживает вражеского Шпиона. Для слежки Разведчик располагает подслушивающими устройствами 3-х видов. Коварный Шпион может проводить свои встречи на трех конспиративных квартирах с разной толщиной стен. Степень слышимости в условных единицах приведена в таблице. Определить оптимальный выбор устройства для Разведчика и квартиры для Шпиона.

Шпион / Разведчик	Кв. №1	Кв. №2	Кв. №3
Устр. №1	12	3	10
Устр. №2	7	9	4
Устр. №3	8	7	8

Вариант №4. *Задача о детской игре.*

В детскую игру «Ножницы, бумага, камень» играют следующим образом. Раздвинутый средний и указательный палец обозначают ножницы, раскрытая ладонь- бумагу, а кулак – камень. Оба игрока одновременно показывают друг другу один из этих символов. Ножницы побеждают бумагу (так как они ее режут), бумага побеждает камень (так как его можно обернуть бумагой), а камень побеждает ножницы (так как он может затупить ножницы). Если оба игрока показывают одно и то же, то партия считается ничейной. Выигрыш партии дает одно очко, ничья - ноль, а проигрыш – минус одно очко. Определить оптимальные стратегии для каждого игрока.

Замечание: предварительно преобразовать игру так, чтобы все элементы платежной матрицы были положительны. Для этого прибавить ко всем ее элементам положительное число.

Вариант №5. *Задача о Саше и Даше.*

У Саши есть три выходные рубашки (красная, синяя и белая), а у Даши –три нарядных платья (короткое, в цветочек и со стразами). Если Саша надевает красную рубашку, а Даша – короткое платье, внимание гостей достается им поровну. В таблице указано, насколько больше внимания достается Саше по сравнению с Дашей при различных сочетаниях их костюмов. Определить оптимальный порядок смены одежды для Саши и для Даши.

Даша / Саша	Короткое	В цветочек	Со стразами
Красная	0	3	-4
Синяя	-1	1	-2
Белая	3	0	5

<u>*Замечание:*</u> предварительно преобразовать игру так, чтобы все элементы платежной матрицы были положительны. Для этого прибавить ко всем ее элементам положительное число.

Вариант №6. <u>Задача о Студенте и Преподавателе.</u>

Студент подготовил 4 вида шпаргалок по предмету. Преподаватель во время экзамена может либо прохаживаться между рядов, либо сесть позади или впереди студентов, чтобы лучше их видеть. Вероятность засечь студента за списыванием приведена в таблице. Определить оптимальное поведение для преподавателя и вид используемой шпаргалки для студента.

Студент / Препод.	Шп. №1	Шп. №2	Шп. №3	Шп. №4
Ходит	0,1	0,9	0,5	0,7
Сидит впереди	0,3	0,1	0,6	0,4
Сидит позади	0,2	0,4	0,4	0,1

<u>Пример выполнения работы</u>

<u>*Постановка задачи.*</u> Сторона A располагает тремя видами вооружения A_1, A_2, A_3, а сторона B – тремя видами помех B_1, B_2, B_3. Вероятность решения боевой

задачи стороной A при различных видах вооружения и помех задана матрицей (Табл. 1):

Таблица 1.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3
A_1	0.8	0.2	0.4
A_2	0.4	0.5	0.6
A_3	0.1	0.7	0.3

Сторона A стремится решить боевую задачу , сторона B – воспрепятствует этому. Найти оптимальные стратегии сторон.

Формирование оптимизационных задач. Избавляясь от дробей, перепишем матрицу в виде табл.1 и обозначим цену новой игры с такой матрицей $\nu^* = 10\nu$.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3
A_1	8	2	4
A_2	4	5	6
A_3	1	7	3

Сначала найдем оптимальную смешанную стратегию S_A^*.

Эквивалентная оптимизационная ЗЛП в общем виде. Имеется парная конечная игра ($m \times n$) с нулевой суммой и платежной матрицей $(a_{ij})_{mxn}$ без седловой точки. Игрок A имеет стратегии $A_i\ (i = \overline{1,m})$, а игрок B — стратегии $B_j\ (j = \overline{1,n})$. Необходимо найти решение игры в смешанных стратегиях. То есть оптимальную пару смешанных стратегий

$(S_A^* \ (p_i^*, i=\overline{1,m}),\ S_B^* \ (q_j^*, j=\overline{1,n}))$. Здесь p_i^* и q_j^* — вероятности применения стратегий A_i и B_j, которые удовлетворяют условиям $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1, p_i^* \geq 0, q_j^* \geq 0$. (S_A^*, S_B^*) соответствует выигрыш, равный цене игры $\gamma = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} a_{ij} p_i^* q_j^*$.

Оптимальная смешанная стратегия должна обеспечить игроку A выигрыш не меньший γ при любом поведении игрока B, и выигрыш равный γ при его оптимальном поведении.

Допустим, игрок A использует стратегию S_A^*, а игрок B — некоторую стратегию B_j в чистом виде, или $S_B(q_j = 1, q_s = 0, s \neq j, s = \overline{1,n})$. В этом случае игрок A имеет средний выигрыш:

$$\sum_{ij} a_{ij} p_i^* q_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \quad j = \overline{1,n}.$$

Поскольку игрок B отклонился от оптимальной стратегии S_B^*, то это может привести лишь к увеличению среднего выигрыша игрока A, следовательно, можно записать:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \geq \gamma \quad j = \overline{1,n} \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1 \qquad (2)$$

$$p_i^* \geq 0, i = \overline{1,m} \qquad (3)$$

Отметим, что выражение (1) превращается в равенство в случае, если все стратегии B_j активны. Но так как мы не знаем заранее, все ли B_j активны, то в (1) ставится неравенство.

Цена игры γ есть гарантированный выигрыш игрока A, естественно он будет стремиться максимизировать эту величину, то есть:

$$\gamma \Rightarrow \max \qquad (4)$$

Таким образом задача нахождения решения игры свелась к задаче линейного программирования (1)-(4), в которой необходимо найти вероятности p_i^* удовлетворяющие ограничениям (1)-(3) и максимизирующие целевую функцию (4).

Преобразуем эту ЗЛП к более удобному виду. Для этого предположим, что $a_{ij} > 0 \ (i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n})$. Если это условие не выполняется, то прибавляя одну и ту же положительную величину c к элементам платежной матрицы, всегда можно этого добиться. В этом случае цена игры $\gamma > 0$.

Теперь, поделив левую и правую части каждого из неравенств (1)-(3) на величину $\gamma > 0$ и обозначив $p_i^* / \gamma = x_i$, преобразуем ЗЛП (1)-(4) к виду:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1 \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (5)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,m}) \quad (6)$$

$$L = \sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \min \qquad (7)$$

Таким образом, определение оптимальной смешанной стратегии S_A^* свелась к ЗЛП (5)-(7).

Формирование частной ЗЛП.

Запишем условия (5)-(7) как

$$8x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 1;$$

$$2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 1; \qquad (8)$$

$$4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 1;$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \qquad (9)$$

$$L = \frac{1}{\gamma} = x_1 + x_2 + x_3 \Rightarrow \min \quad (10)$$

Требуется найти неотрицательные значения переменных x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие условиям (8)-(9) и обращающие в минимум линейную функцию (10).

Решение задачи. Когда задача (6)-(8) решена и найдены оптимальные значения $x_i^* \ (i = \overline{1,m})$, то с учетом введенного обозначения и вида целевой функции (10) найдем искомые вероятности и максимальный выигрыш игрока A $p_i^* = \gamma \cdot x_i^*$ $(i = \overline{1,m})$, где $\gamma = 1 / \sum_{i=1}^{m} x_i^*$.

Решая задачу (8)-(10) симплекс-методом при помощи программы Игры, получаем, что минимум целевой функции равен L_{min} = 7/32 . Это значение достигается при x_1 = 1/32 , x_2= 3/ 16, x_3 = 0.

Следовательно, находим вероятности p_1, p_2, p_3, с которыми игрок A должен применять свои стратегии A_1 ,A_2 , A_3 , : p_1= x_1·ν*, p_2= x_2·ν*, p_3= x_3·ν* и цену игры:

$$\gamma^* = \frac{1}{L_{\min}} = \frac{32}{7}$$

p_1= x_1·ν*=$\frac{1}{32} \cdot \frac{32}{7} = \frac{1}{7}$; p_2= x_2·ν*=$\frac{3}{16} \cdot \frac{32}{7} = \frac{6}{7}$; p_3= x_3·ν*=0.

Таким образом оптимальная стратегия игрока A имеет вид:

$$S_A^* = \left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}, 0 \right),$$

В терминах поставленной задачи это означает, что мы должны пользоваться с вероятностью 1/7 первым видом вооружения, с вероятностью 6/7 – вторым, а третий вид вооружения не применять вовсе (пассивная стратегия). При этом вероятность выполнения боевой задачи будет максимальна:

$$\gamma = \frac{\gamma^*}{10} \approx 0{,}457$$

Теперь найдём оптимальную стратегию S_B^* противника.

<u>*Эквивалентная оптимизационная ЗЛП в общем виде.*</u>

Пусть игрок B использует оптимальную стратегию S_B^*, а игрок A — чистую стратегию A_i. Игрок A имеет средний выигрыш: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^*, \ (i = \overline{1,m})$.

