Министерство образования и науки Российской Федерации

КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. А. Н. ТУПОЛЕВА

Филиал «Восток»

Кафедра естественнонаучных дисциплин

и инженерной экологии

М. А. Семина

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Сборник задач

Казань – 2005

Список используемых обозначений

$\leftrightarrow$ – равносильность (эквивалентность)

$\wedge$ – и (конъюнкция)

$\vee$ – или (дизъюнкция)

$\forall$ – любой

$\exists$ – существует

$\exists!$ – существует и единственно

$\nexists$ – не существует

$\Rightarrow$ – следует

: – такое что

$\to$ – стремится выполнять равенство

∞ – бесконечность, бесконечное множество

N, Z, Q, R, C – множества натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных чисел, соответственно

R^n – n-мерное пространство

R_+ – пространство с положительными значениями переменных

$=$ – тождественно

$\subset$ – включает

$\in$ – принадлежит

$\subseteq$ – включает или равно

$\notin$ – не принадлежит

$\emptyset$ – пустое множество

$\cup$ – объединение множеств

$\cap$ – пересечение множеств

$\setminus$ – разность множеств

$\dot{\to}$ – отображение множеств, соответствие

$\dot{\leftrightarrow}$ – взаимнооднозначное соответствие

$\Downarrow$ – прямое действие (определение, теорема)

– обратное

⊕, ⊖, ⊗, ⊙ – сложение, вычитание, умножение и деление, соответственно

Ⓟ, ⓥ, – возведение в степень и извлечение корня

ⓓ, ⓢ, – дифференцирование и интегрирование

<u>О:</u> – определение

► – начало решения
◄ – конец решения
т. – точка
1° – свойство 1
{} – элементы множества, неопределенность
$\overline{1,n}$ – все значения от 1 до n
$U_{\delta}(M)$ – дельта-окрестность т. M
$C_{[a,b]}$ – множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$
λ – диаметр ограниченной фигуры (тела)
$\overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор
$\sum$ – сумма
M – наибольшее значение функции на множестве
m – наименьшее значение функции
б.м. – бесконечно малая функция
НИ – неопределенный интеграл
КИ I р – криволинейный интеграл рода
ДИ – двойной интеграл
ПИ I р – поверхностный интеграл I рода
ТИ – тройной интеграл
Н^{с}И – несобственный интеграл
! – факториал
$\prod$ – поток векторного поля
С – циркуляция векторного поля
Δ – оператор Лапласа
∇ – оператор Гамильтона
$f: X \to Y$ – функция f, отображающая множество X в множество Y

Введение

Предлагаемый вашему вниманию сборник задач «Математический анализ», предназначен для студентов ВТУЗов. Он содержит примеры и задачи прикладного характера с решениями (для разбора на практических занятиях или самостоятельно), упражнения для самостоятельной работы, систему текущего контроля знаний (в виде расчётных заданий, контрольных и самостоятельных работ, вопросов для самопроверки) по темам «Криволинейные интегралы», «Ряды», «Поверхностные интегралы» и «Теория поля». Каждая тема снабжена перечнем основных понятий и формул, представленных в виде таблиц изображений (матриц). В конце каждой главы помещены вопросы для самопроверки, требующие активной работы читателя.

Формулировки определений даны в рамках, начало решения примеров печатается знаком ►, конец - знаком ◄.

Задачник вместе с конспектом лекций составляет учебно-методический комплекс, который ставит своей целью не только сообщить читателю сведения по высшей математике, необходимые для изучения смежных и специальных дисциплин, но и развить у него логическое мышление, содействовать развитию навыков применения математического аппарата и подготовить к самостоятельному накоплению математических знаний.

Он может быть использован студентами *I* курса инженерно-технических специальностей вузов.

1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО ДЛИНЕ ДУГИ (*I* РОДА)

(КИ *I* р)

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)\,dl}$$

$m_L = \int\limits_L \rho(x,y)\;dl$ – масса материальной кривой (физический смысл КИ *I* р)

Вычисление КИ *I* р

1. $\overset{\cup}{AB}:\; x = x(t),\; y = y(t),$ $t \in [\alpha,\beta],\; x(t),$ $y(t) \in C_{[\alpha,\beta]},$ $\exists\, x'(t),\; y'(t) \forall t \in (\alpha,\beta)$

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

2. $\overset{\cup}{AB}:\; y = y(x),\; x \in [a,b],$ $y(x) \in C_{[a,b]},\; \exists\, y'(x)$ $\forall x \in (a,b)$

$$I = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

3. $\overset{\cup}{AB}:\; r = r(\varphi),\; \varphi \in [\alpha,\beta],$ $r(\varphi) \in C_{[\alpha,\beta]},\; \exists\, r'(\varphi)$ $\forall \varphi \in (\alpha,\beta)$

$$I = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$$

1.1. Вычисление КИ I р

Примеры решений

1.1.1. Вычислить КИ I р $\int\limits_L y^2 dl,$ если $L: \; x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t),$ $t \in [0, 2\pi]$.

► Так как кривая L задана параметрически, то воспользуемся формулой для случая 1:

$$I = \int\limits_L y^2 dl = \int\limits_0^{2\pi} y^2 \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt.$$

Для этого найдём $x'(t) = a(1 - \cos t)$ и $y'(t) = a \sin t.$ Тогда

$$I = \int\limits_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)\sqrt{a^2 (1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = a^3 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{2 - 2\cos t}\, dt =$$

$$= \left\{ 1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2} \right\} = a^3 \int\limits_0^{2\pi} 8 \sin^4 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} dt = -16a^3 \int\limits_0^{2\pi} \sin^4 \frac{t}{2} d \cos \frac{t}{2} =$$

$$= -16a^3 \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2} \right)^2 d \cos \frac{t}{2} = -16a^3 \left(\cos \frac{t}{2} - \frac{1}{3}\left(2\cos^3 \frac{t}{2} \right) + \frac{1}{5}\left(\cos^5 \frac{t}{2} \right) \right) \Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 16a^3 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{256a^3}{15}. \; ◄$$

1.1.2. Вычислить $\int\limits_L y dl,$ где L – часть параболы $y^2 = 2px,$ вырезаемая параболой $x^2 = 2py.$

► Здесь кривая L задана в декартовых координатах, поэтому применим формулу случая 2:

$$I = \int\limits_L y dl = \int\limits_a^b y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Определим $y' = \left((2px)^{\frac{1}{2}} \right)' = \dfrac{p}{\sqrt{2px}}.$

Пределы интегрирования a и b определяются как абсциссы точек пересечения парабол, т. е. $A\,(0, 0)$ и $B\,(2p, 2p)$. Тогда

$$I = \int_0^{2p} \sqrt{2px}\,\sqrt{1+\left(\frac{p}{\sqrt{2px}}\right)^2}\,dx = \sqrt{p}\left(\frac{1}{3}(2x+p)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{2p} = p^2\,\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right). \blacktriangleleft$$

1.1.3. Вычислить $\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dl$, если $L:\ r = 2\varphi$ внутри $r = R$.

► Задание кривой L в полярных координатах делает необходимым применение формулы случая 3:

$$I = \int_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dl = \int_\alpha^\beta \varphi\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi.$$

Пределы изменения переменной интегрирования φ определяются как $\alpha = 0$, $\beta = \dfrac{R}{2}$ (из заданной кривой) $r' = 2$. Тогда

$$I = \int_0^{\frac{R}{2}} \varphi\sqrt{4\varphi^2+4}\,d\varphi = \int_0^{\frac{R}{2}} 2\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi = \int_0^{\frac{R}{2}} \sqrt{\varphi^2+1}\,d\left(\varphi^2+1\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\varphi^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{R}{2}} = \frac{1}{12}\left(\left(R^2+4\right)^{\frac{3}{2}}-8\right). \blacktriangleleft$$

<u>Аудиторные задачи</u>

Вычислить КИ I р. по длине дуги кривой L, если

1.1.4. $I = \int\limits_L (x+y)\,dl$, L – треугольник ABO, $A(1,0)$, $B(0,1)$, $O(0,0)$.

1.1.5. $I = \int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, $L:\ x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $t\in[0, 2\pi]$.

1.1.6. $I = \int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}\,dl$, $L:\ \left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$ ($x \ge 0$ – половина лемнискаты Бернулли).

Задание на дом

1.1.7. Вычислить $\int\limits_L \frac{ydl}{x+3z}$, если L – дуга линии $x=t,\ y=\frac{t^2}{\sqrt{2}},\quad z=\frac{t^3}{3}$ от т. $O(0,0,0)$ до т. $A\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

1.1.8. Определить $\int\limits_L xydl$, если L – четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (x\ge 0,\ y\ge 0)$.

Ответы:

1.1.4. $\sqrt{2}+1$. 1.1.5. $\frac{a^2}{3}\left(\left(1+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$. 1.1.6. $2a\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$.

1.1.7. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 1.1.8. $\frac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)}$.

Вопросы для самопроверки

1. Какая связь существует между КИ I р и ОИ?
2. В чём состоит физический смысл КИ I р?
3. Почему КИ I р не зависит от направления интегрирования?
4. Запишите выражения для дифференциала длины дуги при параметрическом задании кривой и в полярных координатах.
5. Постройте примеры интегралов $\int\limits_L f(x,y)\,dl$, распространённых на синусоиду $y=\sin x$ или гиперболу $xy=1$ и выражающихся через элементарные функции.

Литература:

[1. с.9-14; 2. с.129-131; 4. с.235-238; 5. с.301-311; 6. с.38-47].

2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО КООРДИНАТАМ
(*II* РОДА) (КИ *II* Р)

$$\boxed{I=\int\limits_{L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim_{\substack{\max \Delta x_i\to 0\\ \max \Delta y_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\left(P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_1\right.}$$

$$\vec{F}=\{P,Q\},\quad \vec{dr}=\{dx,dy\}\quad\Rightarrow\quad \text{E}=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}\vec{F}(x,y)\cdot\vec{dr}=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}}P(x,y)dx+Q(x,y)dy-$$

работа (физический смысл КИ *I* р).

$C_L=\oint\limits_{L}\vec{F}\,\vec{dr}$ - циркуляция (L – замкнут).

Вычисление КИ *II* р

1. $\overset{\smile}{AB}$: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, $x(t)$, $y(t)\in C_{[\alpha,\beta]}$, $\exists\, x'(t)$, $y'(t)\forall t\in(\alpha,\beta)$

$$I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)dt$$

2. $\overset{\smile}{AB}$: $y=y(x)$, $x\in[a,b]$, $y(x)\in C_{[a,b]}$, $\exists\, y'(x)$ $\forall x\in(a,b)$

$$I=\int\limits_{a}^{b}(P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x))dx$$

3. $\overset{\smile}{AB}$: $x=x(y)$, $y\in[c,d]$, $x(y)\in C_{[c,d]}$, $\exists\, x'(y)$ $\forall y\in(c,d)$

$$I=\int\limits_{c}^{d}(P(x(y),y)x'(y)+Q(x(y),y))dy$$

Связь между КИ *I* р и КИ *II* р

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \vec{F}\,d\vec{r} = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right) dl$$

Формула Грина

$$\underline{T}:\ P(x,y),\ Q(x,y),\ Q'_x,\ P'_y \in C[D],\ D \subset R^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint\limits_{L} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D} \left(Q'_x - P'_x\right) dxdy,\quad L = \partial D.$$

Условия независимости КИ *II* р от пути интегрирования

$P(x,y), Q(x,y), P'_y, Q'_x \in C[D]$

D– односвязная область

$D \subset R^2$

$\Rightarrow$

$$\forall L \subset D: \oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0 \ \leftrightarrow\ \forall (A,B,C,E) \in D: \int\limits_{\overset{\smile}{ACB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\smile}{AEB}} Pdx + Qdy$$

$\Updownarrow$ $\qquad$ $\Updownarrow$

$$\forall (x,y) \in D:\ P'_y = Q'_x \quad \Leftrightarrow \quad P\,dx + Q\,dy = dU,\quad U = U(x,y) -$$

определена в D

2.1. Вычисление КИ *II* р

Примеры решений

2.1.1. Вычислить КИ *II* р $\int\limits_{L} (x+y)\,dx - xdy$, если L – ломаная OBA,

$$O(0,0),\quad B(2,0),\quad A(4,2).$$

► Разобьём кривую интегрирования $\overset{\smile}{OBA}$ на две части OB и BA. Запишем их уравнения (рис. 1.1): $\overline{OB}$: $y = 0$, $\overline{BA}$: $\dfrac{x - x_B}{x_A - x_B} = \dfrac{y - y_B}{y_A - y_B}$

или $\dfrac{x-2}{4-2} = \dfrac{y-0}{2-0}$, $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{2}$ или $y = x - 2$. Тогда (случай 2):

$$I=\int\limits_{L}(x+y)dx-xdy=\int\limits_{OB}(x+y)dx-xdy+\int\limits_{BA}(x+y)dx-xdy=$$

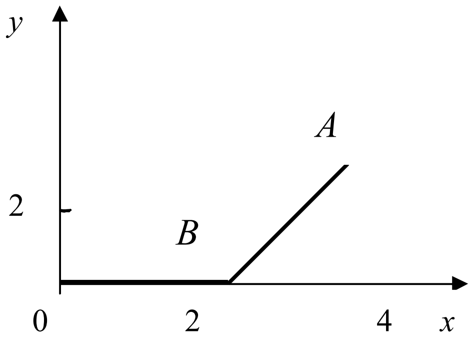


Рис. 1.1

$$=\int\limits_{0}^{2}(x+0)dx-x\cdot 0+\int\limits_{2}^{4}(x+x-2)dx-xdx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2+\frac{x^2}{2-2x}\Bigg|_2^4=2+8-8-2+4=4.\ \blacktriangleleft$$

2.1.2. Вычислить $\int\limits_{\overset{\cup}{OA}}\vec{a}\,d\vec{r}$, если $\vec{a}=z\,\vec{i}+x\,\vec{j}+y\,\vec{k}$,

$$\overset{\cup}{OA}:\ \vec{r}=t\,\vec{i}+t^2\,\vec{j}+t^3\,\vec{k},\quad t\in[0,1].$$

► Воспользуемся формулой случая 1, т. е.

$$\int\limits_{\overset{\cup}{OA}}\vec{a}\,d\vec{r}=\int\limits_{\overset{\cup}{OA}}zdx+xdy+ydz=\int\limits_{0}^{1}\big(z(t)x'(t)+x(t)y'(t)+y(t)z'(t)\big)dt=$$

$$=\{x=t,\ y=t^2,\ z=t^3,\ dx=dt, dy=2tdt,\ dz=3t^2dt\}=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}\left(t^3+t\,2t+t^2\,3t^2\right)dt=\left(\frac{t^4}{4}+\frac{2t^3}{3}+\frac{3t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{5}+0+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{91}{60}.\ \blacktriangleleft$$

Аудиторные задачи

2.1.3. Вычислить $\int\limits_{L}(x+y)dx-2ydy$, если L: 1) прямая AB, $A(0,1)$, $B(2,5)$;

2) дуга $\overset{\cup}{AB}$ параболы $y=x^2+1$; 3) ломаная ACB, $C(0,5)$.

2.1.4. Вычислить $\int\limits_{L}xydx+(y-x)dy$ вдоль $\overset{\cup}{OA}$, $O(0,0)$, $A(1,1)$, если

L: 1) $y=x$; 2) $y=x^2$; 3) $y^2=x$; 4) $y=x^3$.

2.1.5. Найти $\int\limits_{\overset{\cup}{AO}}\vec{a}\,d\vec{r}$, если $\vec{a}=-yz\,\vec{i}+xz\,\vec{j}+xy\,\vec{k}$, $\overset{\cup}{OA}$: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$,

$z = ht, \quad t \in [0, 2\pi]$.

2.1.6. Определить $\int\limits_L (2a - y)dx - (a - y)dy$, если $L: \quad x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi]$.

<u>Задание на дом</u>

2.1.7. Вычислить $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dy$, если $L -$ контур четырёхугольника $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(4,4)$ и $C(0,4)$.

2.1.8. Найти $\int\limits_{\overset{\cup}{OA}} \vec{a}\, d\vec{r}$, если $\vec{a} = y^2 \vec{i} + x^2 \vec{j}$, $O(0,0)$, $A(1,1)$, $\overset{\cup}{OA}$:

1) отрезок прямой OA; 2) дуга параболы $x^2 = y$; 3) дуга параболы $y^2 = x$; 4) ломаная OBA, $B(1,0)$; 5) ломаная OCA, $C(0,1)$.

Ответы:

2.1.3. 1) -16; 2) $-\frac{52}{3}$; 3) -12. 2.1.4. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{17}{30}$; 4) $-\frac{1}{20}$. 2.1.5. $2\pi^2 a^2 h$. 2.1.6. πa^2. 2.1.7. $\frac{12}{3}$. 2.1.8. 1) $\frac{2}{3}$; 2) 0,7; 3) 0,7; 4) 1; 5) 1.

2.2. Формула Грина. Условия независимости КИ *II* р от пути интегрирования

Примеры решений

2.2.1. Вычислить КИ *II* р $\oint\limits_L (x+y+xy)dx+(xy+x-y)dy$, где $L:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, непосредственно и по формуле Грина.

► Так как контур $L-$ эллипс, введём замену переменных

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ x'(t)=-a\sin t,\quad y'(t)=b\cos t,\quad t\in[0,2\pi]\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\oint\limits_L (x+y+xy)dx+(xy+x-y)dy=\int\limits_0^{2\pi}((a\cos t+b\sin t+ab\cos t\sin t)(-a\sin t)+$$

$$+(ab-\cos t\sin t+a\cos t-b\sin t)b\cos t)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(-a^2\sin t\cos t-ab\sin^2 t-a^2b\sin^2 t\cos t+ab^2\cos^2 t\sin t+ab\cos^2 t-b^2\sin t\cos t)dt=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(-(a^2+b^2)\cos t\sin t+ab(\cos^2 t-\sin^2 t)+a^2b\sin^2 t\cos t+ab^2\cos^2 t\sin t)dt$$

$$=\left(-(a^2+b^2)\sin^2\frac{t}{2}+ab\sin\frac{2t}{2}+a^2b\sin^3\frac{t}{3}-ab^2\cos^3\frac{t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

Используя формулу Грина, имеем:

$$I=\oint\limits_L (x+xy+xy)dx+(x-y+xy)dy=\iint\limits_D((1+y)-(1+x))dxdy=\iint\limits_D(y-x)dxdy=$$

$$=\int\limits_a^{-a}dx\int\limits_{-b\sqrt{\frac{1-x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{\frac{1-x^2}{a^2}}}(y-x)dy=\int\limits_{-a}^{a}dx\left(\frac{y^2}{2-xy}\right)\Bigg|_{-b\sqrt{\frac{1-x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{\frac{1-x^2}{a^2}}}=\int\limits_{-a}^{a}-2bx\sqrt{\frac{1-x^2}{a^2}}dx=$$

$$=a^2b\int\limits_{-a}^{a}\sqrt{\frac{1-x^2}{a^2}}d\left(\frac{1-x^2}{a^2}\right)=\frac{2a^2b}{3}\left(\frac{1-x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-a}^{a}=0.\ ◄$$

2.2.2. Проверить, что $\oint\limits_L f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{xdy-ydx}{x^2}=0$ для любой дифференцируемой функции $f\left(\frac{y}{x}\right)$.

► Запишем формулу Грина $\oint\limits_L P\,dx+Q\,dy=\iint\limits_D\left(Q'_x-P'_y\right)dxdy$. Найдём Q'_x и P'_y:

$$Q'_x=\left(\frac{1}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)\right)'_x=f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$P'_y=\left(-\frac{y}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)\right)'_y=-\frac{1}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right);$$

т. е. $Q'_x=P'_y$ и ДИ $\iint\limits_D\left(Q'_x-P'_y\right)dxdy$ равен 0 для любой дифференцируемой функции $f\left(\frac{y}{x}\right)$ и любого замкнутого контура L. ◄

Аудиторные задачи

I. Используя формулу Грина, вычислить интегралы:

2.2.3. $\oint\limits_L y^2dx+(x+y)^2dy$, если $L-\ \Delta ABC$, $A(a,0)$, $B(a,a)$, $C(0,a)$.

2.2.4. $\oint\limits_L\left(x^2-y^2\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy$, если $L:\ \ y=\sqrt{R^2-x^2}$, $\quad y=0$.

2.2.5. $\oint\limits_L(x+y)^2dx-(x-y)^2dy$, если $L:\ \ y=\sin x$, $\quad y=0$, $\quad x\in[0,\pi]$.

II. Проверить, что КИ *II* р, взятые по замкнутым контурам L, равны 0 независимо от вида подинтегральных функций.

2.2.6. $\oint\limits_L\varphi(x)dx+\psi(y)dy$.

2.2.7. $\oint\limits_L f(xy)(ydx+xdy)$.

2.2.8. $\oint\limits_L\left(f(x+y)+f(x-y)\right)dx+\left(f(x+y)-f(x-y)\right)dy$.

Задание на дом

2.2.9. Написать и проверить формулу Грина для $\oint\limits_L (x+y)dx - 2xdy$ для контура ΔOAB, $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(0,a)$.

2.2.10. Используя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_L x^2ydx - xy^2dy$, если $L:\ x^2+y^2=R^2$.

2.2.11. Доказать, что величина интеграла $\oint\limits_L (2xy-y)dx + x^2dy$ равна площади области, ограниченной контуром L.

2.2.12. Доказать, что $\oint\limits_L f\left(x^2+y^2\right)(xdx+ydy)=0$.