Так как игрок A отклонился от оптимальной смешанной стратегии, то его средний выигрыш может быть только меньше или равен цене игры γ. Поэтому можно записать:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le \gamma \;\; i = \overline{1,m} \qquad (11)$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j^* = 1 \qquad (12)$$

$$q_j^* \ge 0, \; j = \overline{1,n} \qquad (13)$$

Игрок B, выбирая свою оптимальную смешанную стратегию S_B^* стремится уменьшить средний выигрыш игрока A. Тогда целевая функция будет иметь вид: $\gamma \Rightarrow \min$ (14)

Теперь преобразуем ЗЛП (11)-(13). Для этого разделим левые и правые части выражений (11)-(12) на величину $\gamma > 0$ и введем обозначим $y_j = q_j^* / \gamma$. Тогда ЗЛП (11)-(13) перепишется:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j^* \le 1 \;\; i = \overline{1,m} \qquad (15)$$

$$y_j \ge 0, \; j = \overline{1,n} \qquad (16)$$

$$F = \sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \max \qquad (17)$$

Формирование частной ЗЛП.

Условия (15)-(17) для поставленной задачи запишутся как :

$8y_1 + 2y_2 + 4y_3 \le 1;$

$4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \le 1;$ (18)

$1y_1 + 7y_2 + 3y_3 \le 1;$

$y_1 \ge 0, \; y_2 \ge 0, \; y_3 \ge 0.$ (19)

$$L = \frac{1}{\gamma} = y_1 + y_2 + y_3 \Rightarrow \max \qquad (20)$$

Требуется найти неотрицательные значения переменных y_1 , y_2 , y_3 , удовлетворяющие условиям (18)-(19) и обращающие в минимум линейную функцию (20).

Решение задачи. Когда задача (18)-(20) решена, тогда из введенных обозначений следует $\gamma = 1/\sum_{j=1}^{n} y_j^*$, $q_j^* = \gamma y_j^*$, $(j = \overline{1,n})$

Решая задачу симплекс-методом при помощи программы Игры, получаем, что максимум целевой функции равен L_{max} = 7/32 . Это значение достигается при y_1 = 3/32, y_2= 1/8, y_3 = 0.

Следовательно, находим вероятности q_1, q_2, q_3, с которыми игрок В должен применять свои стратегии B_1, B_2, B_3:

цена игры:

$$\gamma^* = \frac{1}{L_{\max}} = \frac{32}{7}$$

Тогда:

$$q_1 = y_1 \cdot \gamma^* = \frac{3}{32} \cdot \frac{32}{7} = \frac{3}{7}; \quad q_2 = y_2 \cdot \gamma^* = \frac{1}{8} \cdot \frac{32}{7} = \frac{4}{7}; \quad q_3 = y_3 \cdot \gamma^* = 0.$$

Таким образом оптимальная стратегия игрока В имеет вид:

$$S_B^* = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0\right)$$

Отсюда следует, что оптимальная стратегия противника состоит в том, чтобы с вероятностью 3/7 пользоваться помехами B_1, с вероятностью 4/7 – с помехами B_2, а третий вид помех (B_3) не применять вовсе (пассивная стратегия).

Лабораторная работа №2

Игры с седловой точкой. Вычисление верхней и нижней цены игры. Определение равновесной ситуации

Пример 1:

Матричная игра задана следующей платежной матрицей :

	Стратегии "B"	
Стратегии "A"	B_1	B_2
A_1	3	5
A_2	6	$\frac{3}{2}$

Найти решение матричной игры, а именно:

- найти верхнюю цену игры;
- нижнюю цену игры;
- чистую цену игры;
- указать оптимальные стратегии игроков;
- привести графическое решение (геометрическую интерпретацию), при необходимости.

Шаг:1

Определим нижнюю цену игры - α

Нижняя цена игры α — это максимальный выигрыш, который мы можем гарантировать себе, в игре против разумного противника, если на протяжении всей игры будем использовать одну и только одну стратегию (такая стратегия называется "чистой").

Найдем в каждой строке платежной матрицы **минимальный** элемент и запишем его в дополнительный столбец (Выделен желтым цветом см. Табл.1).

Затем найдем **максимальный** элемент дополнительного столбца (отмечен звездочкой), это и будет нижняя цена игры.

Таблица 1

	Стратегии "B"		
Стратегии "A"	B_1	B_2	*Минимумы строк*
A_1	3	5	$\mathbf{3^*}$
A_2	6	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

В нашем случае нижняя цена игры равна: $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{3}$, и для того чтобы гарантировать себе выигрыш не хуже чем 3 мы должны придерживаться стратегии A_1

Шаг:2

Определим верхнюю цену игры - β

Верхняя цена игры β — это минимальный проигрыш, который может гарантировать себе игрок "B", в игре против разумного противника, если на протяжении всей игры он будет использовать одну и только одну стратегию.

Найдем в каждом столбце платежной матрицы **максимальный** элемент и запишем его в дополнительную строку снизу (Выделена желтым цветом см. Табл.2).

Затем найдем **минимальный** элемент дополнительной строки (отмечен плюсом), это и будет верхняя цена игры.

Таблица 2

	Стратегии "B"		
Стратегии "A"	B_1	B_2	*Минимумы строк*
A_1	3	5	$\mathbf{3^*}$

A_2	6	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
Максимумы столбцов	6	**5**$^+$	

В нашем случае верхняя цена игры равна: **β = 5**, и для того чтобы гарантировать себе проигрыш не хуже чем 5 противник (игрок "В") должен придерживаться стратегии B_2

Шаг:3

Сравним нижнюю и верхнюю цены игры, в данной задаче они различаются, т.е. $\alpha \neq \beta$, платежная матрица не содержит седловой точки. Это значит, что игра не имеет решения в чистых минимаксных стратегиях, но она всегда имеет решение в смешанных стратегиях.

Смешанная стратегия, это чередуемые случайным образом чистые стратегии, с определенными вероятностями (частотами).

Смешанную стратегию игрока "А" будем обозначать

$$S_A = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}$$

где A_1, A_2 - стратегии игрока "А", а p_1, p_2 - соответственно вероятности (частоты), с которыми эти стратегии применяются, причем $p_1 + p_2 = 1$.

Аналогично смешанную стратегию игрока "В" будем обозначать

$$S_B = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}$$

где B_1, B_2 - стратегии игрока "В", а q_1, q_2 - соответственно вероятности, с которыми эти стратегии применяются, причем $q_1 + q_2 = 1$.

Оптимальная смешанная стратегия для игрока "А" та, которая обеспечивает ему максимальный выигрыш. Соответственно для "В" - минимальный проигрыш. Обозначаются эти стратегии S_A^* и S_B^* соответственно. Пара оптимальных стратегий образует решение игры.

В общем случае в оптимальную стратегию игрока могут входить не все исходные стратегии, а только некоторые из них. Такие стратегии называются **активными стратегиями**.

Шаг:4

Найдем оптимальную смешанную стратегию для игрока "А":

$$S_A^* = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}$$

где: p_1 , p_2 - вероятности (частоты) с которыми применяются соответственно стратегии A_1 и A_2

Из теории игр известно, что если игрок "А" использует свою оптимальную стратегию, а игрок "В" остается в рамках своих активных стратегий, то средний выигрыш остается неизменным и равным цене игры v независимо от того как игрок "В" использует свои активные стратегии. А в нашем случае обе стратегии активные, иначе игра бы имела решение в чистых стратегиях. Поэтому если предположить, что игрок "В" будет пользоваться чистой стратегией B_1, то средний выигрыш v составит:

$$\boldsymbol{k_{11}p_1 + k_{21}p_2 = v} \quad (1)$$

где: k_{ij} - элементы платежной матрицы.

С другой стороны, если предположить, что игрок "В" будет пользоваться чистой стратегией B_2, то средний выигрыш составит:

$$\boldsymbol{k_{12}p_1 + k_{22}p_2 = v} \quad (2)$$

Приравняв левые части уравнений (1) и (2) получим:

$$\boldsymbol{k_{11}p_1 + k_{21}p_2 = k_{12}p_1 + k_{22}p_2}$$

А с учетом того, что $\boldsymbol{p_1 + p_2 = 1}$ имеем:

$$\boldsymbol{k_{11}p_1 + k_{21}(1 - p_1) = k_{12}p_1 + k_{22}(1 - p_1)}$$

Откуда несложно найти оптимальную частоту стратегии A_1:

$$\boldsymbol{p_1} = \frac{\boldsymbol{k_{22} - k_{21}}}{\boldsymbol{k_{11} + k_{22} - k_{12} - k_{21}}} \qquad (3)$$

В данной задаче:

$$\boldsymbol{p_1} = \frac{\frac{3}{2} - 6}{3 + \frac{}{2} - 5 - 6} = \frac{9}{13}$$

Вероятность $\boldsymbol{p_2}$ найдем вычитанием $\boldsymbol{p_1}$ из единицы:

$$\boldsymbol{p_2 = 1 - p_1} = 1 - \frac{9}{13} = \frac{4}{13}$$

Шаг:5

Вычислим цену игры подставив $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$ в уравнение (1) :

$$\boldsymbol{v = k_{11}p_1 + k_{21}p_2} = 3 \cdot \frac{9}{13} + 6 \cdot \frac{4}{13} = \frac{1}{13}$$

Шаг:6

Найдем оптимальную смешанную стратегию для игрока "В":

$$S_B^* = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix}$$

где: q_1 , q_2 - вероятности (частоты) с которыми применяются соответственно стратегии B_1 и B_2

Из теории игр известно, что если игрок "В" использует свою оптимальную стратегию, а игрок "А" остается в рамках своих активных стратегий, то средний выигрыш остается неизменным и равным цене игры v независимо от того как игрок "А" использует свои активные стратегии. Поэтому если предположить, что игрок "А" будет пользоваться чистой стратегией A_1, то средний выигрыш v составит:

$$\boldsymbol{k_{11}q_1 + k_{12}q_2 = v} \quad (4)$$

Поскольку цена игры $\boldsymbol{v}$ нам уже известна и учитывая, что $\boldsymbol{q_1 + q_2 = 1}$, то оптимальная частота стратегии B_1 может быть найдена как:

$$\boldsymbol{q_1} = \frac{\boldsymbol{v - k_{12}}}{\boldsymbol{k_{11} - k_{12}}} \quad (5)$$

В данной задаче:

$$\boldsymbol{q_1} = \frac{\frac{51}{13} - 5}{3 - 5} = \frac{7}{13}$$

Вероятность $\boldsymbol{q_2}$ найдем вычитанием $\boldsymbol{q_1}$ из единицы:

$$\boldsymbol{q_2 = 1 - q_1 =} \ 1 - \frac{7}{13} = \frac{6}{13}$$

Ответ:

Нижняя цена игры : $\alpha = 3$

Верхняя цена игры : $\beta = 5$

Цена игры : $v = \frac{51}{13}$

Оптимальная стратегия игрока "A" : $S_A^* = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{9}{13} & \frac{4}{13} \end{vmatrix}$

Оптимальная стратегия игрока "B" : $S_B^* = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ \frac{7}{13} & \frac{6}{13} \end{vmatrix}$

Геометрическая интерпретация (графическое решение):

Дадим геометрическую интерпретацию рассмотренной игре. Возьмем участок оси абсцисс единичной длины и проведем через его концы вертикальные прямые $\boldsymbol{a_1}$ и $\boldsymbol{a_2}$ соответствующие нашим стратегиям A_1 и A_2. Предположим теперь, что игрок "B" будет пользоваться стратегией B_1 в чистом виде. Тогда, если мы (игрок "A") будем использовать чистую стратегию A_1, то наш выигрыш составит 3.Отметим соответствующую ему точку на оси $\boldsymbol{a_1}$.

Если же мы будем использовать чистую стратегию A_2, то наш выигрыш составит 6. Отметим соответствующую ему точку на оси $\boldsymbol{a_2}$

(см. Рис. 1). Очевидно, если мы будем применять, смешивая в различных пропорциях стратегии A_1 и A_2, наш выигрыш будет меняться по прямой проходящей через точки с координатами (0 , 3) и (1 , 6), назовем ее линией стратегии B_1 (на Рис.1 показана красным цветом). Абсцисса любой точки на данной прямой равна вероятности $\boldsymbol{p_2}$ (частоте), с которой мы применяем стратегию A_2, а ордината - получаемому при этом выигрышу $\boldsymbol{k}$ (см. Рис.1).

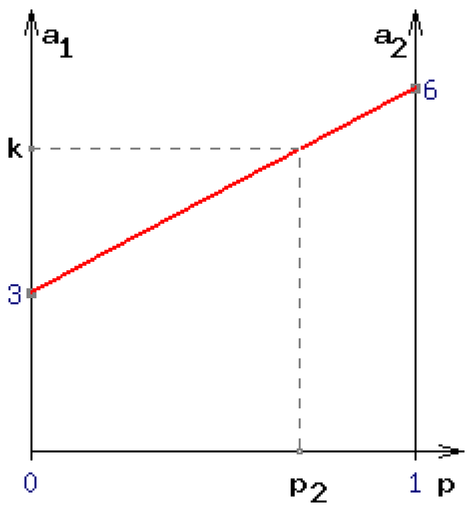


Рисунок 1.

График зависимости выигрыша $\boldsymbol{k}$ от частоты $\boldsymbol{p_2}$, при использовании противником стратегии $\mathbf{B_1}$.

Предположим теперь, что игрок "B" будет пользоваться стратегией B_2 в чистом виде. Тогда, если мы (игрок "A") будем использовать чистую стратегию A_1, то наш выигрыш составит 5.Если же мы будем использовать чистую стратегию A_2, то наш выигрыш составит 3/2 (см. Рис. 2). Аналогично, если мы будем смешивать в различных пропорциях стратегии A_1 и A_2, наш выигрыш будет меняться по прямой проходящей через точки с координатами (0 , 5) и (1 , 3/2), назовем ее линией стратегии B_2. Как и в предыдущем случае, абсцисса любой точки на этой прямой равна вероятности, с которой мы применяем стратегию A_2, а ордината - получаемому при этом выигрышу, но только для стратегии B_2 (см. Рис. 2).

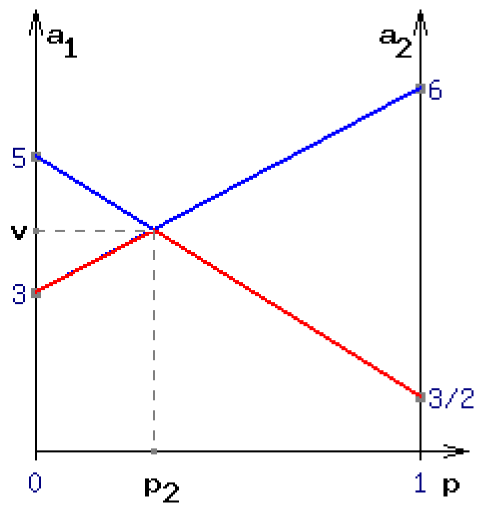


Рисунок 2.

Графическое определение цены игры $\boldsymbol{v}$ и оптимальной частоты $\boldsymbol{p_2}$ для игрока **"А"**.

В реальной игре, когда разумный игрок "В" пользуется всеми своими стратегиями, наш выигрыш будет изменяться по ломаной линии, показанной на Рис.2 красным цветом. Эта линия определяет так называемую **нижнюю границу выигрыша**. Очевидно, что самая высокая точка этой ломанной соответствует нашей оптимальной стратегии. В данном случае, это точка пересечения линий стратегий B_1 и B_2. Обратите внимание, что если выбрать частоту $\boldsymbol{p_2}$ равной ее абсциссе, то наш выигрыш будет оставаться неизменным и равным $\boldsymbol{v}$ при любой стратегии игрока "В", кроме того он будет максимальным который мы можем себе гарантировать. Частота (вероятность) p_2, в этом случае, есть соответствующая частота нашей оптимальной смешанной стратегии. Кстати из рисунка 2 видна и частота p_1, нашей оптимальной смешанной стратегии, это длина отрезка [p_2 ; 1] на оси абсцисс. (Это потому, что $p_1 + p_2 = 1$)

Совершенно аналогично рассуждая, можно найти и частоты оптимальной стратегии для игрока "B", что иллюстрируется на рисунке 3.

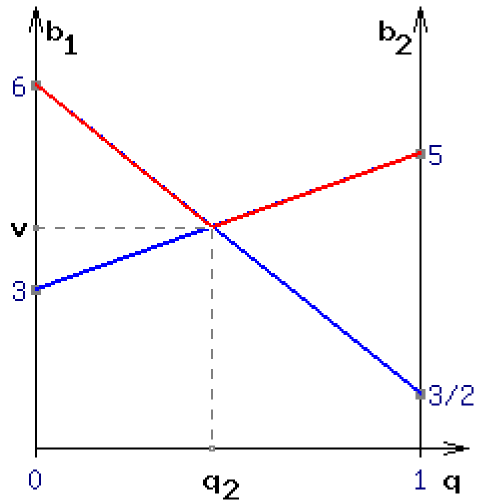


Рисунок 3.

Графическое определение цены игры v и оптимальной частоты q_2 для игрока **"B"**.

Только для него следует построить так называемую **верхнюю границу проигрыша** (красная ломаная линия) и искать на ней самую низкую точку, т.к. для игрока "B" цель, это минимизация проигрыша. Аналогично значение частоты q_1, это длина отрезка [q_2 ; 1] на оси абсцисс.

Пример 2:

Матричная игра задана следующей платежной матрицей :

	Стратегии "B"			
Стратегии "A"	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1.45	2.12	0.75	4.01
A_2	3.52	1.87	0.18	12.7
A_3	6.08	4.43	11.0	6.01

Найти решение матричной игры, а именно:

- найти верхнюю цену игры;
- нижнюю цену игры;
- чистую цену игры;
- указать оптимальные стратегии игроков;
- привести графическое решение (геометрическую интерпретацию), при необходимости.

Шаг:1

Определим нижнюю цену игры - α

Нижняя цена игры α — это максимальный выигрыш, который мы можем гарантировать себе, в игре против разумного противника, если на протяжении всей игры будем использовать одну и только одну стратегию (такая стратегия называется "чистой").

Найдем в каждой строке платежной матрицы **минимальный** элемент и запишем его в дополнительный столбец (Выделен желтым цветом см. Табл. 1).

Затем найдем **максимальный** элемент дополнительного столбца (отмечен звездочкой), это и будет нижняя цена игры.

Таблица 1

	Стратегии "B"				
Стратегии "A"	B_1	B_2	B_3	B_4	*Минимумы строк*
A_1	1.45	2.12	0.75	4.01	0.75
A_2	3.52	1.87	0.18	12.7	0.18
A_3	6.08	4.43	11.0	6.01	**4.43***

В нашем случае нижняя цена игры равна: **α = 4.43**, и для того чтобы гарантировать себе выигрыш не хуже чем 4.43 мы должны придерживаться стратегии A_3

Шаг:2

Определим верхнюю цену игры - β

Верхняя цена игры β — это минимальный проигрыш, который может гарантировать себе игрок "B", в игре против разумного противника, если на протяжении всей игры он будет использовать одну и только одну стратегию.

Найдем в каждом столбце платежной матрицы **максимальный** элемент и запишем его в дополнительную строку снизу (Выделена желтым цветом см. Табл.2).