Ответы:

2.2.3. $\dfrac{2a^3}{3}$. 2.2.4. $\dfrac{4R^3}{3}$. 2.2.5. -4π. 2.2.10. $-\dfrac{\pi R^4}{2}$.

Вопросы для самопроверки

1. Как вычислить КИ *II* р с помощью ОИ, если уравнение линии интегрирования дано в параметрическом виде?

2. Что означает независимость КИ *II* р от пути интегрирования? Почему величина $\int\limits_L ydx + xdy$ не зависит от пути интегрирования, если $L-$ ломаная OBA, $A(4,2)$, $B(2,0)$?

3. Доказать, что циркуляция $\oint\limits_L \left(yx^3+e^y\right)dx + \left(xy^3+xe^y-2y\right)dy$ равно 0, если $L-$симметрична относительно начала координат.

4. Что называется первообразной от полного дифференциала? Подберите U так, чтобы выражение $\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{\left(x^2+y^2\right)^n}$ было полным дифференциалом и найдите первообразную.

5. Доказать, что $\oint (2xy-y)dx + x^2dy = S_D$, где $\partial D = L$.

Расчетное задание «Криволинейные интегралы»

Принятые обозначения:

n=N – номер студента по списку группы;

Γ – вторая цифра номера группы;

$\sum$ – сумма двух последних цифр номера группы;

Φ – номер факультета;

λ=1+остаток $\dfrac{N+\Sigma}{5}$; μ=1+остаток$\dfrac{N+\Gamma}{4}$; ν=1+остаток$\dfrac{N+\Phi}{3}$.

I. Вычислить КИ $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(x,y)dl$, если $\overset{\cup}{AB}$– дуга кривой L, заключённая между точками A и B.

1. $f(x,y)=\lambda\, y^{\nu}\left(1+(-1)^n\right)+(x+\mu)\left(1-(-1)^n\right)$, $L:\ x=(\mu+\nu)(t-\sin t)$,
$y=(\mu+\nu)(1-\cos t)$, $A(0,0)$, $B(\pi(\mu+\nu),\ 2(\mu+\nu))$.

2. $f(x,y)=\dfrac{x}{(\lambda+1)^{\frac{\nu}{3}}}+(-1)^n\mu\, y$, $L:\ x=(\lambda+1)\cos^3 t$, $y=(\lambda+1)\sin^3 t$,

$$A(\lambda+1,0),\quad B\left(3(\lambda+1)\frac{\sqrt{3}}{8},\ \frac{(\lambda+1)}{8}\right).$$

3. $$f(x,y)=\frac{\left(1+(-1)^n\right)(\nu+1)x\,y}{\sqrt{1+4(2\lambda-y)}+\left(1-(-1)^n\right)}\,\frac{(\mu+\lambda)y^3-(\lambda+\nu)y^2+2\lambda\, y-\mu}{\sqrt{1+e^{2y}}},$$

$$L:\quad y=\left(1+(-1)^n\right)\left(2\lambda-x^2\right)+\frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\ln(x+2\nu)\right),$$

$$A\left(0{,}5\left(1-(-1)^n\right)\mu,\ 0{,}5\left(1+(-1)^n\right)y\right),\quad B\left(\left(1+(-1)^n\right)+0{,}5\left(1-(-1)^n\right)\left(e^{2\lambda}-2\nu\right),\ y\right).$$

4. $$f(x,y)=\left(1+(-1)^n\right)\left(2\mu x^4 y+(\lambda-\nu)x^2y^3+(\mu+\nu)y^5\right)+$$
$$+\left(1-(-1)^n\right)\sqrt{\left(\nu^2x\right)^2+\left(\mu^2y\right)^2},$$
$$L:\qquad y=\frac{1}{2}\left(\left(1+(-1)^n\right)\sqrt{2\nu-x^2}+\left(1-(-1)^n\right)\frac{\sqrt{(\nu\mu)^2-(\nu x)^2}}{\mu}\right),$$
$$A\left(0{,}5\left(1-(-1)^n\right)\mu,\ 0{,}5\left(1+(-1)^n\right)y\right),\ B\left(\left(1+(-1)^n\right)\nu,\ \frac{\left(1+(-1)^n\right)y}{2}+\frac{\left(1-(-1)^n\right)\nu}{2}\right).$$

5. $$f(x,y)=(\mu+\nu)x-(-1)^n(\lambda-2)y,$$
$$L:\qquad r=\left(\lambda\left(1+(-1)^n\cos\varphi\right)\right)\frac{1+(-1)^n}{2}+\mu\left(\cos\varphi-(-1)^n\sin\varphi\right)\frac{1-(-1)^n}{2},$$
$$A(0,y),\ B(x,0).$$

II. Вычислить КИ $\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$:

1. $$P(x,y)=\left(1+(-1)^n\right)\left(\lambda x+(-1)^n\mu y\right)+\left(1-(-1)^n\right)\nu x^2y,$$
$$Q(x,y)=\left(1+(-1)^n(\nu+1)x(-1)^n+(\lambda+\mu)y\right)+\left(1-(-1)^n\right)\nu xy^2,\qquad \text{если}$$
$$L:\qquad x=\lambda\cos t,\ y=\lambda\sin t,\qquad t\in[0,2\pi].$$

2. $P(x,y)=3\nu x\left(\lambda x+(-1)^n\mu x\right)$, $\quad Q(x,y)=\lambda\,(\mu+1)y\left(\nu x-(-1)^n2y\right)$, если $L-$ дуга $\overset{\smile}{AB}$ параболы $x=(-1)^n\lambda\, y-y^2$, $\quad A\left(0,(-1)^n\lambda\right)$, $\quad B(x,\mu\lambda)$.

3. $P(x,y)=(2\lambda+\nu)x+(-1)^n3\mu\, y$, $\;Q(x,y)=4\nu y+(-1)^n\lambda$, если $L-$ ломаная ABC, $\;A\left((-1)^n\lambda,0\right)$, $\;B\left(\left(1+(-1)^n\right)\frac{\lambda}{2},\left(1-(-1)^n\nu\right)\right)$, $\;C\left((-1)^n(\lambda+2\mu),3\nu\right)$.

4. $$P(x,y)=(-1)^n(2\mu+\nu+y),\qquad Q(x,y)=(\nu+1)x,\qquad \text{если}$$
$$L:\quad x=\lambda\,(t-\sin t),\ y=\lambda\,(1-\cos t),\qquad t\in[0,2\pi].$$

5. $P(x,y)=\dfrac{vx+y+\mu}{(x+y)^2}$, $\quad Q(x,y)=\dfrac{2vx+(-1)^n y}{(x+y)^2}$, если $L-$ отрезок прямой AB, $A\left((-1)^n v, 2\mu\right)$, $B(\mu+2, 3(\lambda+v))$.

III. С помощью формулы Грина вычислить циркуляцию

$$\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy:$$

1. $$P(x,y)=\frac{(\lambda+v)y+4\mu^3 x\ln x-2\mu x\ln y}{y},$$

$$Q(x,y)=\frac{(\lambda+1)xy^2+\mu x^2\ln y-2\mu x^2\ln x}{y^2},$$

$L:\quad \Delta ABC,\quad A(\lambda-1,\ \mu+v),\quad B(\lambda+\mu,\ 2v+\lambda),\quad C(2\lambda+\mu,\ 3\mu+v).$

2. $$P(x,y)=\frac{(2v+\mu)xe^{x^2+y^2}+(-1)^n\lambda\, x}{y},$$

$$Q(x,y)=(2v+\mu)ye^{x^2+y^2}-(-1)^n e^{x^2},$$

$L:\quad ABCE,\quad A(0,\lambda),\quad B(0,\ 2\lambda),\quad C(v,\ 2\lambda),\quad E(v,\lambda).$

3. $$P(x,y)=\lambda\, y^2\cos\left(xy^2\right)-(-1)^n(\mu+v)x^2y,$$

$$Q(x,y)=2\lambda\, xy\cos\left(xy^2\right)+(-1)^n\ (\mu+v)y^2x,$$

$$L:\quad x^2+y^2+(-1)^n 2(\lambda+\mu)x=0.$$

4. $$P(x,y)=\mu\, x^2+x\sqrt{\lambda^2-x^2+y^2}+(-1)^n vy^2,$$

$$Q(x,y)=\lambda\, xy-y\sqrt{\lambda^2-x^2+y^2},\quad L:\quad x^2+y^2=(-1)^n 2vy.$$

5. $P(x,y)=\dfrac{2\mu\, xy}{x^2y+\lambda}+(-1)^n(v+1)x^2y$, $\quad Q(x,y)=\dfrac{\mu x^2}{x^2y+\lambda}-(-1)^n\ vx$,

$$L:\quad y=(-1)^n x^2,\quad x=y^2.$$

Самостоятельная работа «Криволинейные интегралы»

I. Вычислить:

а) $\int\limits_{L} x\,dl$, если $L-$ отрезок прямой, соединяющей точки $A(0,0)$ и $B(1,2)$.

б) $\int\limits_{L_{AB}} (x+y)dx+(x-y)dy$, если $L_{AB}-$ дуга параболы $y=x^2$, лежащая между точками $A(-1,1)$ и $B(1,1)$.

II. Вычислить:

а) $\int\limits_{L} x^2 y\,dl$, если $L-$ часть окружности $x^2+y^2=9$ лежащая в первом квадранте;

б) $\int\limits_{L_{AB}} (x-y)dx+(x+y)dy$, если $L_{AB}-$ отрезок прямой, соединяющий точки $A(2,3)$ и $B(3,5)$.

III. Вычислить:

а) $\int\limits_{L} \frac{dl}{x+y}$, если $L-$ отрезок прямой $y=x+2$, соединяющий точки $A(2,4)$, $B(1,3)$;

б) $\int\limits_{L_{AB}} \left(y+x^2\right)dx+(2x-y)dy$, если $L_{AB}-$ дуга параболы $y=2x-x^2$, расположенная между точками $A(1,1)$ и $B(3,-3)$.

3. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ (ЧР)

ЧР: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$

1. Знакоположительные ЧР $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n,\ U_n > 0\ \forall n \in N$

2. Знакочередующиеся ЧР $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_n,\ U_n > 0\ \ \forall n \in N$

3. Знакопеременные ЧР $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n,\ U_n > 0\ \forall n \in N$

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k, \quad S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = A \neq \infty \quad \vee\ \nexists \ \to$ ЧР сходится

$S -$ сумма ряда; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{q^n} -$ сход. при $|q|<1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} -$ сход. при $p>1$

<u>Свойства ЧР:</u> 1°. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \quad \leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-k} = S - S_k, \quad S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} U_i.$

2°. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n, \quad \delta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n, \quad W_n = aU_n + bV_n \quad \to \quad \exists\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} W_n = aS + b\delta.$

Необходимый признак сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$

1. Достаточные признаки сходимости

- Признаки сравнения
  - Сравнения $\Rightarrow$ $\exists N: 0 \le U_n \le V_n$ $\forall n\ \ N$ $\Rightarrow$ $\overbrace{\sum V_n - \text{сх.}\ \sum U_n - \text{расх.}}$
  - Предельный $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = A \neq 0\ (\infty)$ $\Rightarrow$ $\sum U_n, \sum V_n -$ сход. (расх.) одновременно
- Признак Д' Аламбера $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = l$
- Признаки Коши
  - Радикальный $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = l$ $\Rightarrow$ $\overbrace{l<1\ \ l>1}$
  - Интегральный $\Rightarrow$ $I = \int\limits_1^{\infty} f(x)dx,\ U_n = f(n)$ $\Rightarrow$ $\overbrace{I - \text{сх.}\quad I - \text{расх.}}$

$\sum U_n$ – сх. $\sum V_n$ – расх.

$l<1$ — сх.; $l>1$ — расх.; $l=1$ — доп. исслед.

сх. расх.

$\sum U_n$ – сх. $\sum U_n$ – расх.

2. Признак Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}U_n - \text{сх.}, \quad 0<S\le U_1$$

1. $U_1>U_2>\ldots>U_n>\ldots$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$

3. Сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n,\ \ U_n\Big|{\scriptstyle\ge \atop <}0$

абсолютная

$$\sum_{n=1}^{\infty}|U_n| - \text{сход.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}U_n,\ \ U_n\Big|{\scriptstyle\ge \atop <}0 - \text{сх.}$$

абсолютно (+ +)

условная

$$\sum_{n=1}^{\infty}|U_n| - \text{расх.} \quad \sum_{n=1}^{\infty}U_n - \text{сх.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}U_n,\ \ U_n\Big|{\scriptstyle\ge \atop <}0 - \text{сх.}$$

условно (+ −)

3.1. Знакоположительные ЧР. Признаки сходимости

Примеры решений

3.1.1. Показать, что ЧР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ сходится, и найти его сумму.

► Так как дробь $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ можно представить в виде разности $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$, то $n-$ю частичную сумму ряда можно записать как

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$$

$$=0{,}5\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)==0{,}5\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 0{,}5\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=0{,}5,$$

т. е. заданный ряд сходится и его сумма равна 0,5.◄

3.1.2. Зная, что ЧР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ сходится, установить сходимость ЧР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

► Так как $\forall n\in N$ $\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, то по признаку сравнения (см. таблицу) будет сходиться и исследуемый ЧР. ◄

3.1.3. Исследовать сходимость ЧР, для которого $U_n=\frac{1}{n!}$.

► Члены данного ряда меньше соответствующих членов заведомо сходящегося ряда (геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{2}$) или равны им: $V_n=\frac{1}{2^{n-1}}$. Это следует из того, что $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\ge 2^{n-1}$, т. е. $\frac{1}{n!}\le\frac{1}{2^{n-1}}$ Значит исследуемый ЧР сходится по признаку сравнения. ◄

3.1.4. Исследовать сходимость ряда с $U_n=\frac{2n-1}{n^2+n-1}$.

► Используем для исследования предельный признак сравнения. В качестве известного ряда возьмём гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который сходится. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{U_n}{V_n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n^2-n+1}:\frac{1}{n}=2\neq 0$ (∞), т. е. ЧР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U_n$ расходится. ◄

3.1.5. Исследовать сходимость ЧР с $U_n = \dfrac{n^5}{3^n}$.

► Если выражение для U_n содержит показательную функцию (в нашем случае 3^n), удобно для исследования использовать признак Д' Аламбера (см. таблицу). Для U_{n+1} имеем: $U_{n+1} = \dfrac{(n+1)^5}{3^{n+1}}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^5}{3^{n+1}} : \frac{n^5}{3^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5}{(3n)^5} = \frac{1}{3} < 1.$$

Значит данный ряд сходится. ◄

3.1.6. Исследовать сходимость ЧР с $U_n = \dfrac{4^n n!}{n^n}$.

► По признаку Д' Аламбера имеем $U_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{4}{e} > 1,$$

т. е. исследуемый ряд расходится. ◄

3.1.7. Исследовать сходимость ЧР с $U_n = \dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

► Если выражение для U_n позволяет извлечь корень $n-$ой степени, то обычно применяют радикальный признак Коши (см. таблицу). Имеем

$$\sqrt[n]{U_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Можно говорить о том, что данный ряд сходится. ◄

3.1.8. Исследовать сходимость ЧР $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, если $U_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$.

► Если выражение для $U_n = f(n)$ позволяет достаточно легко ответить на вопрос о сходимости Н^{с}И $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$, то применяют интегральный признак Коши (см. таблицу). В данном случае:

$$I = \int\limits_1^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} \frac{2xdx}{x^2+1} = \ = \lim_{b\to\infty} \ln\left(1+x^2\right)\Big|_1^b = \infty,$$

т. е. Н^{с}И расходится, а значит расходится и исследуемый ЧР.◄

3.1.9. Исследовать сходимость ЧР с $U_n = \dfrac{1}{n\ln^3 n}$, $n \geq 2$.

► Имеем:

$$f(x) = \frac{1}{x\ln^3 x} \qquad \text{и}$$

$$I = \int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_2^{b} \frac{dx}{x\ln^3 x} = = \lim_{b\to\infty} \int\limits_2^{b} \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_2^b = \frac{1}{2\ln^2 2} \text{ -}$$

сходится.

Согласно интегральному признаку будет сходиться и заданный ЧР. ◄

Аудиторные задачи

I. Доказать сходимость и найти сумму для ЧР:

3.1.10. $U_n = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

3.1.11. $U_n = \dfrac{2^n + 3^n}{6^n}$.

3.1.12. $U_n = \dfrac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

II. Используя признаки сравнения, исследовать на сходимость ЧР:

3.1.13. $U_n = \dfrac{1}{3n-1}$.

3.1.14. $U_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

3.1.15. $U_n = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4n}$.

III. Исследовать на сходимость при помощи признака Д' Аламбера ЧР:

3.1.16. $U_n = \dfrac{1}{(2n+1)!}$.

3.1.17. $U_n = \dfrac{n^2+5}{2^n}$.

3.1.18. $U_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)}{3^n \, n!}$.

IV. Пользуясь радикальным признаком, исследовать на сходимость ЧР:

3.1.19. $U_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

3.1.20. $U_n = \dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$.

3.1.21. $U_n = \arcsin^n\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

V. При помощи интегрального признака исследовать сходимость ЧР:

3.1.22. $U_n = \dfrac{n}{(1+n)^3}$.

3.1.23. $U_n = \left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)^2$.

3.1.24. $U_n = \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}, \qquad n \ge 2$.

<u>Задание на дом</u>

3.1.25. Найти S_n и S, доказав сходимость ЧР с

а) $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$,

б) $U_n = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Исследовать на сходимость ЧР:

3.1.26. $U_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

3.1.27. $U_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

3.1.28. $U_n = \dfrac{(3n+1)!}{8^n \, n^2}$.

3.1.29. $U_n = n^2 \sin\dfrac{\pi}{2^n}$.

3.1.30. $U_n = \dfrac{(n+1)!}{2^n \, n!}$.

3.1.31. $U_n = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$.

3.1.32. $U_n = \dfrac{1}{(2n+1)^2 - 1}$.

3.1.33. $U_n = \dfrac{1}{n \ln n (\ln\ln n)^2}, \qquad n \ge 3$.

Ответы:

3.1.10. $\frac{1}{3}$. 3.1.11. $\frac{3}{2}$. 3.1.12. $\frac{1}{8}$. 3.1.13. Расх.

3.1.14. Расх. 3.1.15. Сход. 3.1.16. Сход. 3.1.17. Сход.

3.1.18. Сход. 3.1.19. Сход. 3.1.20. Сход. 3.1.21. Сход.

3.1.22. Сход. 3.1.23. Сход. 3.1.24. Расх.

3.1.25. а) $S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n-2)}\right)$, $S = \frac{1}{4}$. б) $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $S = 1$.

3.1.26. Сход. 3.1.27. Расх. 3.1.28. Расх. 3.1.29. Сход.

3.1.30. Сход. 3.1.31. Сход. 3.1.32. Сход. 3.1.33. Сход.

3.2. Знакочередующиеся ЧР. Признак Лейбница

Примеры решений

3.2.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

► Так как $U_n = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n+1} = U_{n+1}$ $\forall\, n \in N$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, то выполнены условия 1 и 2 признака Лейбница (см. таблицу), и данный ряд сходится. ◄

3.2.2. Исследовать на сходимость ряд $\frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \ldots$.

► В признаке Лейбница существенным требованием является монотонное убывание (условие 1). Если оно не выполнено, то знакочередующийся ЧР может оказаться расходящимся. В данном примере $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$, но ЧР расходится, так как его частичная сумма с номером $2n$ $S_{2n} = \frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{1} - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{2}{n} - \frac{1}{n}$ является n-й частичной суммой гармонического ряда и, следовательно, неограниченно возрастает при $n \to \infty$. ◄

Аудиторные задачи

Исследовать на сходимость следующие знакочередующиеся ЧР:

3.2.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

3.2.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\ln(n+1)}$.

3.2.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\,2^n}$.

3.2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$.

3.2.7. $\frac{1}{3}-1\cdot\frac{4}{3\cdot 5}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot\frac{3n-2}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}+\ldots$.

3.2.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$.

Задание на дом

Вычислить, какие из данных рядов сходятся и какие расходятся:

3.2.9. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{2\ln 4}+\frac{1}{3\ln 4}-\frac{1}{4\ln 8}+\ldots$.

3.2.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5n-2}$.

3.2.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

Ответы:

3.2.3. Сход. 3.2.4. Сход. 3.2.5. Сход. 3.2.6. Сход.

3.2.7. Расх. 3.2.8. При $|a|\geq 1$ сход., $|a|<1-$ расх. 3.2.9. Сход.

3.2.10. Расх. 3.2.11. Сход.

3.3. Знакопеременные ЧР. Их абсолютная и условная сходимости

Примеры решений

3.3.1. Сходится ли ряд $1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}-\dots$?

► Ряд из абсолютных величин членов имеет вид $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots$ и, следовательно, сходится $\left(U_n=\frac{1}{n^p},\, p>1\right)$. Следовательно, сходится абсолютно и исходный ряд. ◄

3.3.2. Исследовать на сходимость ЧР с $U_n=\frac{\sin n\theta}{2^n}$, $\theta = const$.

► Ряд с общим членом $\frac{\sin n\theta}{2^n}$ сходится абсолютно. Действительно, $\left|\frac{\sin n\theta}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$. Справа - общий член сходящегося ряда (бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $q=\frac{1}{2}\Big)$. По признаку сравнения исходный ряд также сходится, что и доказывает наше утверждение. ◄

3.3.3. Исследовать на сходимость ЧР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

► Данный знакопеременный ЧР расходится, так как для него не выполняется необходимое условие сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)=\nexists$. ◄

Аудиторные задачи

Выяснить, какие из данных рядов сходятся абсолютно, какие условно и какие расходятся:

3.3.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{(\ln 3)^n}$.