Затем найдем **минимальный** элемент дополнительной строки (отмечен плюсом), это и будет верхняя цена игры.

Таблица 2

	Стратегии "B"				
Стратегии "A"	B_1	B_2	B_3	B_4	*Минимумы строк*
A_1	1.45	2.12	0.75	4.01	0.75
A_2	3.52	1.87	0.18	12.7	0.18

A_3	6.08	4.43	11.0	6.01	**4.43****
Максимумы столбцов	6.08	**4.43**+	11.0	12.7	

В нашем случае верхняя цена игры равна: **β = 4.43**, и для того чтобы гарантировать себе проигрыш не хуже чем 4.43 противник (игрок "B") должен придерживаться стратегии B_2

Шаг:3

Сравним нижнюю и верхнюю цены игры, в данной задаче они совпадают, т.е. $\alpha = \beta = 4.43$. Это значит, что игра имеет решение в так называемых "чистых", минимаксных стратегиях. Это как раз те стратегии для игроков "A" и "B" которые были найдены выше, при поиске нижней и верхней цен игры. То есть, в нашем случае для игрока "A" оптимальной будет стратегия A_3, а для игрока "B" - B_2. Нетрудно заметить, что элемент платежной матрицы расположенный на пересечении чистых оптимальных стратегий (строка 3, столбец 2) является одновременно минимальным в строке и максимальным в столбце (отмечен знаками *+ см. Табл.2). Такие элементы называются седловыми точками, именно их наличие и определяет существование решения игры в чистых стратегиях, а его значение (в нашем случае 4.43) совпадает с **чистой ценой игры** или просто **ценой игры** - ***v***. Пара оптимальных стратегий, в играх имеющих седловую точку, всегда проходит через последнюю.

Таблица 2

	Стратегии "B"				
Стратегии "A"	B_1	B_2	B_3	B_4	*Минимумы строк*
A_1	1.45	2.12	0.75	4.01	0.75
A_2	3.52	1.87	0.18	12.7	0.18

A_3	6.08	**4.43**$^{*+}$	11.0	6.01	**4.43***
Максимумы столбцов	6.08	**4.43**$^{+}$	11.0	12.7	

Ответ:

Нижняя цена игры, верхняя цена игры и чистая цена игры: $\boldsymbol{\alpha = \beta = \nu = 4.43}$;

Пара оптимальных стратегий: $\mathbf{A_3B_2}$.

Задание:

1. В соответствии с номером в списке группы составить платежную матрицу 2х2.

Найти решение матричной игры в смешанных стратегиях, а именно:

- найти верхнюю цену игры;
- нижнюю цену игры;
- чистую цену игры;
- указать оптимальные стратегии игроков;
- привести графическое решение (геометрическую интерпретацию), при необходимости.

2. В соответствии с номером в списке группы составить платежную матрицу 3х4.

Найти решение матричной игры в чистых стратегиях, а именно:

- найти верхнюю цену игры;
- нижнюю цену игры;
- чистую цену игры;
- указать оптимальные стратегии игроков;
- привести графическое решение (геометрическую интерпретацию), при необходимости.

Лабораторная работа №3

Позиционные игры.

Пример 1: Требуется принять решение о замене старого оборудования на новое того же вида или его ремонте. Отремонтированное оборудование впоследствии можно частично заменить на новое, более современное, или отремонтировать его заново.

Решение определяется будущим спросом на продукцию, которую производят на этом оборудовании.

Полная замена оборудования экономически оправдана при высоком уровне спроса. С другой стороны, можно отремонтировать старое оборудование и через один год, например, заменить его на новое, более совершенное, или заново его отремонтировать.

В данной задаче процесс принятия решения состоит из двух этапов: решение в настоящий момент времени о замене или ремонте оборудования и решение, принимаемое через один год, относительно частичной его замены и ремонта. Предполагается, что спрос может оказаться высоким, средним и низким. Дерево решений имеет два типа вершин: "решающие" и "случайные" (рис.1).

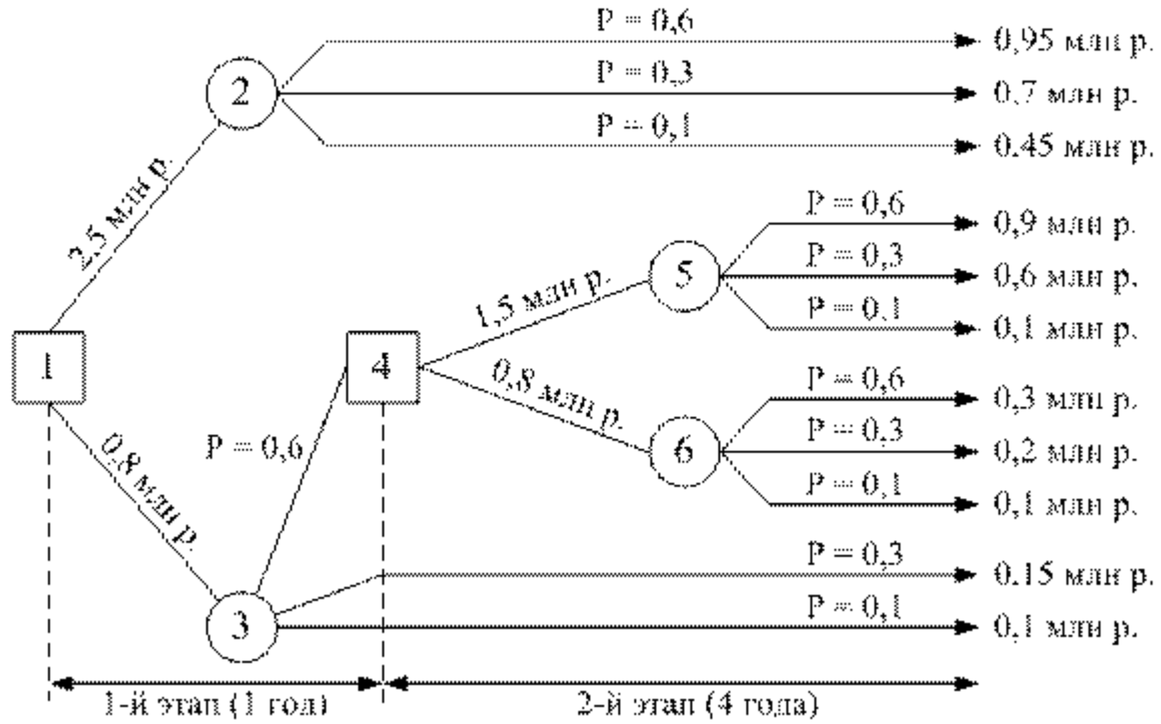


Рис.1 Дерево решений

Начиная с "решающей" вершины 1, необходимо принять решение о полной замене оборудования или его ремонте.

Вершины 2 и 3 являются "случайными". Фирма будет рассматривать возможность установления более совершенного оборудования или повторного ремонта старого в том случае, если спрос по истечении одного года установится на высоком уровне. Поэтому в вершине 4 принимается решение о частичной замене старого оборудования более совершенным или ремонте старого. Вершины 5 и 6 "случайные".

Допускается, что фирма рассматривает эту задачу на пятилетний период. Анализ рыночной ситуации показывает, что вероятности высокого, среднего и низкого уровней спроса составляют соответственно 0,6, 0,3 и 0,1. Замена новым оборудованием того же вида, что и старое, обойдется в 2,5 млн р., а ремонт старого – в 0,8 млн р.

Затраты на частичную замену оборудования более совершенным оцениваются в 1,5 млн р., а повторный ремонт старого – в 0,8 млн р.

Ежегодные доходы для каждой стратегии фирмы следующие.

1. Замена старого оборудования на новое того же вида при высоком, среднем и низком уровнях спроса даёт соответственно 0,95, 0,7 и 0,45 млн р.
2. Ремонт старого оборудования при высоком, среднем и низком уровнях спроса оценивается соответственно в 0,3, 0,15 и 0,1 млн р.
3. Частичная замена оборудования на более совершенное при высоком, среднем и низком уровнях спроса составит соответственно 0,9, 0,6 и 0,4 млн р.
4. Повторный ремонт старого оборудования при высоком, среднем и низком уровнях спроса предполагает 0,3, 0,2 и 0,1 млн р. соответственно.

Определим оптимальную стратегию фирмы в замене оборудования.

Решение.

Оценим результаты каждой стратегии и определим, какие решения следует принимать в "решающих" вершинах 1 и 4.

Вычисления начнем с этапа 2. Для последних 4 лет альтернативы, относящиеся к вершине 4, оцениваются так:

ДЧЗ= (0,9 × 0,6 + 0,6 × 0,3 + 0,4 × 0,1) × 4 – 1,5 = 1,54 млн р.,

ДДР = (0,3 × 0,6 + 0,2 × 0,3 + 0,1 × 0,1) × 4 – 0,8 = 0,2 млн р.,

где *ДЧЗ*– доход от частичной замены оборудования на более совершенное; *ДДР*– доход от замены оборудования, прошедшего дважды ремонт.

Так как *ДЧЗ*>*ДДР*, то в вершине 4 выгоднее частично заменить оборудование на более совершенное, при этом доход составит 1,54 млн р.

Для дальнейших расчетов в вершине 4 можно оставить одну ветвь, которой соответствует доход в 1,54 млн р. за 4 года.

Вычислим доходы на 1-м этапе для "решающей" вершины 1:

ДЗН = (0,95 × 0,6 + 0,7 × 0,3 + 0,45 × 0,1) × 5 – 2,5 = 1,625 млн р.,

ДЗО = 0,3 × 0,6 × 1 + 0,15 × 0,3 × 5 + 0,1 × 0,1 × 5 +1,54 – 0,8 = 1,195 млн р.,

где *ДЗН*– доход от замены старого оборудования на новое того же вида; *ДЗО*— доход от отремонтированного оборудования и дальнейшей замены на более совершенное.

Так как *ДЗН*>*ДЗО*, то оптимальным решением в вершине 1 является полная замена старого оборудования на новое того же вида.

Итак, оптимальной стратегией фирмы в замене оборудования является полная замена старого оборудования на новое того же вида, при этом доход составит 1,625 млн р.

Пример 2: Фирма планирует построить среднее или малое предприятие по производству пользующейся спросом продукции. Решение о строительстве определяется будущим спросом на продукцию, которую предполагается выпускать на планируемом предприятии.

Строительство среднего предприятия экономически оправдано при высоком спросе, но можно построить малое предприятие и через 2 года его расширить.

Фирма рассматривает данную задачу на десятилетний период. Анализ рыночной ситуации, проведенный службой маркетинга, показывает, что вероятности высокого и низкого уровней спроса составляют A=0,65 и B=0,35 соответственно.

Строительство среднего предприятия составит C=7,5 млн. руб., малого – D=1,8 млн. руб. Затраты на расширение малого предприятия оценивается в E=3,4 млн. руб.

Ожидаемые ежегодные доходы для каждой из возможных альтернатив:

- среднее предприятие при высоком (низком) спросе – F=1,4 (K=0,38) млн. руб.;
- малое предприятие при низком спросе – L=0,25 млн. руб.;
- малое предприятие при высоком спросе – M=0,27 млн. руб.;
- расширенное предприятие при высоком (низком) спросе дает N=1,6 (P=0,24) млн. руб.;
- малое предприятие без расширения при высоком спросе в течение первых двух лет и последующем низком спросе дает R=0,2 млн. руб. за остальные восемь лет.

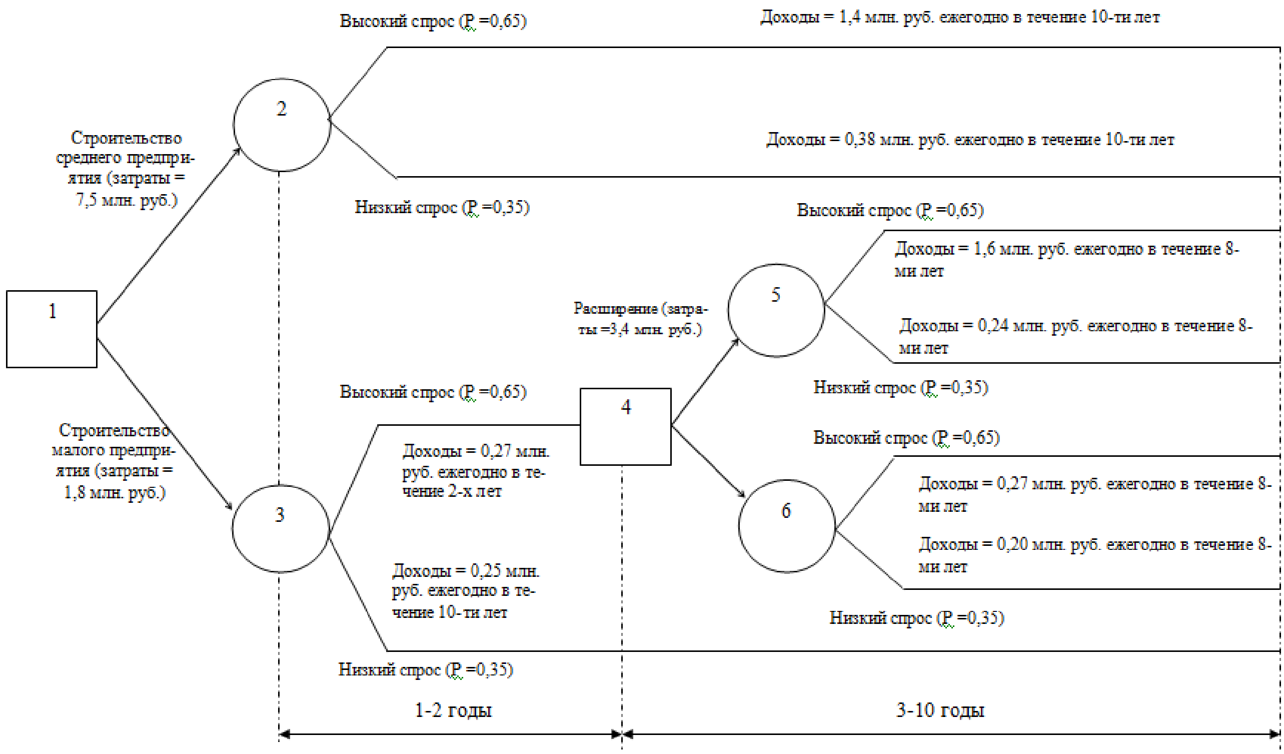
Определить оптимальную стратегию фирмы в строительстве предприятий по выпуску продукции.

Решение:

Данная задача является многоэтапной, так как если фирма решит строить малое предприятие, то через два года она может принять решение о его расширении. В этом случае процесс принятия решения состоит из двух этапов: решение в настоящий момент времени о размере предприятия и решение о необходимости его расширения, принимаемое через два года.

На следующем рисунке задача представлена в виде «дерева» решений.

Предполагается, что спрос может оказаться высоким и низким. Дерево имеет два типа вершин: «решающие» вершины, обозначенные квадратными узлами, и «случайные» вершины, обозначенные круглыми узлами.



Начиная с вершины 1, являющейся «решающей», необходимо принять решение относительно размера предприятия. Вершины 2 и 3 являются «случайными». Фирма будет рассматривать возможность расширения малого предприятия только в том случае, если спрос по истечении первых двух лет установится на высоком уровне. Поэтому в вершине 4 принимается решение о расширении или не расширении предприятия. Вершины 5 и 6 будут «случайными».

Вычисления начнем со 2-го этапа. Для последних восьми лет альтернативы, относящиеся к вершине 4, оцениваются так:

- доход малого предприятия с последующим расширением:

ДР = (1,6*0,65 + 0,24*0,35)*8 – 3,4 = 5,592 млн. руб.

- доход малого предприятия без расширения

ДБР = (0,27*0,65 + 0,2*0,35)*8 = 1,964 млн. руб.

Таким образом, в вершине 4 выгоднее провести расширение, при этом доход составит 5,592 млн. руб.

Перейдем к вычислениям 1-го этапа. Для вершины 1:

- доход среднего предприятия:

ДС = (1,4*0,65 + 0,38*0,35)*10 – 7,5 = 2,93 млн. руб.

- доход малого предприятия с последующим расширением через 2 года:

ДМ = 5,592 + 0,27*0,65*2 + 0,25*0,35*10 – 1,8 = 5,018 млн. руб.

Сравнивая получаемые в вершине 1 доходы среднего и малого предприятий, видим, что более предпочтительным является вариант строительства малого предприятия с последующим расширением через 2 года.

Задание: В соответствии с номером в списке группы составить позиционную игру и найти её решение.

Лабораторная работа №4

Бескоалиционные игры. Решение биматричной игры (2x2).

Вследствие того, что в биматричных играх интересы игроков не совпадают, необходимо построить такое решение, которое бы в том или ином, но в одинаковом смысле удовлетворяло обоих игроков.

Рассмотрим случай когда у игроков имеется ровно две стратегии, т.е. m=n=2.

В 2x2 биматричной игре платёжные матрицы игроков имеют следующий вид:

A=();B=()

Вероятности p_1=p, p_2=1-p, q_1=q, q_2=1-q, а средние выигрыши вычисляются по формулам:

$H_a(p,q) = a_{11}p\, q + a_{12}\, p(1-q) + a_{21}(1-p)q + a_{22}(1-p)(1-q)$,

$H_b(p,q) = b_{11}pq + b_{12}\, p(1-q) + b_{21}(1-p)q + b_{22}(1-p)(1-q)$,

где $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$,

Пара чисел (p*,q*), $0 \le p^* \le 1$, $0 \le q^* \le 1$, p и q, подчиненных условиям $0 \le p^* \le 1$, $0 \le q^* \le 1$, одновременно выполнены следующие неравенства $H_A(p,q^*) \le H_A(p^*, q^*)$. (*)

Т: всякая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях.

Задание смешанной стратегии игрока состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его первоначальные стратегии.

Если некоторая пара чисел (p*,q*) претендуют на то, чтобы определить ситуацию равновесия, то необходимо проверить справедливость неравенств (*). Для этого воспользуемся теоремой:

Т: Выполнение неравенств (*) равносильно выполнению неравенств

$H_A(0,q^*) \le H_A(p^*,q^*)$, $H_B(p^*,0) \le H_B(p^*,q^*)$, (**)

$H_A(1,q^*) \le H_A(p^*,q^*)$, $H_B(p^*,1) \le H_B(p^*,q^*)$.