3.3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.

3.3.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\dfrac{1}{n}$.

3.3.7. $U_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n}$.

3.3.8. $U_n = \dfrac{(-1)^{n+1}2^n}{n!}$.

3.3.9. $U_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n-1}}$.

<u>Задание на дом</u>

Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ЧР:

3.3.10. $U_n = \dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$.

3.3.11. $U_n = \dfrac{\cos n\alpha}{n}$.

3.3.12. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n \ln n (\ln\ln n)^3}$.

3.3.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$.

Ответы:

3.3.4. $++$. 3.3.5. $++$. 3.3.6. $+-$. 3.3.7. $-$. 3.3.8. $-$.
3.3.9. $+-$. 3.3.10. $++$. 3.3.11. $+-$. 3.3.12. $++$. 3.3.13. $++$.

Вопросы для самопроверки

1. При каких значениях a сходится ряд $a^2 + a^4 + a^6 + \ldots$?

Возможные ответы:

1. $|a| < 1$. 2. $|a| > 1$. 3. $|a| = 1$. 4. $a < 1$.

2. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, если известно, что ряд

1) $U_5 + U_6 + U_7 + \ldots$ сходится;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(U_n + \dfrac{1}{2^n}\right)$ сходится;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(U_n + \dfrac{1}{3^n}\right)$ расходится;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(U_n + \dfrac{1}{n}\right)$ расходится.

Возможные ответы:

1. Сходится. 2. Расходится. 3. Определённого вывода сделать нельзя.

3. В каких из случаев ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ расходится, если:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_n}{U_{n+1}}=\frac{1}{2}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\frac{1}{2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=\frac{1}{2}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\frac{1}{2}$ (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n$ расходится);

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n}=\frac{1}{2}$ (ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n$ сходится).

4. Является ли ряд с $U_n=\sin\frac{(2n-1)\frac{\pi}{4}}{3^n}$ знакочередующимся?

Возможные ответы: 1. Да. 2. Нет.

5. Каково поведение частичной суммы с чётными индексами, т. е. S_{2n}, сходящегося по признаку Лейбница ряда $U_1-U_2+U_3-U_4+\ldots$, $U_i>0$?

Возможные ответы: 1. Возрастает. 2. Убывает. 3. Колеблется.

6. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n U_n$ такой, что $\forall n\ \ 0<U_n<V_n$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}V_n$ сходится. Что можно сказать о поведении ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n U_n$?

Возможные ответы:

1. Ряд сходится только условно. 2. Ряд абсолютно сходится.

3. Ряд может сходиться, а может расходиться.

4. Ряд сходится.

Литература: [1. с.27-41; 2. с.192-205; 3. с.248-251; 4. с.168-172; 5. с.342-350; 6. с.56-67].

4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ (СР)

Функциональные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$

Степенные ряды $U_n(x) = a_n(x - x_0)^n$

Тригонометрические ряды $U_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$

1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ (1), $x_0, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots \in R$ – СР

Т (Абеля): (1) сход. в $x_1 \neq x_0 \Rightarrow$ (1) сход. абсолютно $\forall x: |x - x_0| < |x_1 - x_0|$

(1) расх. в $x_1 \neq x_0 \Rightarrow$ (1) расх. $\forall x: |x - x_0| > |x_1 - x_0|$

Радиус сходимости $R = \begin{cases} 0 \Rightarrow x = x_0 - \text{т.сходимости} \\ \infty \Rightarrow x \in R \quad \text{Интервал сходимости}: x \in (x_0 - R, x_0 + R) \\ A \Rightarrow x \in (x_0 - A, x_0 + A) \end{cases}$

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}}.$$

Свойства СР: 1°. $S = S(x)$ – сумма СР, непр. $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

2°. $S(x)$ – сумма (1) $\Rightarrow \exists\, S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$.

3°. $S(x)$ – сумма (1) $\Rightarrow \exists \int_a^b S(x)dx \ \forall [a,b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$.

4°. $S(x)$, $\int_a^b S(x)dx$ – сход. $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

2. Ряды Тейлора и Макларена

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)}{n!} \quad (2)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) x^n}{n!} \quad (3)$$

Т : $f(x)=S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) \quad \leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0,$

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} \qquad R_n(x)=f(x)-S_n(x)$$

$R_n(x)=f^{(n+1)}(\xi)\cdot\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, $\xi\in(x_0,x)$ – остаток в форме Лагранжа

Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена:

1. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$. 2. $\exists R:\ \forall x\in(-R,R)(3)$ – сход. 3. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad x\in R$$

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1}, \quad x\in R$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x\in R$$

$$(1+x)^m=1+mx+m(m-1)\frac{x^2}{2!}+\ldots+m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

$$x\in(-1,1), \quad m\in R$$

$$\ln(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}, \quad x\in(-1,1)$$

$$\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x\in(-1,1)$$

$$\arcsin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)x^{2n-1}}{2^{n-1}(n-1)!(2n-1)}, \qquad x\in(-1,1)$$

3. Применение СР к приближенным вычислениям

Вычисление значений функций	Вычисление корней	Вычисление логарифмов	Вычисление пределов	Вычисление определенных интегралов
$x_1 \in (x_0 - R,\ x_0 + R)$ $f(x_1) \approx S_n(x_1)$, $\Delta = \lvert f(x_1) - S_n(x_1) \rvert = R_n(x_1)$	$x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$	$\ln(N+1) = \ln N + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2N+1)^{2n-1}}$	$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$	$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x - x_0)^n dx$

4.1. Функциональный и степенной ряд. Радиус и интервал сходимости СР

4.1.1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$.

► Для определения области сходимости функциональных рядов обычно используется признак Д' Аламбера. Затем те значения x, для которых этот признак не решает вопроса о сходимости ряда $(l = 1)$, исследуются особо, исходя из других признаков сходимости рядов. В данном примере $U_n(x) = \frac{1}{n(x+2)^n}$, $l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \frac{1}{|x+2|}$. Ряд сходится при $\frac{1}{|x+2|} < 1$, тогда $|x+2| > 1$ или $-1 > x + 2 > 1$, отсюда $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty)$. При $x = -3$ получим знакочередующийся ряд с $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится по признаку Лейбница. При $x = -1$ получим гармонический расходящийся ряд. Область сходимости данного ряда состоит из двух интервалов

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-1, \infty). \quad ◄$$

4.1.2. Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$.

► Данный ряд сходится (как ряд Дирихле) для значений $x>1$ и расходится для значений $x\le 1$. Следовательно, область сходимости есть интервал $(1,+\infty)$. ◄

4.1.3. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sqrt[3]{\sin x}$.

► Воспользуемся радикальным признаком Коши $l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n(x)}=\sqrt[3]{\sin x}<1$ что выполняется $\forall x\neq x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$. При $x=x_k$ $\sin x=\pm 1$ и исследуемый ряд расходится. ◄

4.1.4. Найти радиус и интервал сходимости СР с $U_n=\frac{x^n}{(n+1)\,5^n}$.

► Определить радиус сходимости СР R, используя формулу (см. таблицу) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, полученную из признака Д' Аламбера. Имеем:

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\,5^n},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+2)5^{n+1}},\qquad R=\lim_{n\to\infty}5^{n+1}\frac{n+2}{(n+1)\ 5^n}=5.$$

Следовательно, СР сходится $\forall x\in(-5,5)$ – интервалу сходимости. ◄

4.1.5. Найти интервал сходимости и сумму СР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, используя его свойства.

► Воспользуемся свойством 2 СР (см. таблицу), по которому СР можно почленно дифференцировать внутри интервала его сходимости. Найдём $S'(x)=1-x^2+x^4-x^6+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1\cdot\left(-x^2\right)^{n-1}$ – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с $b=1$, $q=-x^2<1$, для которой

$S=\dfrac{b}{1-q}=\dfrac{1}{1+x^2}=S'(x)$. Интегрируя, имеем $S(x)=\int\limits_0^x S'(x)dx=\operatorname{arctg} x$. СР сходится при $|x|<1$. ◄

Аудиторные задачи

I. Определить область сходимости функциональных рядов:

4.1.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lg^n \dfrac{x}{n}$. 4.1.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^2+n^2}$. 4.1.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}^n \dfrac{x}{n^2}$.

II. Определить радиус и интервал сходимости СР:

4.1.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}10^n x^n$.

4.1.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n$.

4.1.11. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{2n}$.

4.1.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$.

4.1.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx)^n n!$.

4.1.14. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}x^n\dfrac{\ln n}{n}$.

III. Используя свойства СР, найти интервал сходимости и сумму $S(x)$:

4.1.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$. 4.1.16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3n+1)x^n$. 4.1.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

Задание на дом

4.1.18. Определить область сходимости функционального ряда с $U_n(x)=\dfrac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$.

4.1.19. Найти радиус и интервал сходимости СР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

4.1.20. Найти сумму $S(x)$ СР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

Ответы:

4.1.6. $[0.1, 10)$. 4.1.7. $(-\infty, \infty)$. 4.1.8. $x \in \left[\left(k-\frac{1}{4}\right)\pi, \left(k+\frac{1}{4}\right)\pi\right], \quad k \in z$.

4.1.9. $(-0.1, 0.1)$. 4.1.10. $x = 0$. 4.1.11. $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

4.1.12. $x \in R$. 4.1.13. $x \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. 4.1.14. $x \in (-1, 1)$.

4.1.15. $x \in [-1, 1)$, $\quad S(x) = -\ln(1-x)$. 4.1.16. $|x| < 1$, $\quad S(x) = \dfrac{1-2x}{(1+x)^2}$.

4.1.17. $|x| < 1$, $S(x) = 0{,}5\operatorname{arctg} x + \dfrac{0{,}25\ln(1+x)}{1-x}$. 4.1.18. $(-\infty, \infty)$.

4.1.19. $R = 1$, $\quad (3{,}5)$. 4.1.20. $S(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$.

4.2. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена

4.2.1. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = e^x \sin x$.

► Находим производные функции $f(x)$ и их значения в т. $x = 0$:

$$f(0) = 0;\ f'(x) = e^x(\cos x + \sin x) = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right);\quad f'(0) = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4};$$

$$f''(x) = \left(\sqrt{2}\right)^2 e^x \sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right);\quad f''(0) = \left(\sqrt{2}\right)^2 \sin\frac{2\pi}{4};$$

$$f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \cdot \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \quad f^{(n)}(0) = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}.$$

Оценим абсолютную величину остаточного члена $R_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^{\xi}\, \frac{\sin\left(\xi + (n+1)\pi/4\right) x^{n+1}}{(n+1)!}\right| < U_n =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^x\, |x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ имеем:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+2} e^x |x|^{n+2}}{(n+2)!}:\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^x |x|^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{\sqrt{2}\,|x|}{n+2}\to 0,\ R<1 \quad \forall x.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится (по признаку Д' Аламбера), а его общий член $U_n \to 0$ при $n\to\infty$ (в силу необходимого признака сходимости), поэтому и остаточный член $R_n(x)$, по модулю меньший U_n, тем более стремится к нулю при $n\to\infty$. Поэтому имеем:

$$e^x \sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\frac{x^n}{n!}, \quad x\in R. \ ◄$$

4.2.2. Написать ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ функции $f(x)=\ln(x+2)$.

► Находим производные функции $f(x)$ и их значение в точке $x=1$:

$$f(x)=\ln(x+2); \quad f(1)=\ln 3; \quad f'(x)=\frac{1}{x+2}; \quad f'(1)=\frac{1}{3}; \ \dots ;$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!(x+2)^{-n}; \quad f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{3^n}.$$

Следовательно, ряд Тейлора для $f(x)=\ln(x+2)$ имеет вид

$$\ln 3+\frac{x-1}{3}-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 3^2}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n\cdot 3^n}+\dots\ . \ ◄$$

4.2.3. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=x\ln\left(1+x^2\right)$.

► Заметим, что

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\dots \qquad (x\in(-1,1]).$$

Заменяя в последнем равенстве x на x^2, будем иметь $(x\in[-1,1])$:

$$\ln\left(1+x^2\right)=x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}+\dots,$$

а поэтому

$$x\ln\left(1+x^2\right)=x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{x^7}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{n}+\ldots \qquad \left(x\in[-1,1]\right). \blacktriangleleft$$

4.2.4. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ по степеням $(x-1)$.

► Преобразуем эту функцию так, чтобы можно было использовать разложение функции $\dfrac{1}{1-x}$. Полагая $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{a}{1+b(x-1)}$, из тождества $1+b(x-1)=a(x+2)$ найдём $a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{1}{3}$. Следовательно, $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{3\left(1+\dfrac{x-1}{3}\right)}$. Заменив в разложении функции $\dfrac{1}{1+x}$ величину x на $\dfrac{x-1}{3}$, получим:

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{x-1}{3}+\frac{(x-1)^2}{3^3}-\ldots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{3^n}+\ldots.\right).$$

Это разложение справедливо, когда $\left|\dfrac{x-1}{3}\right|<1$ или $x\in(-2,\ 4)$. ◄

4.2.5. Разложить функцию $f(x)=\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+2x}{1-x}}$ в ряд Маклорена.

► Известно, что $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$, $x\in(-1,\ 1)$. Поэтому

$$\ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n x^n}{n},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right];\quad \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\quad x\in(-1,\ 1).$$

Отсюда $\ln\sqrt[3]{\dfrac{1+2x}{1-x}}=\dfrac{1}{3}\left(\ln(1+2x)-\ln(1-x)\right)=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left((-1)^{n+1}2^n+1\right)x^n}{n}=$

$$=\frac{1}{3}\left(3x-\frac{3x^2}{2}+\frac{9x^3}{3}-\frac{15x^4}{4}+\ldots\right)=x-\frac{x^2}{2}+x^3-\frac{5x^4}{4}+\ldots,\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right). \blacktriangleleft$$

Аудиторные задачи

I. Разложить данные функции в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$:

4.2.6. $f(x)=\ln x, \quad x_0=1.$

4.2.7. $f(x)=\sqrt{x^3}, \quad x_0=1.$

4.2.8. $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}, \quad x_0=2.$

II. Разложить функции в ряд Маклорена:

4.2.9. $f(x)=\frac{1}{1+x^3}.$

4.2.10. $f(x)=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}.$

4.2.11. $f(x)=\operatorname{tg} x.$

Задание на дом

4.2.12. Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-3)$.

4.2.13. Разложить функцию $f(x)=\frac{x}{2-x}$ в ряд Маклорена.

4.2.14. Воспользовавшись разложением функции $f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}$ в ряд Маклорена, найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n-1}}$.

4.2.15. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью $\delta=10^{-4}$.

4.2.16. Зная, что $\ln 2=0{,}69315$, вычислить $\ln 3$ с точностью $\delta=10^{-5}$.

4.2.17. Вычислить ОИ $\int\limits_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью $\delta=10^{-4}$.

Ответы:

4.2.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$.

4.2.7. $1+\frac{3}{2}\left((x-1)+\frac{(x-1)^2}{2\cdot 2!}-\frac{(x-1)^3}{2^2\cdot 3!}+\ldots\right)$.

4.2.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2}\frac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!}$.

4.2.9. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}$.

4.2.10. $1-2x+2x^2-2x^4+2x^5-\dots$.　　4.2.11. $x+\dfrac{2x^3}{3!}+\dfrac{16x^5}{5!}+\dots$.

4.2.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(x-3)^{n-1}}{3^n}$.　4.2.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n}$.　4.2.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$,　$S=12$.

4.2.15. 5,0628.　4.2.16. 1,09861.　4.2.17. 0,4931.

Вопросы для самопроверки

1. Исследовать поведение функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}U^n(x)$, $U(x)=\dfrac{3x+1}{x^2+x+1}$ в точках $x=1$, 2 и 3.

Возможные ответы: 1. Сходится. 2. Расходится.

2. СР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ имеет радиус сходимости $R\neq 0$, причём при $x=R$ ряд расходится, а при $x=-R$ - сходится условно. Какова область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$?

Возможные ответы: 1. $x\in(-R,R)$; 2. $x\in[-R;R)$;

3. $x\in(-\infty,R)\cup(R,+\infty)$; 4. $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{R}\right]\cup\left(\dfrac{1}{R},+\infty\right)$;

5. $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{R}\right]\cup\left(\dfrac{1}{R},+\infty\right)$; 6. $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{R}\right]\cup\left(\dfrac{1}{R},+\infty\right)$;

3. Выбрать верные разложения в СР в окрестности т. $x=0$ для функций: 1) e^{ax}, 2) e^{a+x}.

Возможные ответы:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$; 2. $e^a\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$; 3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+a)^n}{n!}$; 4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^nx^n}{n!}$.

Расчетное задание «Числовые и степенные ряды»

Принятые обозначения:

$n = N$ – номер студента по списку группы;

$\varGamma$ – вторая цифра номера группы;

$\sum$ – сумма двух последних цифр номера группы;

$\varPhi$ – номер факультета;

$$\lambda = \frac{1 + \text{остаток}\left(N + \sum\right)}{5}; \quad \mu = \frac{1 + \text{остаток}\left(N + \varGamma\right)}{4}; \quad \nu = \frac{1 + \text{остаток}\left(N + \varPhi\right)}{3}.$$

I. Найти сумму S ЧР с $U_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(1 + (-1)^n\right)\mu}{(\mu\, k)^2 + (-1)^n(\lambda - \nu)\mu\, k - \lambda\, \nu} +\right.$

$$\left. + \frac{\left(1 - (-1)^n\right)2(\nu + 1)}{((\nu + 1)k)^2 - (-1)^n\, 2(\nu + 1)k - \left(\mu^2 - 1\right)}\right).$$

II. Исследовать на сходимость ЧР, если U_k равен

1. $$\frac{\left(1 + (-1)^n\right)\ln k + \left(1 - (-1)\right)^n \sin^{2\nu} k}{k^{\lambda} + (-1)^n k^{\lambda - 1} + \mu}.$$

2. $$\frac{\left(1 + (-1)^n\right)\operatorname{tg}\dfrac{\sqrt[\nu]{k}}{\sqrt{k^{\nu} + \mu}}}{\sqrt[\mu]{k + \lambda} + \left(1 - (-1)^n\right)\arcsin\dfrac{k}{k^{\mu} + \nu^{\frac{\lambda + 1}{\mu}}}}.$$

3. $$\frac{\left(1 + (-1)^n\right)(\mu + 1)^k\, k!}{k^k} + \frac{\left(1 - (-1)^n\right)(\lambda + 1)^k\,(\nu + 1)k!}{((1 + \nu)k)!}.$$

4. $$\frac{1}{2}\left(\left(1 + (-1)^n\right)(\nu + 1)^{k - 1} \cdot e^{-k} + \left(1 - (-1)^n\right)\left(\frac{\nu k}{\lambda\, k + \mu}\right)^{\mu\, k + \nu}\right).$$

5. $$\frac{1 + (-1)^n}{(\lambda\, k + \mu)\ln^{\frac{1}{\nu}}((\nu + 1)k + \mu)} + \frac{\left(1 - (-1)^n\right)((\mu - \nu)k + \lambda)}{(\nu + 1)k^2 + \lambda\, k + (-1)^n(\mu + \nu)}.$$

III. Исследовать на сходимость ЧР с заданным U_k:

1. $(-1)^{k+1}\left(\dfrac{\lambda k}{\mu k+\nu}\right)^{\nu k}$.

2. $\dfrac{(-1)^{k-1}}{(k+1)(\lambda/\nu)^{\mu k}}$.

3. $\dfrac{(-1)^{k}}{k\ln k(\ln\ln k)^{\frac{\lambda+1}{\mu}}}, \quad k\ge 3.$

4. $\dfrac{(-1)^{k+1}(\nu+\mu)k^{\lambda-\nu}}{k^{\mu+1}+\lambda k^{\nu}-\mu}$.

5. $\dfrac{(-1)^{k}\sin(\nu+1)^{k}}{\left(\dfrac{\mu+\nu}{\lambda+1}\right)^{k}}$.

IV. Доказать справедливость равенства ($l<1$ при применении признаков Д' Аламбера или Коши):

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\left(1+(-1)^n\right)(\nu k)^k}{\left(\nu k+(-1)^n\right)!}+\frac{\left(1-(-1)^n\right)(\lambda k)!}{(\mu+1)^{n^2}}\right)=0.$$

V. Найти область сходимости функционального ряда с заданным $U_k(x)$:

1. $\dfrac{\left(x+(-1)^n\mu\right)^{\nu k}}{(\lambda k+\mu)(\nu+1)^k}$.

2. $\dfrac{(\mu k+\nu)\left(x-(-1)^n\lambda\right)^{\mu k-1}}{\nu k^2+\lambda k+\mu}$.

3. $\dfrac{\lambda k+\mu}{(\nu k+2\lambda)^{\mu+1}\left(x+(-1)^n\lambda\right)^{\nu k}}$.

4. $\dfrac{k^2+\mu k-\lambda}{\left((\lambda+1)\left(x-(-1)^n\nu\right)\right)^{k}}$.

5. $\dfrac{\left(x+(-1)^n\mu\right)^{k^2}}{\left(\dfrac{\lambda}{\nu}\right)^{k^2}}$.

VI. Разложить функцию $f(x)=(\nu+1)x^{\nu+1}+(-1)^n x^{\nu}-\mu$ по степеням $\left(x+(-1)^n\lambda\right)$.

VII Вычислить приближенно с точностью $\delta=10^{-3}$.

1. $\left(1+(-1)^n\right)e^{-\frac{\nu}{\mu+\lambda}}+\left(1-(-1)^n\right)\cos\left(\nu+(-1)^n 4\mu\right)$.

2. $\sqrt[\nu+1]{(\mu+1)^{\nu+1}+\lambda}$.