Запишем средние выигрыши игроков A и B в более удобной форме. Имеем:

$H_A(p,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p + (a_{21} - a_{22})q + a_{22}$

$H_B(p,q) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p + (b_{21} - b_{22})q + b_{22}$

Обратимся к первой формуле. Пологая p = 1, а потом p = 0, получаем, что

$H_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{12} + (a_{21} - a_{22})q,$

$H_A(0,q) = (a_{21} - a_{22})q + a_{22}$

Рассмотрим разности

$H_A(p,q) - H_A(1,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p – (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{22} – a_{12},$

$H_A(p,q) - H_A(0,q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p$

Пологая $C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, $\alpha = a_{22}- a_{12}$, получим

$H_A(p,q) - H_A(1,q) = Cpq – \alpha p – Cq + \alpha = (p–1)(Cq-\alpha)$

$H_A(p,q) - H_A(0,q) = Cpq – \alpha p = p(Cq-\alpha)$

В случае, если пара (p,q) определяет точку равновесия, эти разности неотрицательны, поэтому:

$(p–1)(Cq-\alpha) \ge 0$, $p(Cq-\alpha) \ge 0$

Из формул для функции $H_B(p,q)$ при q=1, q=0 соответственно имеем:

$H_B(p,1) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})p + (b_{12} - b_{22})p + b_{21},$

$H_B(p,0) = (b_{12} - b_{22})p + b_{22}$

Разности $H_B(p,q) - H_B(p,1)$ и $H_B(p,q) - H_B(p,0)$

С учётом обозначений $D = b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}$, $\beta = b_{22}-b_{21}$

Приводятся к виду $H_b(p,q) = H_b(p,1) = (q-1)(Dp-\beta)$,

$H_b(p,q) = H_b(p,0) = q(Dp-\beta)$.

И $(q-1)(Dp-\beta) \geq 0$, $q(Dp-\beta) \geq 0$

Решение:

В каждом столбце матрицы А найдем максимальный элемент. Эти элементы подчеркнуты в матрице А. Их положение соответствует приемлемым ситуациям 1-го игрока, когда второй игрок выбрал стратегию *j* соответственно.

Затем в каждой строке матрицы В выберем наибольший элемент. Эти элементы подчеркнуты в матрице В. Их положение будет определять приемлемые ситуации 2-го игрока, когда первый игрок выбрал стратегию *i* соответственно.

Платежная матрица игрока А:

6	2
2	**4**

Платежная матрица игрока В:

2	**6**
8	2

Если биматричная игра не имеет равновесных ситуаций в чистых стратегиях, то она неразрешима в чистых стратегиях. И тогда можно искать решение в смешанных стратегиях.

Итак, чтобы в биматричной игре:

A=(a), B = (b) пара (p,q);

определяемая равновесную ситуацию, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих неравенств:

$(p-1)(Cq-\alpha) \geq 0$, $p(Cq-\alpha) \geq 0$; $0 \geq p \geq 1$

$(q-1)(Dp-\beta) \geq 0$, $q(Dp-\beta) \geq 0$; $0 \geq q \geq 1$

где

$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$

$\alpha = a_{22} - a_{12}$

$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$

$\beta = b_{22} - b_{21}$

Проводя необходимые вычисления:

$C = 6 - 2 - 2 + 4 = 6$

$\alpha = 4 - 2 = 2$

$D = 2 - 6 - 8 + 2 = -10$

$\beta = 2 - 8 = -6$

и рассуждения

$(p-1)(6q-2) \geq 0$

$p(6q-2) \geq 0$

$(q-1)(-10p+6) \geq 0$

$q(-10p+6) \geq 0$

получаем, что:

1) $p=1, q \geq {}^1/_3$

$p=0,\ q \leq {}^1/_3$

$0 \leq p \leq 1,\ q={}^1/_3$

2) $q=1, p \geq {}^3/_5$

$q=0,\ p \leq {}^3/_5$

$0 \leq q \leq 1,\ p={}^3/_5$

Цена игры

$H_a({}^3/_5;{}^1/_3) = 3{}^1/_3$

$H_b({}^3/_5;{}^1/_3) = 4{}^2/_5$

Ответ:

$P^* = ({}^3/_5;{}^2/_5)$; $Q^* = ({}^1/_3;{}^2/_3)$.

Выигрыш игроков в равновесной ситуации:

$f(P^*,Q^*) = (3{}^1/_3;4{}^2/_5)$.

Задание: В соответствии с номером в списке группы составить биматричную игру 2x2 и найти P*, Q*, f(P*,Q*) .

Лабораторная работа №5

Кооперативные игры.

Кооперативные игры получаются в тех случаях, когда, в игре n игроков разрешается образовывать определённые коалиции. Обозначим через N множество всех игроков, $N = \{1, 2, ..., n\}$, а через S – любое его подмножество. Пусть игроки из S договариваются между собой о совместных действиях и, таким образом, образуют одну коалицию. Очевидно, что число таких коалиций, состоящих из r игроков, равно числу сочетаний из n по r, то есть C_n^r, а число всевозможных коалиций равно

$$\sum_{r=1}^{n} C_n^r = 2^n - 1.$$

Из этой формулы видно, что число всевозможных коалиций значительно растёт в зависимости от числа всех игроков в данной игре. Для исследования этих игр необходимо учитывать все возможные коалиции, и поэтому трудности исследований возрастают с ростом n. Образовав коалицию, множество игроков S действует как один игрок против остальных игроков, и выигрыш этой коалиции зависит от применяемых стратегий каждым из n игроков.

Функция υ, ставящая в соответствие каждой коалиции S наибольший, уверенно получаемый его выигрыш $\upsilon(S)$, называется *характеристической функцией игры*. Так, например, для бескоалиционной игры n игроков $\upsilon(S)$ может получиться, когда игроки из множества S оптимально действуют как один игрок против остальных $N \backslash S$ игроков, образующих другую коалицию (второй игрок).

Характеристическая функция υ называется *простой*, если она принимает только два значения: 0 и 1. Если характеристическая функция υ простая, то коалиции S, для которых $\upsilon(S)=1$, называются *выигрывающими*, а коалиции S, для которых $\upsilon(S) = 0$, – *проигрывающими.*

Если в простой характеристической функции υ выигрывающими являются те и только те коалиции, которые содержат фиксированную непустую коалицию R, то характеристическая функция υ, обозначаемая в этом случае через υ_R, называется *простейшей*.

Содержательно простые характеристические функции возникают, например, в условиях голосования, когда коалиция является выигрывающей, если она собирает более половины голосов (простое большинство) или не менее двух третей голосов (квалифицированное большинство).

Более сложным является пример оценки результатов голосования в Совете безопасности ООН, где выигрывающими коалициями являются все коалиции, состоящие из всех пяти постоянных членов Совета плюс ещё хотя бы один непостоянный член, и только они.

Простейшая характеристическая функция появляется, когда в голосующем коллективе имеется некоторое “ядро”, голосующее с соблюдением правила “вето”, а голоса остальных участников оказываются несущественными.

Пусть коалиции как-то образованы. Тогда возникает вопрос: как делить общий выигрыш с учетом веса каждой коалиции между ее членами?

1. Принцип оптимальности в форме С-ядра

Естественно положить в основу анализа кооперативной игры принцип оптимального распределения максимального выигрыша $\upsilon(S)$ между сторонами $i \in S$.

Реализация этого принципа приводит к рассмотрению ***С-ядра*** *− множество недоминируемых «вполне устойчивых» дележей кооперативной игры.*

Вектор $x = (x_1, ..., x_n)$, удовлетворяющий условиям индивидуальной и коллективной рациональности, называется *дележём* в условиях характеристической функции υ.

Распределение выигрышей (делёж) игроков должно удовлетворять следующим естественным условиям: если обозначить через x_i выигрыш i-го игрока, то, во-первых, должно удовлетворяться условие *индивидуальной рациональности*

$$x_i \geq \upsilon(i), \text{ для } i \in N \qquad (1)$$

т.е. любой игрок должен получить выигрыш в коалиции не меньше, чем он получил бы, не участвуя в ней (в противном случае он не будет участвовать в коалиции); во-вторых, должно удовлетворяться условие *коллективной рациональности*

$$\sum_{i \in N} x_i = \upsilon(N) \qquad (2)$$

т.е. сумма выигрышей игроков должна соответствовать возможностям (если сумма выигрышей всех игроков меньше, чем $\upsilon(N)$, то игрокам незачем вступать в коалицию; если же потребовать, чтобы сумма выигрышей была больше, чем $\upsilon(N)$, то это значит, что игроки должны делить между собой сумму большую, чем у них есть).

Система $\{N, \upsilon\}$, состоящая из множества игроков, характеристической функции над этим множеством и множеством дележей, удовлетворяющих соотношениям (2) и (3) в условиях характеристической функции, называется *классической кооперативной игрой*.

Делёж x доминирует y, если существует такая коалиция S, для которой делёж x доминирует y. Это доминирование обозначается так: $x > y$.

Наличие доминирования $x > y$ означает, что в множестве игроков N найдётся коалиция, для которой x предпочтительнее y. Соотношение доминирования возможно не для всякой коалиции. Так невозможно доминирование по коалиции, состоящей из одного игрока или из всех игроков.

Любой дележ из С-ядра устойчив, в том смысле, что ни одна из коалиций не имеет ни желания, ни возможности изменить исход игры.

Для того чтобы делёж x принадлежал с-ядру кооперативной игры с характеристической функцией υ, необходимо и достаточно, чтобы для любой коалиции S выполнялось неравенство $\upsilon(S) \le \sum_{i \in S} x_i$.

С-ядро может оказаться пустым, например, когда есть слишком сильные коалиции. Если С-ядро пусто, то требования всех коалиций одновременно не могут быть удовлетворены.

<u>Пример1</u>. Найти С-ядро в кооперативной игре 3-х сторон, если максимальные гарантированные выигрыши всевозможных в данном случае семи коалиций ($\sum_{r=1}^{3} C_3^r = 7$) следующие:

$\upsilon(1, 2, 3)=9$, $\upsilon(2, 3)=7$, $\upsilon(1, 3)=4$, $\upsilon(1, 2)=4$, $\upsilon(1) =\upsilon(2) =\upsilon(3) =0$.