3. $\ln(\nu+\mu)$.

4. $\left(1+(-1)^n\right)\dfrac{\sin\left(2\lambda+(-1)^n\right)}{(\mu+\nu)+\left(1-(-1)^n\right)\operatorname{arctg}\dfrac{\nu}{\mu+\nu}}$.

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\lambda}{10}}\sqrt[\mu+1]{1+x^{\nu+1}}\,dx$.

Контрольная работа «Числовые и степенные ряды»

1. Записать $U_n = f(n)$. Выполняется ли необходимое условие сходимости ЧР?

1.1. $\frac{1}{1001} + \frac{2}{2001} + \frac{3}{3001} + \dots$.

1.2. $\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \dots$.

1.3. $\sqrt{\frac{2}{1}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \dots$.

1.4. $\frac{2}{5} + \frac{4}{6} + \frac{6}{7} + \dots$.

1.5. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots$.

1.6. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$.

1.7. $\frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \dots$.

1.8. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$.

1.9. $\frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots$.

1.10. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$.

1.11. $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \dots$.

1.12. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots$.

1.13. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$.

1.14. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$.

1.15. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$.

1.16. $\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + 3^2 + \dots$.

1.17. $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots$.

1.18. $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{4} + \dots$.

1.19. $2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + 4\sqrt{4} + \dots$.

1.20. $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^3 4} + \dots$.

1.21. $1 + \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} + \dots$.

1.22. $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots$.

1.23. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots$.

1.24. $1 + \frac{1}{20} + \frac{1}{300} + \frac{1}{4000} + \dots$.

1.25. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$.

1.26. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \frac{8}{9} + \dots$.

1.27. $\frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{3}{7} + \dots$.

1.28. $\frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{16} + \frac{4}{25} + \dots$.

1.29. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots$.

1.30. $\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\ldots$.

2. Исследовать на сходимость ЧР.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n}{3^n(n+2)}$.

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^{n+2}}{n^3+3n}$.

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\, n!}{n^n}$.

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{4^{n+1}}$.

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+2n}$.

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^{n+1}}$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^{n+1}}$.

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$.

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n-3}$.

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$.

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^3+1}$.

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}$.

2.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.

2.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)!}{(4n-3)!}$.

2.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{1+n^2}$.

2.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\, 2^n}$.

2.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$.

2.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$.

2.19. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$.

2.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\left(n^3+1\right)}{(n+1)!}$.

2.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\, n!}{(2n)!}$.

2.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{2^n\,(3n+5)}$.

2.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\left(n^2-1\right)}{n!}$

2.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}$.

2.25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^{2n}}{(2n-1)!}$.

2.26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot\dfrac{(2n-1)}{3^{n}\cdot(n+1)!}$.

2.27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{n}}$.

2.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{n}}{(n+2)!\ 4^{n}}$.

2.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot\dfrac{(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$.

2.30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n+2)!}{10^{4}\ n^{2}}$.

3. Исследовать на сходимость ЧР.

3.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}$.

3.2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$.

3.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}\ 2n^{2}}{n^{4}-n^{2}+1}$.

3.4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n\ln(n+1)}$.

3.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{n}$.

3.6. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{(n+1)\ln n}$.

3.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$.

3.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n}{n!}$.

3.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\,2^{2n}}$.

3.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n}}$.

3.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}(n+3)}{\ln(n+4)}$.

3.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}(n+3)}{\ln(n+4)}$.

3.13. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{n\ln(2n)}$.

3.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cos\dfrac{\pi}{6n}$.

3.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}(2n-1)}{3n}$.

3.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}(n+1)}{\sqrt{n^{5}}}$.

3.17. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}}{(2n+1)\,2^{2n+1}}$.

3.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(n^{2}+\sin^{2}n\right)$.

3.19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n^2+\sin^2 n\right).$

3.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{7^n+1}.$

3.21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{7^n+1}.$

3.22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2-1}.$

3.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n-1}}{(3n-2)(3n+1)}.$

3.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}10^n}{n!}.$

3.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n\,(n+1)}.$

3.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2+1}.$

3.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\,3^n}.$

3.28 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}.$

3.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{\left(\sqrt{2}\right)^n}.$

3.30. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n\sqrt{n}-1}.$

4. Найти область сходимости СР или функционального ряда.

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\,9^n}.$

4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^{2n}}{2n}.$

4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^n(x-2)^n}.$

4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n-1)}.$

4.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)\,2^n}.$

4.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(x+5)^n\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}.$

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,9^n(x-1)^{2n}}.$

4.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^n}.$

4.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2\,2^{n+1}}.$

4.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)(x-3)^{2n}}.$

4.11. $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2(x+2)^n}.$

4.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{x^n}.$

4.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^{2n}}{n}.$

4.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n(x+4)^n}.$

4.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{\left(n^4+1\right)^2}.$

4.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{(n+1)5^n}.$

4.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+1)^3x^{2n}}$.

4.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.

4.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$.

4.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^3-5n)4^n}$.

4.21. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}$.

4.22. $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\ x^n$.

4.23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x+5)^{2n+1}}{(n+1)!}$.

4.24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$.

4.25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n^{n+1}}$.

4.26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3^n(x+3)^n}$.

4.27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{(2n+9)^5\ (x+2)^{2n}}$.

4.28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$.

4.29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$.

4.30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n}{(x-2)^{2n}}$.

В заключении рассмотрим решение типового билета:

1.31. Записать U_n : $\frac{2}{4}+\frac{4}{7}+\frac{6}{10}+\frac{8}{13}+\ldots$. Выполняется ли необходимое условие сходимости ЧР $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=0$?

2.31. Исследовать на сходимость ЧР $\sum_{n=1}^{\infty}1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot\frac{3n-2}{2^{n+1}!n!}$.

3.31. Исследовать на сходимость ЧР $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}(-1)^n\left(\frac{11}{10}\right)^n$.

4.31. Найти область сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\ x^n}{(2n)!}$.

► 1. Заметим, что в числителях членов заданного знакоположительного ЧР стоит выражение $2n$, а в знаменателях при $n=1-4$, $n=2-7$, $n=3-10$, $n=4-13$ или $(3n+1)$. Тогда $U_n=f(n)=\frac{2n}{3n+1}$. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} \neq 0,$$

т. е. необходимое условие сходимости ЧР не выполняется.

2. Воспользуемся признаком Д' Аламбера, согласно которому имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)(3n+1)}{2^{n+2}(n+1)!} : \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^{n+1}n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2(n+1)} = \frac{3}{2} > 1,$$

т. е. ЧР расходится.

3. Применим к заданному знакочередующемуся ЧР признак Лейбница. Имеем:

$$1)\ \frac{11}{10} > \frac{1}{2^5}\left(\frac{11}{10}\right)^2 > \frac{1}{3^5}\left(\frac{11}{10}\right)^3 > \ldots,$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^5}\left(\frac{11}{10}\right)^n = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} == \lim_{n\to\infty}\left(\frac{11}{10}\right)^n \frac{1}{5n^4}\ln\frac{11}{10} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} =$$

$$= \ldots = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{11}{10}\right)^n \frac{1}{5!}\ln^5\frac{11}{10} = \infty \neq 0.$$

Для раскрытия неопределённости $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ мы применим правило Лопиталя (5 раз). Признак Лейбница не выполняется, значит, исследуемый ряд расходится.

4. Для определения радиуса сходимости данного СР воспользуемся признаком Д' Аламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(2n+2)!}{(n+1)!(2n)!} = = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} = \infty,$$

т е. СР сходится на всей числовой оси $(x \in R)$. ◄

5. Ряды Фурье

Тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,\ a_0, a_n, b_n \in R\ \ \forall n \in N$ $\quad (1)$

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ - сход. равномерно $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists N=N(\varepsilon): n>N \Rightarrow |R_n(x)|=|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$

$\forall x\in X$ $\qquad\qquad$ $\forall x\in X$

<u>Свойства (1)</u>: $\quad$ 1°. $S(x)$ - <u>непр. и период</u>. с $\mathrm{T}=2\pi$.

2°. $\forall\varphi(x)\in\{1,\cos kx,\ \sin kx\}_{k=1}^{n} \Rightarrow \left|\varphi(x)\sum_{n=N+1}^{\infty} U_n(x)\right| < |R_n(x)| < \varepsilon.$

3°. $\exists \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(x)dx.$

Признак равномерной сходимости (Вейерштрасса): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сход. $a_n>0,$

$\exists N: \forall n\ge N\ \forall x\in X: |U_n(x)|\le a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ - сх. равномерно

$\Downarrow$

Ряд Фурье для $f(x)$

(1) с $a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx, \qquad a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right)dx,$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)dx,\ T-\text{период.} \qquad (2)$$

ряд Фурье сходится :

Т (Дирихле) : $f(x)=f(x\pm T)\ \forall x\in[a,a\pm T]$:
1. $f(x)\in C_{[a,a\pm T]}\vee\exists(x_1,...,x_k)$ – т.р. I р.
2. $\exists f(x)\ \forall x\in[a,a\pm T],\ a=x_0,x_1,...x_k=a+T$:
$f(x)$ – мнотонна и огрниченна $\forall(x_{i+1},x_i)$
$i=\overline{1,k}$

$$\Rightarrow S(x)=\begin{cases}f(x), & x-\text{т. непр.}\\ \frac{1}{2}\left(f(x_0-0)+f(x_0+0)\right)\end{cases}$$

x_0 – т.р. I р

$f(x)=f(x\pm T),\ T=2\pi$ | $f(x)=f(x\pm T),\ T=2l$ | $f(x)\neq f(x\pm T)$

$f(x)=f(-x)$ | $f(x)=-f(-x)$ 1 | $f(-x)=f(x)$ 2 | $f(-x)=-f(x)$

$x\in[0,l]\Rightarrow$
$\forall x\in[-l,0]$:

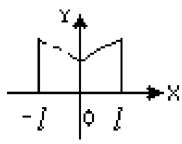
$$\left.\begin{aligned}&\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\\ &a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,\\ &a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx\end{aligned}\right\}(3)$$

1

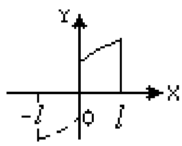
$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\\ &b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)\cdot\\ &\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{1}\right)dx\end{aligned}\right\}(6)$$

2

$f(x)=f(-x)\quad\vee\quad f(x)=-f(-x)$



(5)



(6)

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx,\\ &b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx\end{aligned}\right\}(4)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\\ &a_0=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(x)dx,\\ &a_n=\frac{2}{1}\int_0^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\end{aligned}\right\}(5)$$

5.1. Коэффициенты Фурье. Ряд функций с периодом 2π

5.1.1. Разложить периодическую с $T = 2\pi$ функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,\ \pi), \\ 0, & x \in (-\pi,\ 0) \end{cases}$ в ряд Фурье, построить графики его первых частичных сумм $S_0(x), S_1(x), S_2(x)$ и $S_3(x)$ и найти значение $S(x_0)$ суммы полученного ряда в заданной точке $x_0 = \pi$.

► График заданной функции имеет вид, изображённый на рис. 5.1 (сплошная линия), т.е. $f(x)$- произвольного вида и ряд Фурье имеет вид (1) с коэффициентом (2). Имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1dx = \frac{x}{\pi}\Big|_0^{\pi} = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx =$$

$$= \frac{1}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx =$$

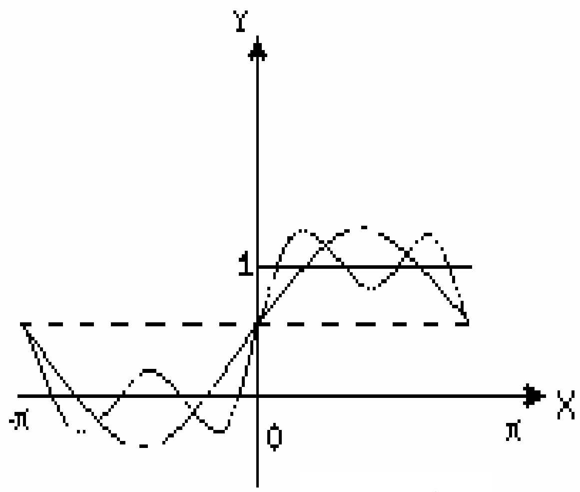


Рис. 5.1.

$$= \frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right).$$ Тогда

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)\sin nx}{n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right).$$

Для первых частичных сумм получим:

$$S_0(x) = \frac{1}{2}, \quad S_1(x) = \frac{1}{2} + 2\sin\frac{x}{\pi}, \quad S_2(x) = S_1(x), \quad S_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{2\sin nx}{\pi} + \frac{2\sin 3x}{3\pi}.$$

Построим графики этих сумм, обозначая $S_0(x) = --$, $S_1(x) = S_2(x) - \cdot -$ и $S_3(x) - \cdot \cdot -$ (рис.5.1). В т. $x_0 = \pi$ $\sin(2n-1) = 0$ и $S_1(x_0) = \frac{1}{2}$. ◄

Аудиторные задачи

Разложить периодическую с $T = 2\pi$ функцию $f(x)$ в ряд Фурье, построить графики её первых частных сумм $S_0(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$ и $S_3(x)$ и найти значение $S(x_0)$ суммы полученного ряда в заданной точке x_0:

5.1.2. $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$, $x \in (0,\ 2\pi)$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

5.1.3. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi,\ 0), \\ 2x, & x \in (0,\ \pi), \end{cases}$ $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

5.1.4. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0,\ \pi), \\ -x, & x \in (-\pi,\ 0), \end{cases}$ $\qquad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Задание на дом

5.1.5. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} \pi, & x \in (-\pi,\ 0), \\ \pi - x, & x \in (0,\ \pi), \end{cases}$

с $T = 2\pi$ и найти $S\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5.1.6. Разложить в ряд Фурье $f(x) = \begin{cases} -2, & x \in (0,\ \pi), \\ 1, & x \in (-\pi,\ 0). \end{cases}$

Ответы:

5.1.2 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$, $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

5.1.3. $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + 3\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$.

5.1.4. $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\sin nx}{n}$, $S\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

5.1.5. $f(x) = \dfrac{3\pi}{4} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{\sin nx}{n} + \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, $S\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.

5.1.6. $f(x) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{6}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$.

5.2. Ряд Фурье для чётных и нечётных функций

5.2.1. Разложить в ряд Фурье 2π - периодическую функцию $f(x)$, заданную на отрезке $x\in[-\pi,\pi]$ следующим образом: $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,\ \pi),\\ -1, & x\in(-\pi,\ 0).\end{cases}$

► Эта функция кусочно монотонна и ограничена на отрезке $x\in[-\pi,\pi]$ и по теореме разложения может быть представлена радом Фурье. Вычислим коэффициенты ряда Фурье. Поскольку функция $f(x)$ нечётная, воспользуемся формулой (4). Получаем:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx dx=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)=\frac{4}{(2n-1)\pi},\ n\in N.$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

С помощью рядов Фурье можно находить суммы многих интересных ЧР. Например подставляя в полученный ряд $x=\frac{\pi}{2}$, обнаружим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.\ ◄$$

5.2.2. Разложить в ряд Фурье 2π - периодическую функцию $f(x)=x^2$, заданную на отрезке $x\in[-\pi,\pi]$.

► Эта функция кусочно монотонна, ограниченна на отрезке $x\in[-\pi,\pi]$ и по теореме разложения может быть представлена рядом Фурье. Поскольку эта функция чётная, воспользуемся формулой (3). Получаем:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2x^3}{3\pi}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3},\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx dx=\begin{vmatrix}u=x^2,\ dv=\cos nx dx\\ du=2xdx,\ v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}\frac{x\sin nx dx}{n}\right)=\begin{vmatrix}u=x,\ dv=\sin xdx\\ du=dx,\ v=-\dfrac{\cos nx}{n}\end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos nx dx}{n}\right)=\frac{4x\cos nx}{\pi n^2}\Big|_0^{\pi}=\frac{4\cos n\pi}{n^2}=\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

Таким образом, ряд Фурье для данной функции имеет вид:

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}.$$

Этот ряд сходится во всех точках и его сумма равна $f(x)$. ◄

<u>Аудиторные задачи</u>

Указанные функции разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi,\pi)$. Определить сумму ряда в точках разрыва и на концах интервала $(-\pi,\pi)$, построить график функции и суммы соответствующего ряда (также и вне интервала $(-\pi,\pi)$):

5.2.3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, & x\in[0,\pi),\\ -\dfrac{\pi+x}{2}, & x\in[-\pi,0).\end{cases}$

5.2.4. $f(x)=\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{x^2}{4}.$

5.2.5. $f(x)=x^3.$

5.2.6. $f(x)=\cos ax.$

<u>Задание на дом</u>

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ с периодом $T=2\pi$, если:

5.2.7. $f(x)=\sin ax.$

5.2.8. $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right],\\ \pi-x, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]\end{cases}$ $f(x)=f(-x).$

Ответы:

5.2.3. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$

5.2.4. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^2}.$

5.2.5. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)(-1)^n\sin nx.$

5.2.6. $f(x)=\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2-a^2}\right),\ a\notin Z,\ f(x)=\cos ax,\ a\in Z.$

5.2.7. $f(x)=\frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2-a^2},\ a\notin Z,\ f(x)=\sin ax,\ a\in Z.$

5.2.8. $f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos n\pi\right)\frac{\cos nx}{n^2}.$

5.3. Ряд Фурье для функций с периодом $2l$. Разложение в ряд Фурье непериодических функций

5.3.1. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную несколькими формулами $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-1,\ -1+\alpha),\\ 0, & x\in(-1+\alpha,\ 0),\\ 1, & x\in(0,\ \alpha),\\ 0, & x\in(\alpha,\ 1),\end{cases}$ где α – некоторое число, $\alpha\in(0,\ 1)$.

► Разложим заданную функцию в ряд

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{l}\left(\int_{-l}^{l+\alpha}dx+\int_{-l+\alpha}^{0}0\,dx+\int_{0}^{\alpha}dx+\int_{\alpha}^{1}0\,dx\right)=\frac{2\alpha}{l}.$$

Легко видеть, что

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx=\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n+1\right)\sin\frac{n\pi\alpha}{l},$$

$$b_n=\frac{1}{l}\left(\int_{-l}^{-l+\alpha}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx+\int_{0}^{\alpha}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx\right)=\frac{1}{n\pi}\left((-1)^n+1\right)\left(1-\cos\frac{n\pi\alpha}{l}\right),$$

таким образом, при $n=2k+1$ (нечётном) все $a_{2k+1}=b_{2k+1}=0$,

тогда как $a_{2k}=\frac{1}{k\pi}\sin\frac{2k\pi\alpha}{l},$ $b_{2k}=\frac{1}{k\pi}\left(1-\cos\frac{2k\pi\alpha}{l}\right),$ $k\in N$.

Особенно простой результат получается, если $\alpha=\frac{l}{2}$. Тогда

$$a_{2k}=\frac{1}{k\pi}\sin k\pi=0,\ b_{2k}=\frac{1}{k\pi}(1-\cos k\pi)=\frac{1-(-1)^k}{k\pi},$$

и ряд принимает вид:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi x}{l}+\frac{1}{3}\sin\frac{6\pi x}{l}+\ldots\right).\ ◄$$

5.3.2. Разложить функцию $f(x)=x(\pi-x)$ в ряд синусов в интервале $(0,\ \pi)$. Использовать полученный результат для нахождения суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

► Так как по условию задачи заданная непериодическая функция $f(x)$ доопределяется на интервале $(-\pi,0)$ нечётным образом, воспользуемся формулой (6):

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx dx=\left|\begin{array}{c} u=\pi x-x^2,\ dv=\sin nx dx \\ du=(\pi-2x)dx,\ v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x(\pi-x)\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\right)\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos nx dx=\left|\begin{array}{c} u=\pi-2x,\ dv=\cos nx dx \\ du=-2dx,\ v=\dfrac{\sin nx}{n}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left((\pi-2x)\sin nx\Big|_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}\sin nx dx\right)=-\frac{4}{\pi n^3}\cos nx\Big|_0^{\pi}=4\frac{1-(-1)^n}{\pi n^3}$$

и ряд принимает вид:

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

При $x=\frac{\pi}{2}$ получим

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=S\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{\pi^2}{4}=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}.$$

Тогда сумма заданного ЧР

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$ ◄

Аудиторные задачи

I. Разложить в ряд Фурье функции $f(x)$ с периодом $T=2l$:

5.3.3. $f(x)=\cos x,\ x\in(0,\ 1),\ l=1.$

55.3.4. $f(x)=\cos x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right],\ l=\frac{\pi}{2}.$

5.3.5. $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-2,\ -1),\\ 0, & x\in(-1,\ 1),\\ 1, & x\in(1,\ 2),\end{cases}\qquad l=2.$

II. Доопределяя заданную на $(0,\ l)$ функцию $f(x)$, получить для неё ряд Фурье:

5.3.6. $f(x)=e^x,\ x\in(0,\ \ln 2)$ по косинусам.

5.3.7. $f(x)=x\sin x,\ x\in(0,\ \pi)$ по синусам.

5.3.8. $f(x)=\begin{cases}x, & x\in\left(0,\ \frac{l}{2}\right),\\ 1-x, & x\in\left(\frac{l}{2},\ l\right).\end{cases}$ По а) косинусам б) синусам.

Задание на дом

5.3.9. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию с $T=2l$

$$f(x)=x^2+x+1,\ x\in\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ l=\frac{1}{2}.$$

5.3.10. Доопределяя необходимым образом заданную функцию в промежутке $(0,1)$ функцию до периодической, получить для неё ряд Фурье: а) по косинусам, б) по синусам.