Решение

Воспользуемся утверждением, раскрывающим метод построения С-ядра как множества недоминируемых дележей, т. е. для того, чтобы дележ $x(S)$ принадлежал С-ядру необходимо и достаточно выполнения неравенств:

$$\upsilon(S) \le \sum_{i \in S} x_i, \; S \subset N,$$

где x_i – доля i-ой стороны;

$i \in S$, такая, что должно выполняться требование $x_i \ge \upsilon(i)$, i=1, 2, 3.

Составим соотношения (4 уравнения для 3 неизвестных):

$$x_1 + x_2 + x_3 \ge 9$$

$$x_2 + x_3 \ge 7$$

$$x_1 + x_3 \ge 4$$

$$x_1 + x_2 \ge 4$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, \;\; x_3 \ge 0$$

Для нахождения x_1, x_2, x_3 получаем следующие системы из 3-х неизвестных:

I. $x_1 + x_2 + x_3 \geq 9$

$x_2 + x_3 \geq 7$

$x_1 + x_3 \geq 4$

$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0$

II. $x_1 + x_2 + x_3 \geq 9$

$x_2 + x_3 \geq 7$

$x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0$

III. $x_1 + x_2 + x_3 \geq 9$

$x_1 + x_3 \geq 4$

$x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0$

IV. $x_2 + x_3 \geq 7$

$x_1 + x_3 \geq 4$

$x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0,\ \ x_3 \geq 0$

Решением этих систем являются соответственно:

I − ($x_1=2, x_2=5, x_3=2$); II − ($x_1=2, x_2=2, x_3=5$);
III − ($x_1=0, x_2=4, x_3=5$), ($x_1=0, x_2=5, x_3=4$); IV − ($x_1=0.5, x_2=3.5, x_3=3.5$).

Для кооперативных игр 3-х лиц, когда С-ядро не пусто, должно выполняться неравенство:

$$\upsilon(1, 2)+ \upsilon(1, 3)+\upsilon(2, 3) \leq 2\upsilon(1, 2, 3) \qquad (3)$$

Таким образом, решение рассматриваемой игры (С-ядро) состоит из:
($x_1=2, x_2=5, x_3=2$), ($x_1=2, x_2=2, x_3=5$), ($x_1=0, x_2=4, x_3=5$), ($x_1=0, x_2=5, x_3=4$),

а ($x_1=0.5, x_2=3.5, x_3=3.5$) не удовлетворяет условию принадлежности С-ядру (3) − 0.5+3.5+3.5 = 7.5 < 9.

Принцип оптимальности в форме вектора Шепли

В случае, когда какая-то сторона (игрок) не является существенной, т. е. не принадлежит коалиции − носителю игры, то возникает необходимость конструирования принципа оптимальности как *принципа справедливого дележа*.

Одним из таких подходов является подход Шепли, суть которого в том, что он строиться на основании аксиом, отражающих справедливость дележей.

Носителем игры с характеристической функцией υ называется такая коалиция T, что $\upsilon(S) = \upsilon(S \cap T)$ для любой коалиции S.

Смысл носителя T состоит в том, что любой игрок, не принадлежащий T, является нейтральным, он не может ничего внести в коалицию и ему ничего не следует выделять из общих средств.

Пусть υ – характеристическая функция кооперативной игры n игроков, π – любая перестановка множества N игроков. Через πυ обозначим характеристическую функцию и такой игры, что для коалиции $S = \{i_1, i_2, ..., i_S\}$ будет $\upsilon(\{\pi(i_1), \pi(i_2), ..., \pi(i_S)\}) = \upsilon(S)$.

Содержательный смысл функции πυ состоит в том, что если в игре с характеристической функцией υ поменять местами игроков согласно перестановке π, то получим игру с характеристической функцией πυ.

Аксиомы Шепли

1. *Аксиома симметрии*. Для любой перестановки π и $i \in N$ должно выполняться $\varphi_{(\pi i)}(\pi\upsilon) = \varphi_i(\upsilon)$, т.е. игроки, одинаково входящие в игру, должны “по справедливости” получать одинаковые выигрыши.

2. *Аксиома эффективности*. Если S – любой носитель игры с характеристической функцией υ, то $\sum_{i \in S} \varphi_i(\upsilon) = \upsilon(S)$

Иными словами, “справедливость требует”, что при разделении общего выигрыша носителя игры ничего не выделять на долю посторонних, не принадлежащих этому носителю, равно как и ничего не взимать с них.

3. *Аксиома агрегации*. Если есть две игры с характеристическими функциями υ' и υ'', то $\varphi_i(\upsilon' + \upsilon'') = \varphi_i(\upsilon') + \varphi_i(\upsilon'')$,

т.е. ради “справедливости” необходимо считать, что при участии игроков в двух играх их выигрыши в отдельных играх должны складываться. *Вектором цен (вектором Шепли)* игры с характеристической функцией υ называется n-мерный вектор $\varphi(\upsilon) = (\varphi_1(\upsilon), \varphi_2(\upsilon), ..., \varphi_n(\upsilon))$, удовлетворяющий аксиомам Шепли.

$\varphi_i(\upsilon)$ − компонента вектора $\varphi(\upsilon)$, представляющая полезность (выигрыш) i-го игрока в кооперативной игре в результате соглашения или решения арбитра. Можно доказать, что компоненты вектора Шепли в явном виде запишутся следующим образом

$$\varphi_i(\upsilon) = \sum_{\substack{T\subset N \\ i\in T}} \varphi_i(T)\left[\upsilon(T) - \upsilon(T\setminus\{i\})\right] =$$
$$= \sum_{\substack{T\subset N \\ i\in T}} \frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!}\left[\upsilon(T) - \upsilon(T\setminus\{i\})\right], \quad (4)$$

где t – число элементов в T.

Вектор Шепли содержательно можно интерпретировать следующим образом: предельная величина, которую вносит i-й игрок в коалицию T, выражается как

$\upsilon(T) - \upsilon(T\setminus\{i\})$ и считается выигрышем i-го игрока;

$\varphi_i(\upsilon)$ – средний выигрыш i-го игрока в такой схеме интерпретации.

В том случае, когда υ – простейшая,

$$\upsilon(T) - \upsilon(T\setminus\{i\}) = \begin{cases} 0, & \text{если } T \text{ и } T\setminus\{i\} \text{ - выигрывающие каолиции}, \\ 1, & \text{если } T \text{ выигрывающая каолиция}, \\ & \text{а } \ T\setminus\{i\} \text{ - не выигрывающая каолиция}. \end{cases}$$

Следовательно

$$\varphi_i(\upsilon) = \sum_T \gamma_i(T) = \sum_T \frac{(t-1)!\,(n-t)!}{n!},$$

где

$\gamma_i(T)$ – это вероятность того, что i-й игрок вступит в коалицию $T\setminus\{i\}$;

суммирование по T распространяется на все такие выигрывающие коалиции T, что коалиция $T\setminus\{i\}$ не является выигрывающей.

Вектор Шепли удовлетворяет всем аксиомам Шепли и является заданием принципа оптимальности в кооперативной игре, когда С-ядро пусто или когда оно не пусто, но вектор Шепли ему не принадлежит.

<u>Пример 2</u>. Рассматривается корпорация из четырёх акционеров, имеющих акции соответственно в следующих размерах:

$$a_1 = 10,\ a_2 = 20,\ a_3 = 30,\ a_4 = 40.$$

Любое решение утверждается акционерами, имеющими в сумме большинство акций. Это решение считается выигрышем, равным 1. Поэтому данная ситуация может рассматриваться как простая игра четырёх игроков, в которой выигрывающими являются следующие коалиции:

$\{2; 4\}$, $\{3; 4\}$,

$\{1; 2; 3\}$, $\{1; 2; 4\}$, $\{2; 3; 4\}$, $\{1; 3; 4\}$,

$\{1; 2; 3; 4\}$.

Найти вектор Шепли для этой игры

Решение

При нахождении φ_1 необходимо учитывать, что имеется только одна коалиция $T = \{1; 2; 3\}$, которая выигрывает, а коалиция $T\setminus\{1\} = \{2; 3\}$ не выигрывает. В коалиции T имеется $t = 3$ игрока, поэтому

$$\varphi_1 = \frac{(t-1)!\ (n-t)!}{n!} = \frac{2!\ \cdot 1!}{4!} = \frac{1}{12}.$$

Далее, определяем все выигрывающие коалиции, но не выигрывающие без 2-го игрока: $\{2; 4\}$, $\{1; 2; 3\}$, $\{1; 2; 4\}$. Поэтому

$$\varphi_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично получаем, что $\varphi_3 = \frac{1}{4}$, $\varphi_4 = \frac{5}{12}$.

В результате получаем, что вектор Шепли равен $\left(\frac{1}{12}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{5}{12}\right)$. При этом, если считать, что вес голоса акционера пропорционален количеству имеющихся у него акций, то получим следующий вектор голосования

$\left(\frac{1}{10}; \frac{2}{10}; \frac{3}{10}; \frac{4}{10}\right)$,

который, очевидно, отличается от вектора Шепли.

Анализ игры показывает, что компоненты 2-го и 3-го игроков равны, хотя третий игрок имеет больше акций. Это получается вследствие того, что возможности образования коалиций у 2-го и 3-го игрока одинаковые. Для 1-го и 4-го игрока ситуация естественная, отвечающая силе их капитала.