Используя полученный ряд, найти длину ЧР $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$

Ответы:

5.3.3. $f(x)=1-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}.$

5.3.4. $f(x)=2\pi+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$

5.3.5. $f(x)=\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n-1)\pi x}{2}.$

5.3.6. $f(x)=\dfrac{1}{\ln 2}+2\ln 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2\cos n\pi-1)\cos\dfrac{n\pi x}{\ln 2}}{\ln^2 2+n^2\pi^2}$. 5.3.7. $\dfrac{\pi\sin nx}{2}-\dfrac{16}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin 2nx}{\left(4n^2-1\right)^2}$.

5.3.8. а) $f(x)=\dfrac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$,

б) $f(x)=\dfrac{l}{4}+\dfrac{2l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(2\cos\dfrac{n\pi}{2}-1-\cos n\pi\right)\cos\dfrac{n\pi x}{l}$,

5.3.9. $f(x)=\dfrac{13}{12}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos 2n\pi x}{(\pi n)^2}+(-1)^{n+1}\dfrac{\sin 2n\pi x}{n\pi}$,

5.3.10. а) $f(x)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}\cos n\pi x$,

б) $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(-1)^{n+1}+\dfrac{2}{n^3\pi^2}\left((-1)^n-1\right)\sin n\pi x,\quad S=\dfrac{\pi^2}{12}$.

Вопросы для самопроверки

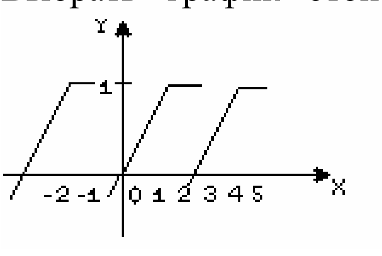
1. Чему равен $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin kx\,dx$, если а) $n=k$, б) $n\neq k$?

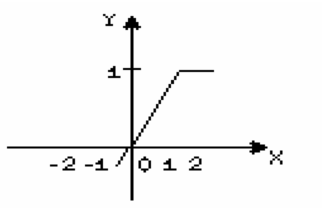
Возможные ответы: 1) 0; 2) 1; 3) π; 4) 2π.

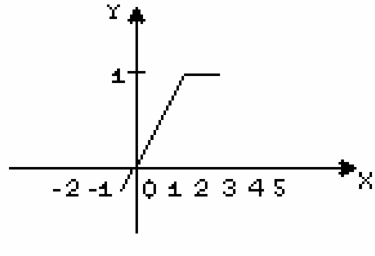
2. Некоторую периодическую функцию представляют тригонометрическим рядом Фурье. Известно, что

$$b_n=\frac{1}{3}\left(\int\limits_{-1}^{1}x\sin\left(\frac{n\pi\pi}{3}\right)dx+\int\limits_{1}^{2}\sin\left(\frac{n\pi\pi}{3}\right)dx\right),\quad a_n=0.$$

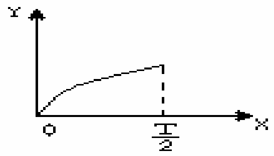
Выбрать график этой функции:





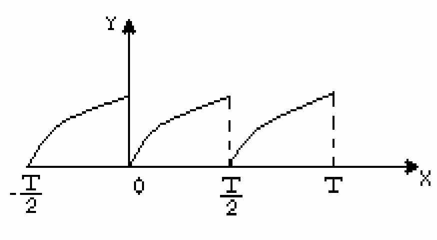


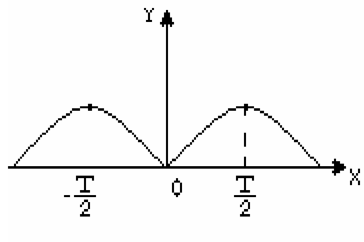
3. Пусть ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi nx}{T}$.

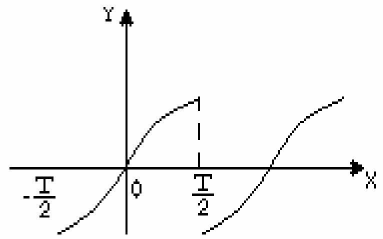


По известному фрагменту графика этой функции на интервале $\left(0, \frac{T}{2}\right)$ указать график функции $f(x)$.

Возможные ответы:







4. Дана функция $f(x)=\left(\pi^2 - x^2\right)^2$. Убедиться, что имеют место равенства $f(-\pi)=f(\pi)$, $f'(-\pi)=f'(\pi)$, $f''(-\pi)=f''(\pi)$ (но $f'''(-\pi)\neq f'''(\pi)$). Используя полученные равенства, разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$ и вычислить сумму ЧР $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$.

Возможные ответы:

1) $f(x)=\frac{8\pi^4}{15}-48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^4},\ S=\frac{27\pi^4}{72}.$

2) $f(x)=\frac{8\pi^4}{15}-48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^4},\ S=\frac{7\pi^4}{720}.$

3) $f(x)=\frac{8\pi^4}{15}+48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^4},\ S=\frac{7\pi^4}{720}.$

Самостоятельная работа «Ряды Фурье»

1. (1 - 10) Разложить в ряд Фурье четную или нечетную функцию $f(x)$.

(11 - 30) Разложить в ряд Фурье с периодом T функцию $f(x)$ на заданном интервале.

1.1 $f(x)=1,\ x\in(0,2),\ f(x)=f(-x).$

1.2 $f(x)=1,\ x\in(0,2),\ f(x)=-f(-x).$

1.3 $f(x)=2,\ x\in(0,2\pi),\ f(x)=f(-x).$

1.4 $f(x)=2,\ x\in(0,2\pi),\ f(x)=-f(-x).$

1.5 $f(x)=\pi,\ x\in(0,2),\ f(x)=f(-x).$

1.6 $f(x)=\pi,\ x\in(0,2),\ f(x)=-f(-x).$

1.7 $f(x)=1+2x,\ x\in(0,2),\ f(x)=f(-x).$

1.8 $f(x)=1+2x,\ x\in(0,2),\ f(x)=-f(-x).$

1.9 $f(x)=2x-1,\ x\in(0,2),\ f(x)=f(-x).$

1.10 $f(x)=2x-1,\ x\in(0,2),\ f(x)=-f(-x).$

1.11 $f(x)=2-x,\ x\in(0,2),\ T=4,\ f(x)=f(-x).$

1.12 $f(x)=2-x,\ x\in(0,2),\ T=4,\ f(x)=-f(-x).$

1.13 $f(x)=4x^2,\ x\in(-1,1),\ T=2.$

1.14 $f(x)=4-x^2,\ x\in(-2,2),\ T=4.$

1.15 $f(x)=(x+1)^2,\ x\in(-1,0),\ T=2,\ f(x)=f(-x).$

1.16 $f(x)=(x-1)^2,\ x\in(0,2),\ T=4,\ f(x)=-f(-x).$

1.17 $f(x)=x^2-2x,\ x\in(0,2),\ T=4,\ f(x)=-f(-x).$

1.18 $f(x)=x^2-2x,\ x\in(0,2),\ T=4,\ f(x)=f(-x).$

1.19 $f(x)=2\cos\dfrac{x}{3},\ x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\ T=\pi.$

1.20 $f(x) = -2\sin\frac{x}{3},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ T = \pi.$

1.21 $f(x) = 2\sin\frac{2x}{3},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ T = \pi.$

1.22 $f(x) = \cos\frac{3x}{5},\ x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right),\ T = \frac{\pi}{3}.$

1.23 $f(x) = \sin\frac{3x}{5},\ x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right),\ T = \frac{\pi}{3}.$

1.24 $f(x) = -\sin\frac{3x}{7},\ x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right),\ T = \frac{2\pi}{3}.$

1.25 $f(x) = \cos\frac{3x}{7},\ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right),\ T = \frac{\pi}{2}.$

1.26 $f(x) = -\cos\frac{2x}{3},\ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right),\ T = \frac{\pi}{2}.$

1.27 $f(x) = \cos\frac{3x}{2},\ x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right),\ T = \frac{2\pi}{3}.$

1.28 $f(x) = -\cos\frac{3x}{8},\ x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right),\ T = \frac{\pi}{3}.$

1.29 $f(x) = \cos\frac{2x}{3},\ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right),\ T = \frac{\pi}{2}.$

1.30 $f(x) = -\cos\frac{4x}{5},\ x \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right),\ T = \frac{\pi}{4}.$

2. Доопределяя заданным образом до периодической, разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$.

2.1 $f(x) = \begin{cases} (x-3)^2,\ x \in (2,3), \\ -(x-3)^2,\ x \in (3,4), \end{cases} \quad f(x) = -f(-x).$

2.2 $f(x) = \begin{cases} (x-3)^2,\ x \in (2,3), \\ -(x-3)^2,\ x \in (3,4), \end{cases} \quad f(x) = f(-x).$

2.3 $f(x)=\begin{cases} 2x-10, & x\in(5,6), \\ 2, & x\in(6,7), \\ 16-2x, & x\in(7,8), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$.

2.4 $f(x)=\begin{cases} 2x-10, & x\in(5,6), \\ 2, & x\in(6,7), \\ 16-2x, & x\in(7,8), \end{cases}$ $f(x)=f(-x)$.

2.5 $f(x)=\begin{cases} 7-2x, & x\in(2,3), \\ 1, & x\in(3,5), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$.

2.6 $f(x)=\begin{cases} 7-2x, & x\in(2,3), \\ 1, & x\in(3,5), \end{cases}$ $f(x)=f(-x)$.

2.7. $f(x)=\begin{cases} x-7, & x\in(7,9), \\ 1, & x\in(9,10), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$.

2.8 $f(x)=\begin{cases} x-7, & x\in(7,9), \\ 1, & x\in(9,10), \end{cases}$ $f(x)=f(-x)$.

2.9 $f(x)=\begin{cases} 12-x, & x\in(10,11), \\ x-10, & x\in(11,12), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$.

2.10 $f(x)=\begin{cases} 12-x, & x\in(10,11), \\ x-10, & x\in(11,12), \end{cases}$ $f(x)=f(-x)$.

2.11 $f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,2), \\ 2, & x\in(2,4), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$.

2.12 $f(x)=\begin{cases} x, & x\in(0,2), \\ 2, & x\in(2,4), \end{cases}$ $f(x)=f(-x)$.

2.13 $f(x)=\begin{cases} 3, & x\in(0,1), \\ 6-3x, & x\in(1,2), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$.

2.14 $f(x)=\begin{cases} 3, & x\in(0,1), \\ 6-3x, & x\in(1,2), \end{cases}$ $f(x)=f(-x)$.

2.15 $f(x)=\begin{cases} 4, & x\in(3,5), \\ 2, & x\in(5,7), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$.

2.16 $f(x)=\begin{cases} 4, & x\in(3,5), \\ 2, & x\in(5,7), \end{cases}$ $f(x)=f(-x)$.

2.17 $f(x)=\begin{cases} -3, & x\in(0,1), \\ 3x-6, & x\in(1,2), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$.

2.18 $f(x)=\begin{cases} -3, & x\in(0,1), \\ 3x-6, & x\in(1,2), \end{cases}$ $f(x)=f(-x)$.

2.19 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\in(0,2), \\ -2, & x\in(2,4), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$.

2.20 $f(x)=\begin{cases} -x, & x\in(0,2), \\ -2, & x\in(2,4), \end{cases}$ $f(x)=f(-x)$.

2.21 $f(x)=\begin{cases} 2x-7, & x\in(2,3), \\ -1, & x\in(3,5), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$.

2.22 $f(x)=\begin{cases} 2x-7, & x\in(2,3), \\ -1, & x\in(3,5), \end{cases}$ $f(x)=f(-x)$.

2.23 $f(x)=\begin{cases} 7-x, & x\in(7,9), \\ -1, & x\in(9,10), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$.

2.24 $f(x)=\begin{cases} 7-x, & x\in(7,9), \\ -1, & x\in(9,10), \end{cases}$ $f(x)=f(-x)$.

2.25 $f(x)=\begin{cases} x-12, & x\in(10,11), \\ 10-x, & x\in(11,12), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$.

2.26 $f(x)=\begin{cases} x-12, & x\in(10,11), \\ 10-x, & x\in(11,12), \end{cases}$ $f(x)=f(-x)$.

2.27 $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in(3,5), \\ 2, & x\in(5,6), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$.

2.28 $f(x)=\begin{cases} 1, & x\in(3,5), \\ 2, & x\in(5,6), \end{cases}$ $f(x)=f(-x)$.

2.29 $f(x)=\begin{cases} -3, & x\in(2,3), \\ 1, & x\in(3,4), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$.

2.30 $f(x)=\begin{cases} -3, & x\in(2,3), \\ 1, & x\in(3,4), \end{cases}$ $f(x)=f(-x).$

В заключении рассмотрим решение типового билета.

1.31. Разложить в ряд Фурье с периодом $T=\dfrac{\pi}{3}$ функцию $f(x)=3\cos\dfrac{3x}{7}$ на интервале $x\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right)$.

► Заданная функция – четная, поэтому можно применить формулу (5)

$$a_0=\frac{12}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}3\cos\frac{3x}{7}dx=\frac{36}{\pi}\sin\frac{3x}{7}\frac{7}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{84}{\pi}\sin\frac{\pi}{14}$$

$$a_n=\frac{12}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}3\cos\frac{3x}{7}\cos(6nx)dx=\frac{18}{\pi}\left(\frac{\sin\left(6n+\frac{3}{7}\right)x}{6n+\frac{3}{7}}+\frac{\sin\left(6n-\frac{3}{7}\right)x}{6n-\frac{3}{7}}\right)_0^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=\frac{18}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{14}+n\pi\right)}{6n+\frac{3}{7}}+\frac{\sin\left(n\pi-\frac{\pi}{14}\right)}{6n-\frac{3}{7}}=18\pi\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{14}}{6n+\frac{3}{7}}-\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{14}}{6n-\frac{3}{7}}.$$

Искомый ряд запишется в виде:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}6\sin\frac{\pi}{14}\left(14+3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{6n+\frac{3}{7}}-\frac{1}{6n-\frac{3}{7}}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}12\sin\frac{\pi}{14}\left(7+\frac{9}{7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{36n^2-\frac{9}{49}}\right).\ ◄$$

2.31. Доопределяя заданным образом $f(x)=\begin{cases} -2, & x\in(1,3), \\ 1, & x\in(3,4), \end{cases}$ $f(x)=-f(-x)$, разложить ее в ряд Фурье.

► Для разложения функции в ряд Фурье по синусам воспользуемся формулой (6) (l=3)

$$b_n = \frac{2}{3}\left(\int_1^3 -2\sin\left(\frac{n\pi\pi}{3}\right)dx + \int_3^4 1\cdot\sin\left(\frac{n\pi\pi}{3}\right)dx\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n\pi}6\cos\frac{n\pi\pi}{3}\right)\Bigg|_1^3 - \frac{1}{\pi n}3\cos\frac{\pi n x}{3}\Bigg|_3^4 =$$

$$= 4\left(\frac{\cos n\pi}{n\pi} - \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n\pi}\right) - 2\left(\frac{1}{n\pi}\cos\frac{4n\pi}{3} - \frac{1}{n\pi}\cos n\pi\right) =$$

$$= 4\frac{(-1)^n}{n\pi} - 4\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n\pi} - 2\frac{(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3}}{n\pi} + 2\frac{(-1)^n}{n\pi} = 2\frac{(-1)^n}{n\pi} - 2\cos\frac{n\pi}{3}\,\frac{2-(-1)^n}{n\pi}.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n - 2\cos\frac{n\pi}{3}\left(2-(-1)^n\right)\right)\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}. \ ◄$$

Литература: [1. с. 60 – 70; 2. с. 247 – 251; 3. с. 261 – 264; 4. с. 277 – 280; 5. с. 389 – 382; 5. с. 93 – 101].

6. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ (ПИ)

$\boxed{\text{Поверхности в } R^3}$

$G = \vec{F}(D)$ – поверхность $\Rightarrow \forall (x,y) \in D \subset R^2 \exists\, (x,y,z) \in G \subset R^3,\ \vec{F} = \{F_1, F_2, F_3\} : D \to G$

G – образ D при непрерывном отображении $\vec{F}$.

параметрические уравнения

$G:\ x = F_1(u,v), \quad y = F_2(u,v), \quad z = F_3(u,v)$

явное уравнение

$G:\ z = f(x,y)$

$\Downarrow$

$f(x,y)$ – непрерывно-дифференцируема

$\forall (x,y) \in D$

неявное уравнение

$G:\ F(x,y,z) = 0$

$\Downarrow$

$F(x,y,z)$ – непрерывно-дифференцируема

$\forall (x,y,z) \in G$

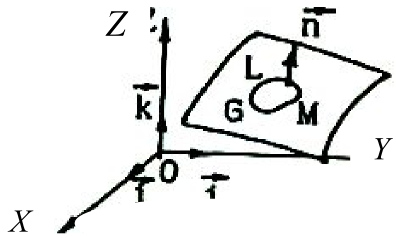
$$\underbrace{(F_x')^2 + (F_y')^2 + (F_z')^2 \neq 0}$$

$\Downarrow$

G – гладкая поверхность

векторно-параметрическое уравнение

$G:\ \vec{r} = \vec{F}(u,v)$



$M \in L \subset G,\ L \cap \partial G = 0$

$\vec{n}(M) = \{\cos\alpha(M), \cos\beta(M), \cos\gamma(M)\}$

G – двусторонняя (ориентируемая)

$\Rightarrow \forall M \in G, \quad \forall L \subset G$ после обхода L направление $n(M)$ совпадает с исходным

$\boxed{\text{ПИ}}$

ПИ *I* р: $\iint\limits_G f(M)\,d\sigma$

(по площади поверхности)

ПИ *II* р: $\iint\limits_G P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy$

(по координатам)

$m_G = \iint\limits_G \rho(M)\,d\sigma$ – масса поверхности G

(физический смысл ПИ *I* р)

Вычисление ПИ

$$I = \iint\limits_G f(x,y,z)\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dS \quad (1)$$

$G:\ z = f(x,y), \quad D = \text{пр}_{XOY}G$

$$I = \iint\limits_G Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy \quad (2)$$

$$D_{yz} = \text{пр}_{XOZ}G, \quad D_{xz} = \text{пр}_{XOZ}G, \quad D_{xy} = \text{пр}_{XOY}G,$$

$$\text{"+"} - \ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma > 0, \quad \text{"–"} - \ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma < 0.$$

Формула Гаусса- Остроградского

<u>Т:</u> $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ –

непрерывны с $P_x',\ Q_y',\ R_z'$

$\forall (x,y,z) \in \Omega, \qquad \partial\Omega = G$

$\Rightarrow$

$$\iiint\limits_\Omega (P_x', Q_y', R_z')dxdydz =$$

$$= \oiint\limits_G Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \quad (9)$$

Формула Стокса

<u>Т:</u> $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ –

непрерывны с $P_y', P_z', Q_x',$

$Q_z', R_x', R_y' \quad \forall (x,y,z) \in G,\ \partial G = L$

$\Rightarrow$

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_G (Q_x' - P_y')dxdy +$$

$$+ (R_y' - Q_z')dydz + (P_z' - R_x')dxdz \quad (10)$$

6.1. ПИ I р, их вычисление и приложения

6.1.1. Вычислить ПИ I р $\iint\limits_G x^2 yz d\sigma$, если $G-$ часть плоскости $x+y+z=1$, лежащая в первом октанте.

► Воспользуемся формулой (1) перехода от ПИ I р к ДИ:

$$\iint\limits_G x^2 yz d\sigma = \iint\limits_D x^2 y(1-x-y)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy.$$

Мы подставили вместо z выражение $(1-x-y)$ (из уравнения плоскости),

$$z_x' = -1, \quad z_y' = -1.$$

Область $D-$ проекция G на плоскость XOY: $x+y=1$. Имеем

$$I=\sqrt{3}\int_0^1 x^2 dx \int_0^{1-x} y(1-x-y)dy = \sqrt{3}\int_0^1 x^2\left(\frac{y^2(1-x)}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \sqrt{3}\int_0^1 x^2\left(\frac{(1-x)^3}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{(1-x)^3}{3}\right)dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\frac{3x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{360}. \blacktriangleleft$$

6.1.2. Определить суммарный электрический заряд, распределённый на части поверхности параболоида $2az = x^2+y^2$, вырезаемой из него цилиндром $x^2+y^2=a^2$, есть плотность заряда в каждой точке равна $e=k\sqrt{z}$, $k>0$.

► Суммарный электрический заряд в данном случае равен заряду боковой поверхности G: $E=\iint\limits_G k\sqrt{z}d\sigma$. Уравнение поверхности параболоида

$$z=\frac{x^2+y^2}{2a}, \quad z_x' = \frac{x}{a}, \quad z_y' = \frac{y}{a} \text{ и } \sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}.$$

Имеем:

$$E = k\iint_D \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2a}}\,\frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}\,dxdy,$$

где $D-$ круг радиуса a: $x^2+y^2 \le a^2$.

Переходя к полярным координатам, получаем:

$$E = \frac{k}{a\sqrt{2a}}\iint_D r^2\sqrt{a^2+r^2}\,drd\varphi = \frac{k}{a\sqrt{2a}}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^a r^2\sqrt{a^2+r^2}\,dr = \begin{cases} r = a\,\mathrm{tg}\,t \\ dr = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt \end{cases} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} r = a\,\mathrm{tg}\,t \\ dr = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt \end{matrix} \qquad \begin{array}{c|c|c} r & 0 & a \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{4} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{k}{a\sqrt{2a}}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2\mathrm{tg}^2 t a^2}{\cos^3 t}dt = \frac{ka^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2}}\,2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\cos^5 t}dt =$$

$$= \frac{ka^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2}}\,2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 t}{\left(1-\sin^2 t\right)^3}d\sin t = \frac{\pi ka^{\frac{5}{2}}}{4}\left(3\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right). \blacktriangleleft$$

<u>Аудиторные задачи</u>

I. Вычислить ПИ I р:

6.1.3. $\iint_G \frac{z+2x+4y}{3}d\sigma$, $\quad G$: $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, $\quad x \ge 0$, $\quad y \ge 0$, $\quad z \ge 0$.