<u>Пример 3.</u> Пусть n различных потребителей должны построить хранилища спецпродукции, при нарушении правил хранения которой может возникнуть опасная ситуация. Затраты на строительство зависят от объема хранилищ. Потребности в продукции потребителей определяются функциями $f_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$.Для постройки хранилищ потребители могут организовывать коалиции $S \subset N$, $N=\{1,2,\ldots,n\}$. Затраты на создание хранилищ заданы такой возрастающей функцией, что характеристическая функция принимает значения:

Коалиция	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}
$\upsilon(S)$	2	3	2.5	4	3.9	5	6

Определить число хранилищ и коалиции, которые их будут строить. Члены коалиции равноправны.

Решение

Для вычисления распределения расходов между членами коалиции воспользуемся вектором Шепли (4).

1. Вклад 1-го потребителя, если создается коалиция S = {1,2,3} равен:

$$\varphi_{1(2,\,3)}(\upsilon)=\frac{2!\cdot 0!}{3!}(6-5)+\frac{1!\cdot 1!}{3!}(4-3)+\frac{1!\cdot 1!}{3!}(3.9-2.5)\frac{0!\cdot 2!}{3!}(2-0)=\frac{7}{5}=1.4\,,$$

где ↕ ↕ ↕ ↕

$n = 3,\ \ t = 3 \qquad t = 2 \qquad t = 2 \qquad t = 1$

<u>6→{1, 2, 3}</u>, 5→{2, 3}, 4→{1, 2}, 3→{2}, 3.9→{1, 3}, 2.5→ {3}, 2→{1}, 0→{0}

*В*ыигрыш $\upsilon(S)$=6 коалиции S = {1,2,3} и т. д.

Вклад 2-го потребителя, если создается коалиция S = {1,2,3} равен:

$$\varphi_{2(1,\,3)}(\upsilon)=\frac{2!\cdot 0!}{3!}(6-3.9)+\frac{1!\cdot 1!}{3!}(4-2)+\frac{1!\cdot 1!}{3!}(5-2.5)\frac{0!\cdot 2!}{3!}(3-0)=\frac{49}{20}=2.45\,,$$

где ↕ ↕ ↕ ↕

$n = 3,\ \ t = 3 \qquad t = 2 \qquad t = 2 \qquad t = 1$

6→{1, 2, 3}, 3.9→{1, 3}, 4→{1, 2}, 2→{1}, 5→{2, 3}, 2.5→ {3}, 3→{2}, 0→{0}

Вклад 3-го потребителя, если создается коалиция S = {1,2,3} равен:

$$\varphi_{3(1,\,2)}(\upsilon)=\frac{2!\cdot 0!}{3!}(6-4)+\frac{1!\cdot 1!}{3!}(3.9-2)+\frac{1!\cdot 1!}{3!}(5-3)\frac{0!\cdot 2!}{3!}(2.5-0)=\frac{43}{20}=2.15\,,$$

где ↕ ↕ ↕ ↕

$n = 3,\ \ t = 3 \qquad t = 2 \qquad t = 2 \qquad t = 1$

6→{1, 2, 3},4→{1,2}, 3.9→{1, 3}, 2→{1}, 5→{2, 3}, 3→ {2}, 2.5→{3}, 0→{0}

2. Вклад 1-го потребителя, если создается коалиция S = {1,2} равен:

$$\varphi_{1(2)}(\upsilon)=\frac{1!\cdot 0!}{2!}(4-3)+\frac{0!\cdot 1!}{2!}(2-0)=\frac{3}{2}=1.5\,,$$

где ↕ ↕

$n = 2,\ \ t = 2 \qquad t = 1$

4→{1, 2}, 3→{2}, 2→{1}, 0→{0}

Вклад 1-го потребителя, если создается коалиция $S = \{1,3\}$ равен:

$$\varphi_{1(3)}(\upsilon) = \frac{1! \cdot 0!}{2!}(3.9 - 2.5) + \frac{0! \cdot 1!}{2!}(2 - 0) = \frac{34}{20} = 1.7,$$

где $\updownarrow$ $\updownarrow$

n = 2, *t* = 2 *t* = 1

3.9→{1, 3}, 2.5→{3}, 2→{1}, 0→{0}

Вклад 2-го потребителя, если создается коалиция $S = \{2,1\}$ равен:

$$\varphi_{2(1)}(\upsilon) = \frac{0! \cdot 1!}{2!}(4 - 2) + \frac{0! \cdot 1!}{2!}(3 - 0) = \frac{5}{2} = 2.5,$$

где $\updownarrow$ $\updownarrow$

n = 2, *t* = 2 *t* = 1

4→{1, 2}, 2→{1}, 3→{2}, 0→{0}

Вклад 2-го потребителя, если создается коалиция $S = \{2,3\}$ равен:

$$\varphi_{2(3)}(\upsilon) = \frac{0! \cdot 1!}{2!}(5 - 2.5) + \frac{0! \cdot 1!}{2!}(3 - 0) = \frac{11}{4} = 2.75,$$

где $\updownarrow$ $\updownarrow$

n = 2, *t* = 2 *t* = 1

5→{3, 2}, 2.5→{3}, 3→{2}, 0→{0}

Вклад 3-го потребителя, если создается коалиция $S = \{3,1\}$ равен:

$$\varphi_{3(1)}(\upsilon) = \frac{0! \cdot 1!}{2!}(3.9 - 2) + \frac{0! \cdot 1!}{2!}(2.5 - 0) = \frac{11}{5} = 2.2,$$

где $\updownarrow$ $\updownarrow$

n = 2, *t* = 2 *t* = 1

3.9→{1, 3}, 2→{1}, 2.5→{3}, 0→{0}

Вклад 3-го потребителя, если создается коалиция $S = \{3,2\}$ равен:

$$\varphi_{3(2)}(\upsilon) = \frac{0! \cdot 1!}{2!}(5 - 3) + \frac{0! \cdot 1!}{2!}(2.5 - 0) = \frac{9}{4} = 2.25,$$

где $\updownarrow$ $\updownarrow$

n = 2, *t* = 2 *t* = 1

5→{2, 3}, 3→{2}, 2.5→{3}, 0→{0}

3. Вклады потребителей, если они входят в коалиции S={1}, S={2}, S={3} заданы в таблице и равны:

$\varphi_{1(1)}(\upsilon) = 2$, $\varphi_{2(2)}(\upsilon) = 3$, $\varphi_{3(3)}(\upsilon) = 2.5$

Сравним вычисленные вклады для потребителей при вхождении их в различные коалиции.

Имеем:

$\varphi_{1(1)}(\upsilon) >$	$\varphi_{1(2)}(\upsilon) >$	$\varphi_{1(2,3)}(\upsilon)$	$\varphi_{1(1)}(\upsilon) >$	$\varphi_{1(3)}(\upsilon) >$	$\varphi_{1(2,3)}(\upsilon)$
2	1.5	1.4	2	1.7	1.4
$\varphi_{2(2)}(\upsilon) >$	$\varphi_{2(1)}(\upsilon) >$	$\varphi_{2(1,3)}(\upsilon)$	$\varphi_{2(2)}(\upsilon) >$	$\varphi_{2(3)}(\upsilon) >$	$\varphi_{2(1,3)}(\upsilon)$
3	2.5	2.45	3	2.75	2.45
$\varphi_{3(3)}(\upsilon) >$	$\varphi_{3(1)}(\upsilon) >$	$\varphi_{3(1,2)}(\upsilon)$	$\varphi_{3(3)}(\upsilon) >$	$\varphi_{3(2)}(\upsilon) >$	$\varphi_{3(1,2)}(\upsilon)$
2.5	2.2	2.15	2.5	2.25	2.15

Так как вектор Шепли в данном примере характеризует затраты на создание хранилищ, то из сравнения вкладов видно, что потребителям выгоднее объединиться в коалицию $S = \{1,2,3\}$ и строить одно хранилище.

Пример 4. Решить пример 3 (строительство хранилища спецпродукции) путем вычисления С-ядра.

Решение

Составим соотношения (4 уравнения для 3 неизвестных):

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1 + x_3 \geq 3.9$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 \geq 2,\quad x_2 \geq 3,\quad x_3 \geq 2.5$$

Для нахождения x_1, x_2, x_3 получаем следующие системы из 3-х неизвестных:

I. $x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$

$x_2 + x_3 \geq 5$

$x_1 + x_3 \geq 3.9$

$x_1 \geq 2,\ \ x_2 \geq 3,\ \ x_3 \geq 2.5$

II. $x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$

$x_2 + x_3 \geq 5$

$x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 2,\ \ x_2 \geq 3,\ \ x_3 \geq 2.5$

III. $x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$

$x_1 + x_3 \geq 3.9$

$x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 2,\ \ x_2 \geq 3,\ \ x_3 \geq 2.5$

IV. $x_2 + x_3 \geq 5$

$x_1 + x_3 \geq 3.9$

$x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 2,\ \ x_2 \geq 3,\ \ x_3 \geq 2.5$

Решением этих систем являются соответственно:

I − ($x_1 = 1,\ x_2 = 2.1,\ x_3 = 2.9$); II − ($x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 2$);

III − ($x_1 = 1.9,\ x_2 = 2.1,\ x_3 = 2$); IV − ($x_1 = 1.45,\ x_2 = 2.55,\ x_3 = 2.45$).

Видно, что эти значения в совокупности не удовлетворяют условиям:

$$x_1 \geq 2,\ \ x_2 \geq 3,\ \ x_3 \geq 2.5.$$

Отсюда делаем вывод, что С-ядро пустое и принцип оптимальности надо искать на основе вычисления вектора Шепли.

Задание:

1) В соответствии с номером в списке группы составить кооперативную игру, найти решение на основе вычисления вектора Шепли при n=4.
2) В соответствии с номером в списке группы составить кооперативную игру, найти решение на основе вычисления С-ядра при n=3.