6.1.4. $\iint_G \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$, $\quad G$: $x^2+y^2=z^2$, $\quad z \in [0,1]$.

6.1.5. $\iint_G x^2y^2d\sigma$, $\quad G$: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

5.1.6. Найти массу сферы, если поверхностная плотность в каждой точке равна квадрату расстояния этой точки от некоторого фиксированного диаметра сферы.

<u>Задание на дом</u>

6.1.7. Вычислить $\iint\limits_G \left(x^2+y^2+z^2\right)d\sigma, \qquad G: \; x^2+y^2+z^2=1.$

6.1.8. Определить массу, распределённую на части поверхности $G: \; 2az = x^2 - y^2$, вырезаемой $G_1: \; x^2+y^2=a^2$, если $\rho = k|z|, \quad k>0$.

Ответы:

6.1.3. $4\sqrt{61}$.

6.1.4. $\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$.

6.1.5. $\dfrac{2\pi R^6}{15}$.

6.1.6. $\dfrac{8\pi R^4}{3}$.

6.1.7. 4π.

6.1.8. $\dfrac{8}{15}ka^3\left(\sqrt{2}+1\right)$.

6.2. ПИ *II* р, их вычисление

6.2.1. Вычислить $\iint\limits_G xdydz + ydxdz + zdxdy$, если $G-$ внешняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ в первом октанте.

► Так как в первом октанте внешняя нормаль эллипсоида со всеми осями координат образует острые углы, то в формуле (2) перед ДИ берём знак «+»:

$$I = \iint\limits_{D_{yz}} xdydz + \iint\limits_{D_{xz}} ydxdz + \iint\limits_{D_{xy}} zdxdy = 3\cdot\frac{1}{8}V = \frac{\pi abc}{2}$$

$\left(V = \dfrac{4}{3}\pi abc\right.$ - объём эллипсоида, каждый из интегралов по $D_{yz}, \quad D_{xz}, \quad D_{xy}$ определяет объём одной восьмой части эллипсоида). ◄

6.2.2. Вычислить $\iint\limits_G x^2dydz - y^2dxdz + z^2dxdy$, если $G: \; x^2+y^2+z^2=3R^2, \;\; z=0, \quad z=\sqrt{x^2+y^2-R^2}$ (внешняя сторона).

► Заданная поверхность ограничена сверху сегментом сферы $x^2+y^2+z^2=3R^2$, с боков - частью поверхности гиперболоида

$x^2+y^2-z^2=R^2$, снизу - кругом $x^2+y^2\le R^2$, $z=0$ (рис. 6.1) на плоскости YOZ и XOZ поверхность G проектируется дважды с разных сторон, поэтому, в силу симметрии поверхности относительно этих плоскостей $\iint\limits_G x^2dydz=\iint\limits_G y^2dxdz=0.$

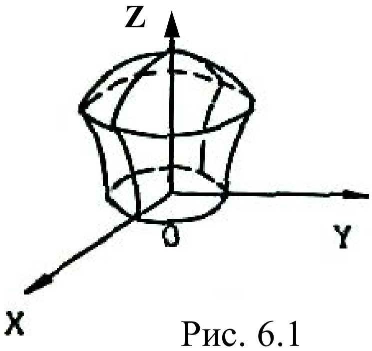


Рис. 6.1

На плоскость XOY сферический сегмент проектируется в кругу $D_1:\quad x^2+y^2\le 2R^2$, часть поверхности гиперболоида- кольцо $D_2:\quad R^2\le x^2+y^2\le 2R^2$, а нижним основанием служит лежащий в этой плоскости круг $D_3:\ x^2+y^2\le R^2$. Для D_1 $\cos\gamma>0,$ для $D_2-<0,$ а для D_3 $z=0.$ Поэтому

$$\iint\limits_G z^2dxdy=\iint\limits_D\left(3R^2-x^2-y^2\right)dxdy-\iint\limits_D\left(x^2+y^2-R^2\right)dxdy.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$\iint\limits_G z^2dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R\sqrt2}\left(3R^2-r^2\right)dr-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_R^{R\sqrt2}\left(r^2-R^2\right)rdr= =\frac{4}{2}\pi R^4=\frac{7}{2}\pi R^4. \blacktriangleleft$$

<u>Аудиторные задачи</u>

Вычислить ПИ II р:

6.2.3. $\iint\limits_G xdydz+ydxdz+zdxdy$ по верхней поверхности $G:\ x+y+z=0,\ \ x\ge0,\ \ y\ge0,\ \ z\ge0.$

6.2.4. $\iint\limits_G xzdxdy+xydydz+yzdxdz,$ где $G-$ внешняя сторона пирамиды, составленной плоскостями $x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,\ \ x+y+z=1.$

6.2.5. $\iint\limits_G x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$ по верхней поверхности $G:\ x^2+y^2+2az=a^2,\ \ x\le0,\ \ y\ge0,\ \ z\ge0.$

6.2.6. $\iint\limits_G y^2 z dxdy + xz dydz + x^2 y dxdz$, где $G-$ внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из параболоида вращения $z = x^2 + y^2$, цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и координатных плоскостей.

Задание на дом

Вычислить ПИ II р:

6.2.7. $\iint\limits_G x^2 y^2 z dxdy$, $G-$ внешняя сторона нижней половины сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

6.2.8. $\iint\limits_G yz dxdy + xz dydz + xy dxdz$, где $G-$ внешняя сторона поверхности, расположенной в первом октанте и составленной из цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $z = H$.

Ответы:

6.2.3. $\dfrac{a^3}{2}$.

6.2.4. $\dfrac{1}{8}$.

6.2.5. $\dfrac{\pi a^4}{48}$.

6.2.6. $\dfrac{\pi}{8}$.

6.2.7. $\dfrac{2}{105}\pi R^7$.

6.8. $HR^2\left(\dfrac{2R}{3} + \dfrac{\pi H}{8}\right)$.

6.3. Формулы Гаусса-Остроградского и Стокса

6.3.1. Написать и проверить формулу Гаусса-Остроградского для интеграла $\oiint\limits_G xdydz + ydxdz + zdxdy,$ если $G: \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$

► Так как $P(x, y, z) = x, \quad Q(x, y, z) = y, \quad R(x, y, z) = z$ по формуле (9) имеем

$$P_x' = Q_y' = R_z' = 1 \quad \text{и}$$

$$\iint\limits_G xdydz + ydxdz + zdxdy = \iiint\limits_\Omega 3dxdydz = 3V\Omega = 4\pi R^3, \quad \partial\Omega = G.$$

Т. е. мы получим формулу для вычисления объёма через ПИ *II* р

$$V_\Omega = \frac{1}{3}\oiint\limits_G xdydz + ydxdz + zdxdy, \qquad G = \partial\Omega.$$

Непосредственное вычисление ПИ *II* р даёт также три объёма шара (см. пример 6.2.1, шар - частный случай эллипсоида $a = b = c = R$). ◄

6.3.2. Показать с помощью формулы Стокса, что $\oint\limits_L yzdx + xzdy + xydz$ по любому замкнутому контуру L равен нулю. Проверить это вычислением интеграла по контуру ΔOAB, $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 0)$ и $B(1, 1, 1)$.

► Используя формулу (10), получим:

$$P_y' = z, \quad P_z' = y, \quad Q_x' = z, \quad Q_z' = x, \; R_x' = y, \quad R_y' = x \; \text{и}$$

$$\forall L \quad \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_G \left(Q_x' - P_y'\right)dxdy + \left(R_y' - Q_z'\right)dydz +$$

$$+ \left(P_z' - R_x'\right)dxdz = \iint\limits_G 0\,dxdy + 0\,dydz + 0\,dxdz = 0.$$

Для непосредственного вычисление КИ *II* р запишем уравнение сторон

$$\Delta OAB. \;\; OA: \;\; \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}; \;\; AB: \; \frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}; \quad BO: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{или}$$

$$OA: \quad x = t, \;\; y = t, \;\; z = 0, \;\; t \in [0, 1];$$

$$AB: \; x = 1, \quad y = 1, \quad z = t, \quad t \in [0, 1]; \qquad BO: \; x = y = z = t, \quad t \in [1, 0].$$

Тогда

$$I=\oint\limits_L yzdx+xzdy+xydz=\int\limits_{OA}(\ )+\int\limits_{AB}(\ )+\int\limits_{BO}(\ )=\int\limits_0^1 t\cdot 0dt+t\cdot 0dt+t\cdot t\cdot 0dt+$$

$$+\int\limits_0^1 1\cdot t\cdot 0+1\cdot t\cdot 0++1\cdot 1\cdot dt+\int\limits_1^0 t\cdot tdt+t\cdot tdt+t\cdot tdt=0+t\Big|_0^1+t^3\Big|_0^1=0. \blacktriangleleft$$

<u>Аудиторные задачи</u>

I. Применяя формулу Гаусса-Остроградского, вычислить интегралы:

6.3.3. $\iint\limits_G x^3dydz+y^3dxdy+z^3dxdy$, G – внешняя сторона поверхности пирамиды, образованной плоскостями: $x+y+z=a$, $x=y=z=0$.

6.3.4. $\iint\limits_G yzdxdy+xzdydz+xydxdz$, G – внешняя сторона поверхности составленной из цилиндра $x^2+y^2=a^2$ и плоскостей: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=h$ и расположенной в первом октанте.

6.3.5. $\iint\limits_G y^2zdxdy+xzdydz+x^2ydxdz$, G – внешняя сторона поверхности, составленной из параболоида вращения $z=x^2+y^2$, цилиндра $x^2+y^2=1$ и плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=0$ и расположенной в первом октанте.

II. Вычислить непосредственно и используя формулу Стокса следующие интегралы:

6.3.6. $\oint\limits_L x^2y^3dx+dy+zdz$, $L:\ x^2+y^2=R^2$, $z=0$,

$G:\ z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $z\geq 0$.

6.3.7. $\oint\limits_L x(z-y)dx+y(x-z)dy+z(y-x)dz$, $L:\ \Delta ABC$, $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$, $C(0,0,a)$, $G:\ x+y+z=a$.

6.3.8. $\oint\limits_L \left(y^2+z^2\right)dx+\left(x^2+z^2\right)dy+\left(x^2+y^2\right)dz$, $L:\ x^2+y^2=a^2$, $z=0$,

$G:\ x^2+y^2+2az=a^2$.

Задание на дом

6.3.9. Используя формулу Гаусса-Остроградского, вычислить интеграл $\iint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(dydz+dxdz+dxdy)$, если $G-$внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

6.3.10. Написать и проверить формулу Стокса для интеграла: $\oint\limits_L (z-y)dx+(x-z)dy+(y-x)dz$, взятого по контуру ΔABC с вершинами $A(a,0,0)$, $B(0,a,0)$ и $C(0,0,a)$.

Ответы:

6.3.3. $0{,}15a^5$.

6.3.4. $a^2h\left(\dfrac{2a}{3}+\dfrac{\pi h}{8}\right)$.

6.3.5. $\dfrac{\pi}{8}$.

6.3.6. $-\dfrac{\pi R^6}{8}$.

6.3.7. a^3.

6.3.8. $\dfrac{4}{3}a^3$.

6.3.9. 0.

Вопросы для самопроверки

1. Что общего между ПИ I р и ДИ, КИ I р и ОИ, ПИ I р КИ I р, ПИ II р и КИ II р?

2. Есть ли связь между формулами Грина и Гаусса-Остроградского, Грина и Стокса?

3. Полагая в формуле Гаусса-Остроградского $P=U_x'$, $Q=U_y'$, $R=U_z'$, доказать, что $\iiint\limits_\Omega \left(U_{xx}''+U_{yy}''+U_{zz}''\right)dV=\oiint\limits_G U_n'\,d\sigma$ и проверить эту формулу для $U=x^2+y^2+z^2$, $G:\ x^2+y^2+z^2=a^2$.

4. Используя формулу Стокса, показать, что $\oint\limits_L x^2e^{zy}(3dx+xzdy+xydz)=0 \quad \forall L$.

Литература: [1. с. 71-82; 2. с. 131-134, 137-141; 3. с. 244-247; 4. с. 243-246; 5. с. 313-327; 6. с. 47-50].

7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ (ТП)

ТП

Скалярное поле (СП)

$U(M), \quad M(x,y,z)\in R^3$

(распределения давления в атмосфере, температур в теле)

Векторное поле (ВП)

$\vec{a}(M)=\{P(M),Q(M),R(M)\}, \quad M(x,y,z)\in R^3$

(скорости $\vec{V}$ жидкости или газа, сил $\vec{F}$, электрической напряжённости $\vec{E}$)

Характеристики СП

Геометрические

Линии уровня

$U(x,y)=C$ (1)

(изобары)

Поверхности уровня

$U(x,y,z)=C$ (2)

(изотермические поверхности)

Производная по направлению

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}=U_x'\cos\alpha+U_y'\cos\beta+$$

$$+U_z'\cos\gamma,$$

$\vec{l}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ (3)

(скорость изменения функции $U(M)$ в т. M в направлении $\vec{l}$).

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}=\text{пр}_{\vec{e}}\,\overrightarrow{\text{grad}}\,U.$$

Градиент

$\overrightarrow{\text{grad}}\,U=\{U_x',U_y',U_z'\}$ (4)

<u>Т:</u> $\dfrac{\partial U}{\partial l}=\overrightarrow{\text{grad}}\,U\cdot\vec{l}$.

1°. $\overrightarrow{\text{grad}}\,(c_1U_1+c_2U_2)=c_1\,\overrightarrow{\text{grad}}\,U_1+c_2\,\overrightarrow{\text{grad}}\,U_2$.

2°. $\overrightarrow{\text{grad}}\,(U\cdot V)=V\,\overrightarrow{\text{grad}}\,U+U\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V$.

3°. $\overrightarrow{\text{grad}}\,\dfrac{U}{V}=(V\,\overrightarrow{\text{grad}}\,U-U\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V)/V^2$.

4°. $\overrightarrow{\text{grad}}\,F(U)=F'(U)\,\overrightarrow{\text{grad}}\,U$.

5°. $\overrightarrow{\text{grad}}\,F(U,V)=F_U'\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V+F_V'\,\overrightarrow{\text{grad}}\,U$.

$\overrightarrow{\text{grad}}\,U=\nabla U,$

$\nabla=\vec{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}$ − оператор Гамильтона (набла).

Характеристики ВП

Геометрические | Дивергенция и поток | Циркуляция и ротор

Векторные линии | Векторные трубки

$L:\ \vec r=\vec r(t)=$
$=\{x,y,z\}$

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

или $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q},\\ \frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}\end{aligned}\right\}$(5)

-ДУ век

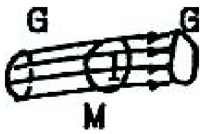
торных линий

$G:\ \bigcup\limits_{i=1}^{n} L_i,\ \ L_i$ –

– векторные ллини

$M_i=l\cap L_i,$

l – направляющая



$$\Pi_G=\iint\limits_G \vec a\cdot\vec n\,d\sigma$$ – поток (6),

$\vec n=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\lambda\},$

$G: z=f(x,y)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{+f_x'}{\sqrt{1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{+f_y'}{\sqrt{1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\pm1}{\sqrt{1+\left(f_x'\right)^2+\left(f_y'\right)^2}}.\ (7)$$

$$\operatorname{div}\vec a=\nabla\cdot\vec a=\lim_{V\to0}\frac{\Pi_G}{V}=P_x'+$$

$$+Q_y'+R_z'$$ – дивергенция (8)

$1^\circ.\ \operatorname{div}(c_1\vec a_1+c_2\vec a_2)=$

$=c_1\operatorname{div}\vec a_1+c_2\operatorname{div}\vec a_2.$

$2^\circ.\ \operatorname{div}\vec c=0,\quad \vec c=\text{const}.$

$3^\circ.\ \operatorname{div}(U\cdot\vec a)=U\operatorname{div}\vec a+\vec a\operatorname{grad}U.$

$$\Pi_G=\oiint\limits_G \vec a\cdot\vec n\,d\sigma=\iiint\limits_\Omega \operatorname{div}\vec a\,dV\ \ (9)$$

(формула Гаусса-Остроградского)

$$C_L=\oint\limits_L \vec a\,d\vec r$$ – циркуляция(10),

$\operatorname{rot}\vec a:\ \operatorname{rot}_{\vec n}\vec a=\lim\limits_{S\to0}\dfrac{C_L}{S}$ -

ротор

$$\operatorname{rot}\vec a=\nabla\times\vec a=\quad(11)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$$

$1^\circ.\ \operatorname{rot}(c_1\vec a_1+c_2\vec a_2)=$

$=c_1\operatorname{rot}\vec a_1+c_2\operatorname{rot}\vec a_2.$

$2^\circ.\ \operatorname{rot}\vec c=0,\quad \vec c=\text{const}.$

$3^\circ.\ \operatorname{rot}(U\cdot\vec a)=U\operatorname{rot}\vec a+$

$+\operatorname{grad}U\times\vec a.$

$$C_L=\oint\limits_L \vec a\,d\vec r=$$

$$=\iint\limits_G \operatorname{rot}\vec a\cdot\vec n\,d\sigma.(12)$$

(формула Стокса)

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа (дельта)}$$

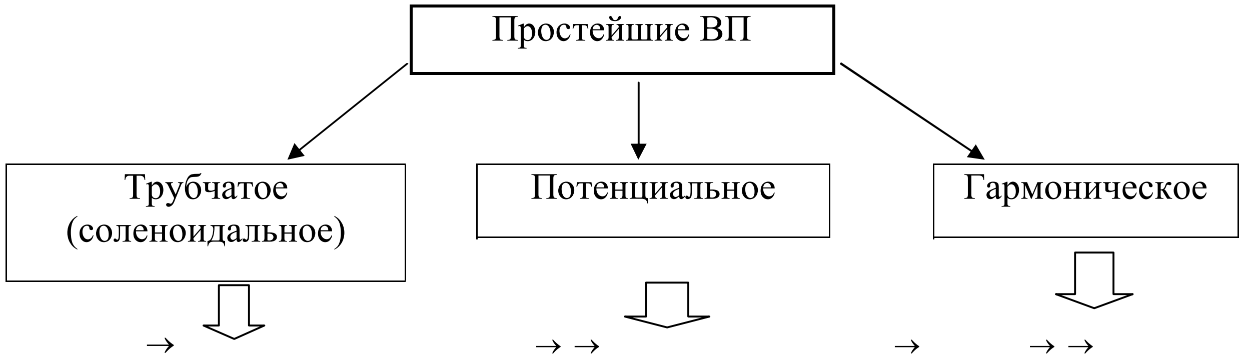
1. $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} U = \nabla^2 U = \Delta U.$

2. $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{\operatorname{grad}} U = \nabla \times (\nabla U) = (\nabla \times \nabla) = 0.$

3. $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{a} = \nabla(\nabla \times \vec{a}).$

4. $\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0.$

5. $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{a} = \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}.$



$\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0$ $\qquad$ $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{a}(M) = 0$ $\qquad$ $\operatorname{div} \vec{a}(M) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{a}(M) = 0$

$$\vec{a}(M) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} U(M), \qquad U(M) - \text{потенциал:}$$

$$U(M) = \int_{M_0}^{M} \vec{a} \cdot d\vec{r} + c = \int_{x_0}^{x} P(t, x_0, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt + c \quad (13)$$

7.1. Скалярное поле (СП) и его характеристики (производная по направлению и градиент)

7.1.1. Найти линии уровня СП $U = x^2 - y^2$.

► Линиями уровня являются равносторонние гиперболы $x^2 - y^2 = C$. При $C = 0$ получим $x^2 + y^2 = 0$ или $(x - y)(x + y) = 0 -$ это значит, что асимптоты гипербол $x - y = 0$ и $x + y = 0$ (биссектрисы координатных углов) также относятся к числу уровня данного СП. ◄

7.1.2. Найти поверхности уровня СП $U=\dfrac{\arcsin z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

► Семейство поверхностей уровня СП- это множество точек, где $U(x,y,z)=C$, т. е. в данном случае $\dfrac{\arcsin z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C$ или $\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sin C$, откуда $z=\sqrt{x^2+y^2}\sin C$, т. е. искомые поверхности уровня - конусы с вершиной в начале координат, осью симметрии которых служит ось OZ. ◄

7.1.3. Найти производную функции $U=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M(3,4)$ по направлению: 1) биссектрисы первого координатного угла; 2) радиуса-вектора точки M; 3) вектора $\vec{l}=\{4,-3\}$.

► Находим частные производные $U_x{}'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $U_y{}'=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $U_x{}'\Big|_M=\dfrac{3}{5}$, $U_y{}'\Big|_M=\dfrac{4}{5}$. По формуле (3) $\dfrac{\partial U}{\partial l}=\dfrac{3}{5}\cos\alpha+\dfrac{4}{5}\cos\beta$, где $\cos\alpha=?$, $\cos\beta=?$

1) Для биссектрисы первого координатного угла: $\alpha=\beta=45^0$ и $\cos\alpha=\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда $\dfrac{\partial U}{\partial\vec{l}}\Big|_M=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}+\dfrac{4\sqrt{2}}{10}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

2) Для вектора $\vec{OM}=\{3,4\}$: $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{3}{5}$, $\cos\beta=\dfrac{4}{5}$ и $\dfrac{\partial U}{\partial\vec{l}}\Big|_M=\dfrac{9}{25}+\dfrac{16}{25}=1$.

3) Для вектора $\vec{l}=\{4,-3\}$: $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\cos\beta=-\dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{\partial U}{\partial\vec{l}}\Big|_M=\dfrac{12}{25}-\dfrac{12}{25}=0$, т. е. в направлении вектора $\vec{l}=\{4,-3\}$ данное скалярное поле стационарно. ◄

7.1.4. Найти градиент СП $U = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ в т. $M(2,-1,1)$.

► По формуле (4) градиент в любой т. $M(x,y,z)$ имеет вид $\overrightarrow{\text{grad}}\,U(M) = U_x' \vec{i} + U_y' \vec{j} + U_z' \vec{k}$. Для данного поля $U_x' = 2x$, $U_y' = 4y$, $U_z' = -2z$ и $U_x'|_M = 4$, $U_y'|_M = -4$, $U_z'|_m = -2$, таким образом $\overrightarrow{\text{grad}}\,U(M) = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$. ◄

7.1.5. Найти наибольшую скорость возрастания СП $U = x^2 y - 5y^3$ в т. $A(2,1)$.

►Наибольшая скорость возрастания СП равна модулю градиента этого поля, т. е. $\max \frac{\partial U}{\partial \vec{l}} = \left|\overrightarrow{\text{grad}}\,U(A)\right|$. Находим

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,U(A) = U_x'|_A \vec{i} + U_y'|_A \vec{j} = 2xy|_A \vec{i} + (x^2 - 15y^2)|_A \vec{j} = 4\vec{i} - 11\vec{j}.$$

Следовательно, $\max \frac{\partial U}{\partial \vec{l}} = \left|\overrightarrow{\text{grad}}\,U(A)\right| = \sqrt{16+121} = \sqrt{137}$ – это наибольшая скорость возрастания поля в т. $A(2,1)$. ◄

7.1.6. Найти градиент СП $W(M) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в т. $M_0(1,2,2)$.

► Градиент СП $W(M)$ определим, используя свойство

$$\overrightarrow{\text{grad}}\frac{U}{V} = \frac{V\,\overrightarrow{\text{grad}}\,U - U\,\overrightarrow{\text{grad}}\,V}{V^2}.$$

Обозначим через $U(M) = x$, $V(M) = x^2 + y^2 + z^2$. Так как

$$U(M_0) = 1, \qquad V(M_0) = 9, \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\,U(M_0) = \vec{i},$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V(M_0) = (2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k})|_{M_0} == 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}, \quad \text{то}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,W(M_0) = \frac{9\vec{i} - \left(2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}\right)}{81} = \frac{7\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}}{81}. \text{ ◄}$$

Аудиторные задачи

I. Найти линии уровня плоских СП:

7.1.7. $U = x + y$. 7.1.8. $U = x^2 + y^2$. 7.1.9. $U = \dfrac{2y}{x^2}$.

II. Найти поверхности уровня СП:

7.1.10. $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 7.1.11. $U = x^2 + y^2 - z$. 7.1.12. $U = x^2 + y^2 - z^2$.

III. Найти производную СП $U(M)$ в т. A по заданному направлению:

7.1.13. $U = xyz$, $A(5,1,2)$, $\vec{l}$: $\vec{AB}$, $B(9,4,14)$.

7.1.14. $U = xy^2 + z^3 - xyz$, $A\,(1,1,2)$, $\vec{l}$: $(\widehat{\vec{l},\vec{OX}}) = (\widehat{\vec{l},\vec{OZ}}) = \dfrac{\pi}{3}$, $(\widehat{\vec{l},\vec{OY}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

7.1.15. $U = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$, $A(2,1)$, $\vec{l}$: $\vec{OA}$.

IV. Найти градиент СП:

7.1.16. $U = \ln|r|$. 7.1.17. $U = \vec{a}\cdot\vec{r}$, $\vec{a} = const$. 7.1.18. $U = |\vec{a}\times\vec{r}|^2$, $\vec{a} = const$.

7.1.19. Найти градиент СП $U = 3x^2y - 3xy^3 + y^4$ в т. $A(1,2,0)$.

7.1.20. Найти наибольшую скорость возрастания поля $U = \ln\left(x^2 + 4y^2\right)$ в т. $A(6,4,0)$.

7.1.21. Найти угол между градиентами СП $U = x^2 + y^2 - z^2$ и $V = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$ в т. $A(1,1,\sqrt{7})$.

Задание на дом

7.1.22. Определить вид линий или поверхностей уровня СП $u = y^2 + x$, $V = xy$, $W = \dfrac{4z}{x^2 - y^2}$.

7.1.23. Показать, что в т. $A(4,-12)$ производная СП $U = x^3 + 3x^2 + 6xy + y^2$ по любому направлению равна 0 (т. е. СП стационарно).

7.1.24. Вычислить с помощью градиента производную СП $U=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}$ в т. $A(1,1,1)$ по направлению $\vec{l}=2\vec{j}-\vec{k}$, воспользовавшись свойствами градиента.

7.1.25. Найти стационарные точки СП $U=2x^2-4xy+y^2-2yz+6z$.

7.1.26. Убедиться в ортогональности поверхностей уровня СП $U=x^2+y^2-2z^2$ и $V=xyz$.

Ответы:

7.1.7. $y=c-x$-семейство параллельных прямых.

7.1.8. $x^2+y^2=c$-семейство концентрических окружностей.

7.1.9. $y=2cx^2$ - семейство парабол.

7.1.10. $x^2+y^2+z^2=c^2$ - семейство концентрических сфер.

7.1.11. $z=x^2+y^2-c$ - семейство параболоидов вращения. 6.1.12. $x^2+y^2-z^2=c$ - семейство конусов II порядка.

7.1.13. $\frac{98}{13}$. 7.1.14. 5. 7.1.15. $-\sqrt{5}$. 7.1.16. $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^2}$.

7.1.17. $\vec{a}$. 7.1.18. $2|\vec{a}|^2\vec{r}-2(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{a}$. 7.1.19. $-12\vec{i}-\vec{j}$.

7.1.20. $\frac{\sqrt{73}}{25}$. 7.1.21. $\frac{\pi}{2}$.

7.1.22. $x-c=y^2$ - семейство парабол с вершиной в т $(c,0)$, $y=\frac{c}{x}$ - семейство гипербол, $z=\frac{c\left(x^2-y^2\right)}{4}$ – семейство гиперболических параболоидов.

7.1.24. $3\frac{\sqrt{15}}{5}$.

7.2. Векторное поле (ВП), его геометрические характеристики. Поток и дивергенция ВП

7.2.1. Найти векторную линию ВП $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} - 2z\vec{k}$, проходящую через т. $M_0(1,-1,2)$.

► Система дифференциальных уравнений (5) векторных линий в этом случае имеет вид $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$, $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}$. Интегрируя эту систему уравнений, получим: $xy = c_1$, $y^2 = c_2 z$. Условие прохождения векторной линии через т. $M_0(1,-1,2)$ даёт $c_1 = -1$, $c_2 = \frac{1}{2}$. Итак, искомая векторная линия- это кривая пересечения гиперболического цилиндра $xy = -1$, образующие которого параллельны оси OZ, с параболическим цилиндром $2y^2 = z$, образующие которого параллельны оси OX. ◄

7.2.2. Найти векторные линии ВП $\vec{a} = \vec{r} = \{x, y, z\}$ и определить вид векторных трубок.

► Интегрируя систему дифференциальных уравнений $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{y}$, получим $y = c_1 x$, $z = c_2 y$ или $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$ - прямые $L \in R^3$. По определению векторными трубками в данном случае будут конические поверхности с вершинами в начале координат, направляющими которых служат заданные замкнутые кривые, а образующими - полученные векторные линии. ◄

7.2.3. Найти поток векторного поля $\vec{a} = y\,\vec{i} + x\,\vec{j} - z\,\vec{k}$ через верхнюю сторону треугольника ABC с вершинами в точках $A(1,0,0)$, $B(0,0,1)$, $C(0,-1,0)$.

► Для вычисления потока ВП можно воспользоваться одним из двух методов: проектирования на одну из координатных плоскостей и проектирования на все три координатные плоскости. В первом случае (при проектировании на плоскость XOY) поверхность G можно задать уравнением $z = f(x,y)$, и так как элемент площади этой поверхности $d\sigma = \dfrac{dxdy}{|\cos\gamma|}$, то вычисление потока Π_G через выбранную сторону поверхности сводится к вычислению двойного интеграла по формуле $\Pi_G = \iint\limits_G \vec{a} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint\limits_D \left. \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\cos\gamma|} \right|_{z=f(x,y)} dxdy$. Здесь орт $\vec{n}$ нормали к выбранной стороне поверхности ти G имеет проекции, вычисляемые по формуле (7). Если угол $\gamma = \vec{OZ} \,\hat{,}\, \vec{n} < \dfrac{\pi}{2}$, то в формулах (7) берётся знак «+», если $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$, то - «–». Символ $\left. \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\cos\gamma|} \right|_{z=f(x,y)}$ означает, что в подинтегральной функции вместо z надо подставить $f(x,y)$. Аналогично подсчитывается поток, если оказывается удобным проектировать поверхность G на плоскости YOZ или XOZ.

Во втором случае, когда поверхность G взаимно однозначно проектируется на все три координатных плоскости и $D_{xy} = \text{пр}_{XOY} G$, $D_{xz} = \text{пр}_{XOZ} G$, $D_{yz} = \text{пр}_{YOZ} G$ уравнение поверхности G: $F(x,y,z) = 0$ однозначно разрешимо относительно каждого из аргументов x, y и z, так что $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$ и $z = z(x,y)$. Тогда поток ВП $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ через поверхность G, единичный вектор нормали к которой $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, можно записать как

$$\Pi_G = \iint\limits_G \vec{a} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iint\limits_G (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z), y, z) dydz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x, y(x,z), z) dxdz \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, z(x,y)) dxdy \text{ (см. формулы (2) раздела 6).}$$

Найдём искомый поток ВП, используя оба этих метода.

1. Уравнение плоскости, в которой лежит ΔABC имеет вид $x+y+z=1$ (рис. 7.1), откуда $z=1-x+y$. Так как по условию $\gamma=\overrightarrow{n}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OZ}<\dfrac{\pi}{2}$, $\vec{n}=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ (по формуле 7). ΔABC проектируется однозначно на плоскость XOY в область D_{xy}, которой является ΔABC.

Находим скалярное произведение

$$\vec{a}\cdot\vec{n}=\frac{y-x-z}{\sqrt{3}}.$$

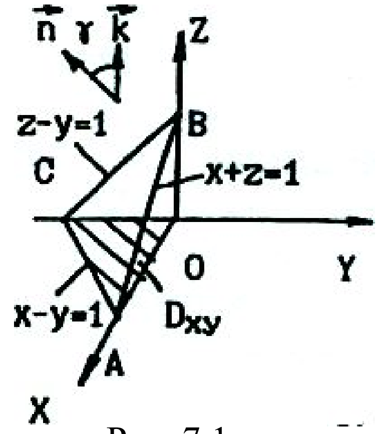


Рис. 7.1.

Подставляя $z=1-x+y$, вычисляем искомый поток:

$$\Pi_G=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\cos\gamma|}\Bigg|_{z=f(x,y)}=\iint\limits_{D_{xy}}\big(y-x-(1--x+y)\big)dxdy=$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=-\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x-1}^{0}dy=\int\limits_0^1(x-1)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{2}.$$

7. Учитывая, что $\cos\alpha>0$, $\cos\beta<0$, $\cos\gamma>0$, имеем:

$$\Pi_G=+\iint\limits_{D_{yz}}P(x(y,z),y,z)dydz-\iint\limits_{D_{xz}}Q(x,y(x,z),z)dxdz+\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))dxdy=$$

$$=I_1+I_2+I_3$$

$$I_1=\iint\limits_{BOC}ydydz=\int\limits_{-1}^{0}ydy\int\limits_0^{1+y}dz=\int\limits_{-1}^{0}y(1+y)dy=-\frac{1}{6}.$$

$$I_2=-\iint\limits_{AOB}xdxdz=-\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{1-x}dz=-\int\limits_0^1 x(1-x)dx=-\frac{1}{6}.$$

$$I_3=\iint\limits_{AOC}(-z)dxdy\Big|^{0}_{-z=x-y-1}=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x-1}^{0}(x-y-1)dy=-\frac{1}{6}.$$

Окончательно получаем:

$$\varPi_G = -\frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

7.2.4. Найти поток ВП $\vec{a} = y^2 \vec{j} + z\vec{k}$ через часть поверхности G: $z = x^2 + y^2$, отсечённой плоскостью $z = 2$. Нормаль к параболоиду берётся внешняя.

► Данная поверхность G (параболоид вращения) проектируется взаимно однозначно на плоскость XOY в круг D_{xy} центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt{2}$ (рис. 7.2). По условию задачи нормаль $\vec{n}$ образует тупой угол с осью OZ, поэтому $\vec{n} = \{2x, 2y, -1\}$.

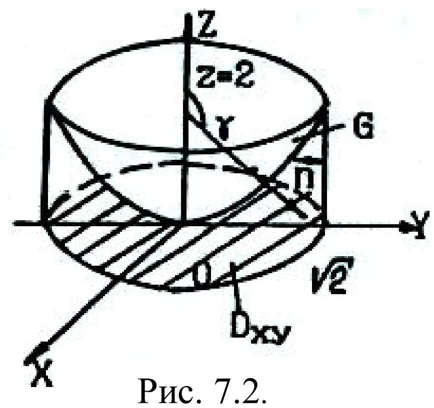


Рис. 7.2.

Искомый поток будет равен

$$\varPi_G = \iint_G \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\cos\gamma|}\Bigg|_{z=f(x,y)} dxdy = \iint_{D_{xy}} \left(y^2 - 2y - \left(x^2 + y^2\right)\right) dxdy = \{x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\} =$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(2r^3 \sin^3\varphi - r^2\right) r dr d\varphi = 2\int_0^{2\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^4 dr - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr =$$

$$= -\frac{2\pi\, r^4}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = -2\pi. \blacktriangleleft$$

7.2.5. Найти поток ВП $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + xyz\vec{k}$ через круг, полученный сечением шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ плоскостью $y = x$. Взять сторону круга, обращённую к положительной полуоси OX.

► Так как круг лежит в плоскости $y = x$, перпендикулярной плоскости XOY, проектировать на XOY нельзя (нарушается взаимная однозначность проектирования). На другие координатные плоскости круг проектируется взаимно однозначно. Будем проектировать, например, на плоскость XOZ. Получим область D_{xz}, ограниченную эллипсом (рис. 7.3). Уравнение эллипса найдём, исключив y из системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ y = x \end{cases}$,

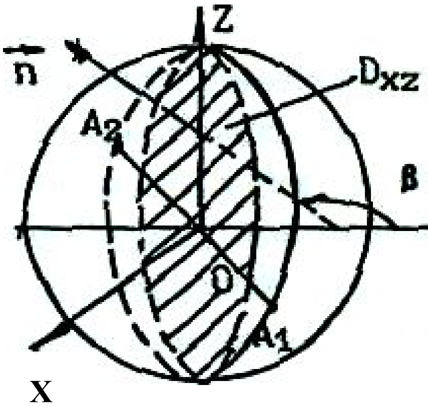


Рис. 7.3.

откуда $2x^2 + z^2 = R^2$ или $\frac{2x^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1.$

По условию нормаль $\vec{n}$ образует тупой угол β с осью OY (рис. 7.3), поэтому берём $\vec{n} = y_x' \vec{i} - \vec{j} + y_z' \vec{k}$ и, так как круг лежит в плоскости $y = x$, $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j}$. Тогда искомый поток равен

$$П_G = \iint_G \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{D_{xz}} \vec{a} \cdot \vec{n} \Big|_{y=y(x,z)} dxdz = \iint_{D_{xz}} (1+1) dxdz =$$

$$2 \iint_{D_{xz}} dxdz = S_{\text{эллипса}} = \pi R^2 \sqrt{2} \quad \left(a = \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad c = R, \quad S = \pi ac \right). \blacktriangleleft$$

7.2.6. Используя формулу Гаусса-Остроградского, вычислить поток ВП $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ через замкнутую поверхность G: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z = 0$ $(z > 0)$ в направлении внешней нормали.

► Поверхность G в данной задаче ограничивает собой половину шара радиуса R с центром в начале координат (рис. 7.4). Вычислим $div\, \vec{a} = 2x + 2y + 2z.$ Искомый поток по формуле Гаусса-Остроградского (9) равен

$$П_G = \oiint_G \vec{a} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \iiint_\Omega div\, \vec{a}\, dV = \iiint_\Omega 2(x+y+z) dV =$$

$$\{x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta\} =$$

$$= 2\iiint\limits_{\Omega}(r\sin\theta\cos\varphi + r\sin\theta\sin\varphi + r\cos\theta)r^2 \cdot$$

$$\cdot\sin\theta\, drd\theta\, d\varphi = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{R} r^3 dr\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\varphi +$$

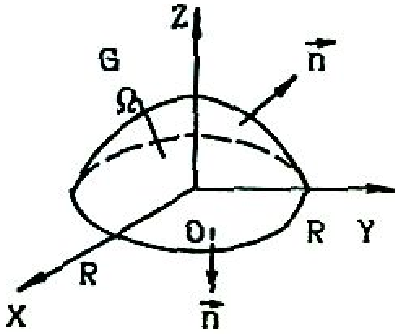


Рис. 7.4.

$$+\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{R^4}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\, d\theta =$$

$$= \pi R^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\, d\sin\theta = \pi R^4\sin^2\frac{\theta}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^4}{2}. \blacktriangleleft$$

<u>Аудиторные задачи</u>

I. Найти векторные линии ВП:

7.2.7. $\vec{a} = (x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j}$. 7.2.8. $\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j}$. 7.2.9. $\vec{a} = (y+z)\vec{i} - x\vec{j} - x\vec{k}$.

II. Найти поток векторного поля $\vec{a}$ через внешнюю сторону поверхности G:

7.2.10. $\vec{a} = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$, G: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

7.2.11. $\vec{a} = \vec{r} = \{x, y, z\}$, G: $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

7.2.12. $\vec{a} = (x - 2z)\,\vec{i} + (x + 3y + z)\,\vec{j} + (5x + y)\,\vec{k}$, G: ΔABC, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

III. Используя формулу Гаусса-Остроградского, найти поток ВП $\vec{a}$ через указанные замкнутые поверхности G:

7.2.13. $\vec{a} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, G: $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 1$.

7.2.14. $\vec{a} = x^2 z\,\vec{i} + (z - x)\,\vec{j} + \left(2y + xz^2\right)\vec{k}$, G: $z = 1 - x$, $y = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

7.2.15. $\vec{a} = 2x\,\vec{i} - y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, G: $9 - z = x^2 + y^2$, $z = 0$.

Задание на дом

7.2.16. Найти векторные линии ВП $\vec{a} = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k}$ и определить вид векторных трубок.

7.2.17. Найти поток ВП $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через верхнюю поверхность параболоида $x^2 + y^2 + 2az = a^2$, расположенную во втором октанте $(x < 0, \quad y > 0, \; z > 0)$.

7.2.18. Вычислить поток ВП $\vec{a} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ через замкнутую поверхность $G: \; y = x^2, \quad y = 4x^2, \; y = 1, \quad z = y, \quad z = 0 \quad (x \ge 0)$.

Ответы:

7.2.7. $x^2 + y^2 = ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$ или $r = ce^{\varphi}$ (в полярных координатах). 7.2.8. Гиперболы $xy = c$. 7.2.9. Линии пересечения сфер $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и параллельных плоскостей $y - z = c$ (окружности). 7.2.10. $\frac{3\pi}{16}$.

7.2.11. π. 7.2.12. $\frac{5}{3}$. 7.2.13. $\frac{\pi}{3}$. 7.2.14. $\frac{1}{2}$.

7.2.15. 162π. 7.2.16. Окружности, являющиеся линиями пересечения сфер $x^2 + y^2 + z^2 = c_1^2$ с плоскостями $x + y + z = c_2$. Тороидальные поверхности, образованные окружностями с центрами на прямой $x = y = z$, лежащими в плоскостях $x + y + z = c_2$, сечениями которых служат заданные замкнутые кривые.

7.2.17. $\frac{\pi a^4}{48}$. 7.2.18. 1.

7.3. Циркуляция и ротор ВП. Простейшие ВП

7.3.1. Вычислить циркуляцию ВП $\vec{a} = ye^{xy}\,\vec{i} + xe^{xy}\,\vec{j} + xyz\,\vec{k}$ вдоль линии L, получаемой пересечением конуса $x^2 + y^2 = (z-1)^2$ с координатными плоскостями.

► Сделаем чертёж. Линия L состоит из отрезков BC и CA, лежащих в координатных плоскостях YOZ и XOZ, соответственно, и дуги $\breve{AB}$ окружности $x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0$ (рис. 7.5). Тогда циркуляция данного ВП равна

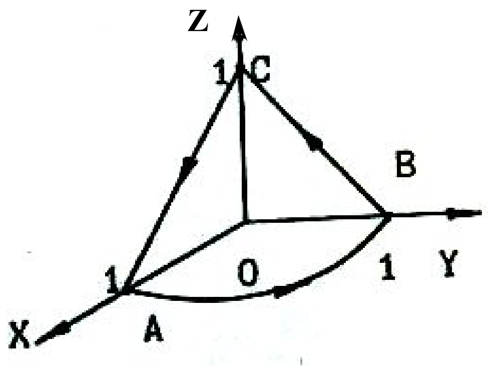


Рис. 7.5.

$$C_L = \oint_L \vec{a}\cdot d\,\vec{r} = \int_{\overset{\cup}{BC}} \vec{a}\cdot d\,\vec{r} + \int_{\overset{\cup}{CA}} \vec{a}\cdot d\,\vec{r} + \int_{\overset{\cup}{AB}} \vec{a}\cdot d$$

1. На отрезке BC имеем

$$x = 0,\ dx = 0,\ \ z = 1 - y,\ \ dz = -dy,\ \ y \in [0, 1].$$

Следовательно,

$$\int_{BC} \vec{a}\cdot d\,\vec{r} = \int_{BC} ye^{xy}dx + xe^{xy}dy + xyzdz = 0.$$

2. На отрезке CA имеем $y = 0,\ dy = 0,\ z = 1 - x,\ \ dz = -dx,\ x \in [0, 1].$ Следовательно,

$$\int_{CA} \vec{a}\cdot d\,\vec{r} = \int_{CA} ye^{xy}dx + xe^{xy}dy + xyzdz = 0.$$

3. Дуга $\overset{\cup}{AB}$ окружности $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$ задаётся параметрическими уравнениями $x = \cos t,\ \ y = \sin t,\ \ z = 0,\ \ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right].$ Тогда $dx = -\sin t dt,$ $dy = \cos t dt, \quad dz = 0.$ Следовательно,

$$\int_{\overset{\cup}{AB}} \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi/2} \left(-\sin^2 t e^{\cos t \sin t} + \cos^2 t e^{\cos t \sin t}\right) dt =$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2te^{0,5\sin 2t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{0,5\sin 2t}d(0,5\sin 2t)=e^{0,5\sin 2t}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

Искомая циркуляция ВП $C_L=0$. ◄

7.3.2. Твёрдое тело вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг оси OZ. Вычислить циркуляцию поля линейных скоростей вдоль окружности радиуса R, центр которой лежит на оси вращения, а плоскость окружности перпендикулярна оси вращения, в направлении вращения.

► Будем считать твёрдое тело достаточно большим, чтобы указанная окружность радиуса R помещалась целиком внутри (иначе поле скоростей будет задано не во всех точках окружности). Можно считать, что окружность L расположена в плоскости XOY, т. е. её уравнение $x^2+y^2=R^2$. По определению циркуляция C_L равна $C_L=\oint\limits_L \vec{a}\cdot d\vec{r}=\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz$. В нашем случае $\vec{a}(x,y)=\vec{\omega}\times\vec{r}$, где $\vec{\omega}=\omega\cdot\vec{k}-$вектор угловой скорости, $\vec{r}-$радиус-вектор т. $M(x,y)$: $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ и $\vec{a}=\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&\omega\\x&y&0\end{vmatrix}=-\omega y\vec{i}+\omega x\vec{j}$. Тогда циркуляция

$C_L=\oint\limits_L(-\omega\, ydx+\omega\, xdy)$. Считаем, что $\vec{\omega}\uparrow\uparrow\vec{k}$, следовательно, окружность обходится в положительном направлении. Параметрические уравнения окружности $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $t\in[0,2\pi]$, $dx=-R\sin tdt$, $dy=R\cos tdt$. Имеем:

$$C_L=\int_0^{2\pi}\left(\omega R^2\sin^2 t+\omega R^2\cos^2 t\right)dt=\omega R^2\int_0^{2\pi}dt=2\pi\omega R^2.$$ ◄

7.3.3. Найти циркуляцию ВП $\vec{a}(M) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ по контуру $L:\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ \ x + y + z = 0,$ используя формулу Стокса.

► Контур L в данном примере представляет собой окружность радиуса R. Будем считать, что обход её совершается против часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси OX. Вычислим $\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. В качестве поверхности G, натянутой на контур L, возьмём круг, имеющий L своей границей и лежащий в плоскости $x + y + z = 0$. Согласно выбранной ориентации контура нормаль n необходимо выбрать следующим бразом

$$\vec{n} = -z_x'\vec{i} - z_y'\vec{j} + \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k},\quad \vec{n}^0 = \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}}.$$

Согласно формуле Стокса (12), искомая циркуляция равна

$$C_L = \oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint_G \operatorname{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}^0 d\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_G \left(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right)\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)d\sigma =$$

$$= -3\sqrt{3}\iint_G d\sigma = -\pi R^2\sqrt{3},$$

так как $\iint_G d\sigma = S_{\text{круга}} = \pi R^2$. ◄

7.3.4. Проверить, что плоское ВП $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ соленоидально, и показать, что его векторные линии замкнуты.

► $\operatorname{div}\vec{a} = (-y)_x' + (x)_y' = 0 \quad \Rightarrow$ поле $\vec{a}-$ соленоидальное. Составим дифференциальное уравнения векторных линий: $\dfrac{dx}{-y} = \dfrac{dy}{x} \quad \Rightarrow \quad xdx + ydy = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = c^2$ - окружности (замкнутые линии). ◄

7.3.5. Показать, что ВП $\vec{a} = \left(3yz + x^2\right)\vec{i} + \left(2y^2 + 3xz\right)\vec{j} + \left(z^2 + 3xy\right)\vec{k}$ потенциально и найти его потенциал $U(M)$.

► Для произвольной точки M имеем:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3yz + x^2 & 2y^2 + 3xz & z^2 + 3xy \end{vmatrix} =$$

$$= (3x - 3x)\,\vec{i} - (3y - 3y)\,\vec{j} + (3z - 3z)\,\vec{k} = 0.$$

Значит, поле $\vec{a}(M)$ потенциально во всём пространстве. Для вычисления потенциала $U(M)$ за точку M_0 удобно принять начало координат, тогда, применяя формулу (13), получим:

$$U(M) = \int_0^x t^2 dt + \int_0^y 2t^2 dt + \int_0^z \left(t^2 + 3xy\right) dt + c = \frac{x^3 + 2y^3 + z^3}{3} + 3xyz + c. \text{ ◄}$$

7.3.6. Показать, что ВП

$$\vec{a} = \left(\frac{y^2 z - z^3}{3} + 5x\right)\vec{i} + \left(2xyz - 3y\right)\vec{j} + \left(xy^2 - 2z - xz^2\right)\vec{k}$$

является гармоническим.

► $\operatorname{rot}\vec{a} = (2xy - 2xy)\,\vec{i} - \left(y^2 - z^2 - y^2 + z^2\right)\vec{j} + (2yz - 2yz)\,\vec{k} = 0,$

$$\operatorname{div}\vec{a} = 5 + (2xz - 3) + (2 - 2xz) = 0.$$

Поле $\vec{a}$ является потенциальным и соленоидальным одновременно, т. е. гармоническим. ◄

7.3.7. Проверить, является ли функция $U(M) = x^2 - 2xy - y^2$ гармонической $(\Delta U(M) = 0)$.

► Докажем, что $\Delta U(M) = 0$. Вычислим частные производные

$$U_x' = 2x - 2y,\; U_y' = -2x - 2y,\quad U_{xx}'' = 2,\quad U_{yy}'' = -2 \text{ и}$$

$$\Delta U(M) = U_{xx}'' + U_{yy}'' = 2 - 2 = 0,$$

что и требовалось доказать. ◄

<u>Аудиторные задачи</u>

I. Вычислить циркуляцию ВП $\vec{a}(M)$ вдоль линии L:

7.3.8. $\vec{a}(M) = (x^3 - y)\,\vec{i} + (y^3 + x)\,\vec{j}$, $\quad L:\quad x^2 + y^2 = R^2$.

7.3.9. $\vec{a}(M) = xy\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$, $\quad L:\; x^2 + y^2 = 1,\;\; x + y + z = 1$.

7.3.10. $\vec{a}(M) = (y - z)\,\vec{i} + (z - x)\,\vec{j} + (x - y)\,\vec{k}$, $\; L:\; x = 3\cos t,\; y = 3\sin t,$ $z = 2(1 - \cos t),\; t\nearrow$.

II. Используя формулу Стокса, найти циркуляцию ВП $\vec{a}(M)$ по замкнутому контуру L:

7.3.11. $\vec{a}(M) = 2xz\,\vec{i} - y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, $L:\; x + y + 2z = 2,\;\; x = 0,\; y = 0,\; z = 0$.

7.3.12. $\vec{a}(M) = y\,\vec{i} - x\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, $\quad L:\; x^2 + y^2 + z^2 = 4,\;\; z^2 = x^2 + y^2,\;\; z \ge 0$.

7.3.13. $\vec{a}(M) = y^2\,\vec{i} + z^2\,\vec{j}$, $\quad L:\; x^2 + y^2 = 9,\quad 3y + 4z = 5$.

III. Проверить соленоидальность ВП:

7.3.14. $\vec{a}(M) = x\left(z^2 - y^2\right)\vec{i} + y\left(x^2 - z^2\right)\vec{j} + z\left(y^2 - x^2\right)\vec{k}$.

7.3.15. $\vec{a}(M) = \dfrac{x\,\vec{i}}{yz} + \dfrac{y\,\vec{j}}{xz} - (x + y)\dfrac{\ln z\,\vec{k}}{xy}$.

7.3.16. $\vec{a}(M)=\dfrac{x\vec{i}-y\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}+\left(x^2-y^2\right)z\vec{k}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$.

IV. Показать, что ВП потенциальные и найти их потенциалы:

7.3.17. $\vec{a}(M)=\left(3x^2-2xy+y^2\right)\vec{i}+\left(x^2-2xy+3y^2\right)\vec{j}$.

7.3.18. $\vec{a}(M)=\dfrac{yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}}{1+x^2y^2z^2}$.

7.3.19. $\vec{E}(M)$ - кулоновское поле $\vec{E}(M)=\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$.

V. Являются ли гармоническими функции $U(M)$:

7.3.20. $U=x^2y-y^2z+z^2x$. 7.3.21. $U=x^2-y^2$. 7.3.22. $U=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Задание на дом

7.3.23. Вычислить циркуляцию ВП $\vec{a}(M)=(2x+z)\vec{i}+(2y-z)\vec{j}+xyz\vec{k}$ вдоль линии L, получаемой пересечением параболоида вращения $x^2+y^2=1-z$ с координатными плоскостями.

7.3.24. Используя формулу Стокса, найти циркуляцию ВП $\vec{a}(M)=z^2\vec{i}+x^2\vec{j}+y^2\vec{k}$ по контуру $L: x^2+y^2+z^2=R^2,\ \ x+y+z=R$.

7.3.25. Проверить соленоидальность ВП

1) $\vec{a}(M)=xy^2\vec{i}+x^2y\vec{j}-\left(x^2+y^2\right)z\vec{k}$; 2) $\vec{a}(M)=\left(x^2y+y^3\right)\vec{i}+\left(x^2-xy^2\right)\vec{j}$.

7.3.26. Показать, что ВП $\vec{a}=\left(x^2-2yz\right)\vec{i}+\left(y^2-2xz\right)\vec{j}+\left(z^2-2xy\right)\vec{k}$ потенциально и найти потенциал этого поля.

7.3.27. Является ли гармоническими следующие функции:

1) $U=\sqrt{x^2+y^2-x}$; 2) $U=Ax^3+3Bx^2y+3Cxy^2+Dy^3$.

Ответы:

7.3.8. $2\pi R^2$. 7.3.9. $-\pi$. 7.3.10. 30π. 7.3.11. $\frac{4}{3}$.

7.3.12. -4π. 7.3.13. 0. 7.3.14. Да. 7.3.15. Да.

7.3.16. Да. 7.3.17. $U = x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3 + c$.

7.3.18. $U = \mathrm{arctg}\, xyz + c$. 7.3.19. $U = \frac{1}{|\vec{r}|} + c$. 7.3.20. Нет.

7.3.21. Да. 7.3.22. Да. 7.3.23. $\frac{4}{3}$. 7.3.24. $\frac{4}{3}\pi R^3$

7.3.25. 1) Да; 2) Да. 7.3.26. $U(M) = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - 2xyz + c$.

7.3.27. 1) Нет; 2) Да, если $A + C = B + D = 0$.

Вопросы для самопроверки

1. Чему равна производная СП по направлению любой касательной к поверхности (линии) уровня?

Возможные ответы: 1. Постоянной. 2. Нулю. 3. Функции.

2. Доказать, что производная функции $U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в любой т. $M(x, y, z)$ в направлении, идущем от этой точки к началу координат, равна $-\frac{2U}{r}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Влияет ли выбор направления нормали $\vec{n}$ к поверхности уровня на направление $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U(M)$?

Возможные ответы: 1. Да. 2. Нет.

4. Каким требованиям должны удовлетворять составляющие ВП $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$?

Возможные ответы: 1.Непрерывность. 2. Кусочная непрерывность. 3. Непрерывность и дифференцируемость.

5. Запишите ДУ векторных линий для плоского ВП $\vec{a} = \{P, Q\}$.

6. Распространяются ли на поток ВП свойства линейности и аддитивности интегралов?

Возможные ответы: 1.Да. 2. Нет.

7. Доказать, что объём тела, ограниченного поверхностью G, равен

$$V_\Omega = \frac{1}{3}\oiint_G xdydz + ydxdz + zdxdy.$$

8. Что можно сказать о потоке через любое поперечное сечение векторной трубки соленоидального ВП $\vec{a}(M)$?

Возможные ответы: 1.Равен нулю. 2. Возрастает с увеличением площади сечения. 3. Неизменен.

9. Доказать, что в потенциальном поле $\vec{F}(M)$ его потенциальная функция $U(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta U(M) = div\,\vec{F}(M)$.

Самостоятельная работа «Теория поля»

1.1. Построить линии уровня СП $U = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1.2. Построить поверхности уровня СП $U = x + 2y + z$.

1.3. Построить линии уровня СП $U = 3x + 2y$.

1.4. Построить поверхности уровня СП $U = x - 5y - 2z$.

1.5. Построить линии уровня СП $U = 2x - 3y + 4$.

1.6. Построить поверхности уровня СП $U = x^2 + 2y^2 + z^2$.

1.7. Построить линии уровня СП $U = x^2 + 2y^2$.

1.8. Построить поверхности уровня СП $U = \sqrt{x^2 - 2y^2 + z^2}$.

1.9. Построить линии уровня СП $U = 4x^2 + y^2$.

1.10. Построить поверхности уровня СП $U = x + 2y^2 + 3z^2$.

1.11. Построить линии уровня СП $U = x^2 + y$.

1.12. Построить поверхности уровня СП $U = x^2 - y$.

1.13. Построить линии уровня СП $U = -y^2 + 2x$.

1.14. Построить поверхности уровня СП $U = z^2 + 2z + x$.

1.15. Построить линии уровня СП $U = \frac{2y}{x^2}$.

1.16. Построить поверхности уровня СП $U = \frac{\arccos z}{x^2 + y^2}$.

1.17. Построить линии уровня СП $U = 2x^2 + y^2 - 4x$.

1.18. Построить поверхности уровня СП $U = \frac{3x^2 + 4y^2}{5z}$.

1.19. Построить линии уровня СП $U = 3y^2 - 2x^2 + 6y$.

1.20. Построить поверхности уровня СП $U = \frac{3z^2}{5x^2 - y^2}$.

1.21. Построить линии уровня СП $U = \frac{1}{x^2}\left(2y^2 - 4y + 1\right)$.

1.22. Построить поверхности уровня СП $U = \frac{2x^2}{4y - y^2}$.

1.23. Построить поверхности уровня СП $U = \frac{2x^2}{4y - y^2}$.

1.24. Построить поверхности уровня СП $U = 3xy$.

1.25. Построить линии уровня СП $U = 4y^2 - x^2 + 2x$.

1.26. Построить поверхности уровня СП $U = \frac{1}{y^2}\left(4z + z^2\right)$.

1.27. Построить линии уровня СП $U = \frac{x - 1}{y^2 + 2y + 1}$.

1.28. Построить поверхности уровня СП $U = \dfrac{3x^2}{y^2 + 4z^2}$.

1.29. Построить линии уровня СП $U = \dfrac{4 + x^2}{y^2}$.

1.30. Построить поверхности уровня СП $U = \dfrac{z}{y^2 - 2y}$.

2.1. $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|_{\max} = ?\quad U = e^{xy^2 + z^2 - xyz},\ M_0(4, -1, 2)$.

2.2. $\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}U\Big|_{M_1} \widehat{,} \overrightarrow{\operatorname{grad}}U\Big|_{M_2}\right) = ?\ \ U = x^2 + y^2 - z^2,\ M_1(2, 3, -1),\ M_2(1, -1, 2)$.

2.3. Найти точки, в которых $|\overrightarrow{\operatorname{grad}}U| = 1,\ \ U = xy$.

2.4. Найти точки, в которых $|\overrightarrow{\operatorname{grad}}U| = 2,\ U = x^2 + y^2$.

2.5. Найти точку, в которой $\overrightarrow{\operatorname{grad}}U = \vec{a},\quad U = 2x^2 + xy,\quad \vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

2.6. Каково направление наибольшего изменения СП $U = x^3 + y^3 + 3x + 3y$ в начале координат?

2.7. Найти точку, в которой $\overrightarrow{\operatorname{grad}}U = \vec{a},\quad U = 3x^2 + y^2,\ \vec{a} = \{1, 2\}$.

2.8. $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0} = ?\quad U = x^2 + y^2 + 5x - \dfrac{4}{y},\quad M_0(0, 2)$

в направлении $\overrightarrow{M_0M}$, $M(3, 6)$.

2.9. $\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}U \widehat{,} \overrightarrow{\operatorname{grad}}V\right)_M = ?\ U = \dfrac{y^2z^2}{x^2}, V = \dfrac{x^3}{\sqrt{2}} - \dfrac{y^3}{\sqrt{2}} - \dfrac{8z^3}{\sqrt{3}},\ M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2.10. $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|_{\max} = ?\quad U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ M_0(1, 2, 2)$.

2.11. $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0} = ?\ \ U = \ln\left(x^2 + y^2\right) + xyz,\quad \vec{l} = \{1, -1, 5\},\quad M_0(1, -1, 2)$.

2.12. $\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}\,U}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\,V}\right)_{M_0} = ?\quad U = \dfrac{x^3y^2}{z},\quad V = \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} - \dfrac{1}{\sqrt{6}z},\quad M_0\left(1, 2, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right).$

2.13. $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0} = ?\quad U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ M_0(2, 1, -2),$

$$(\vec{l}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OX}) = (\vec{l}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OY}) = (\vec{l}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{OZ}) < \frac{\pi}{2}.$$

2.14. $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|_{\max} = ?\ U = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz},\ M_0\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, 3\right).$

2.15. Показать, что $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0} = 0\ \forall l,\ M_0(4, -12),\ U = x^2(x + 3) + y(6x + y).$

2.16. $\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}\,U}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\,V}\right)_{M_0} = ?\quad U = x^2 - y^2 - 3z^2,\ V = \dfrac{yz^2}{x},$

$$M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

2.17. $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|_{\max} = ?\quad U = x(\ln y - \mathrm{arctg}\, z),\quad M_0(-2, 1, -1).$

2.18. $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0} = ?\quad U = x^2 + y^2 - 3x + 2y,\quad M_0(0, 0),\quad \vec{l} = \{4, 3\}.$

2.19. $\overrightarrow{\mathrm{grad}\,U} = ?,\ |\overrightarrow{\mathrm{grad}\,U}| = ?,\quad U = x\sin z - y\cos z,\quad M_0(0, 0, 0).$

2.20. $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0} = ?\ U = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2},\ \vec{l} = \{1, 2 - 2\},\ M_0(1, 1, 0).$

2.21. $\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}\,U}\,\widehat{,}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}\,V}\right)_{M_0} = ?\ U = \dfrac{z^2}{xy^2},\ V = 3\sqrt{2}x^2 - \dfrac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2,\ M_0\left(\dfrac{1}{3}, 2, \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right).$

2.22. $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|_{\max} = ?\quad U = 2x^2 + yz + xz^2,\quad M_0(3, -1, 1).$

2.23. $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0} = ?\quad U = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x},\quad M_0(1, 3),\quad \vec{l} = \{3, 4\}.$

2.24. $\overrightarrow{\text{grad}}\,U = ?,\ |\overrightarrow{\text{grad}}\,U| = ?,\ U = \sqrt{4 + x^2 + y^2},\ M_0(2,1).$

2.25. $\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,U \,\widehat{,}\, \overrightarrow{\text{grad}}\,V\right)_{M_0} = ?\ U = \dfrac{x^2}{yz^2}\quad V = \dfrac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3,$

$$M_0\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

2.26. $\left(\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right)_{M_0} = ?\ U = 2x^2 + xy + y^2,\ M_0(2,2),\ \vec{l} = \vec{i} - \sqrt{3}\,\vec{j}.$

2.27. $\overrightarrow{\text{grad}}\,U = ?,\ |\overrightarrow{\text{grad}}\,U| = ?,\ U = x^2y^2z + \dfrac{3}{\pi}\sin\left(xy\dfrac{\pi}{3}\right),\ M_0(1,1,2).$

2.28. $\left(\dfrac{\partial U}{\partial l}\right)_{M_0} = ?\ U = 2x^3y + 2\sqrt{x^2 - y^2},\ M_0(2,1),\ \vec{l} = 3\,\vec{i} + 4\,\vec{j}.$

2.29. $\overrightarrow{\text{grad}}\,U = ?,\ |\overrightarrow{\text{grad}}\,U| = ?,\quad U = z\sin y - x\cos y,\ M_0(0,0,0).$

2.30. $\left.\dfrac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|_{M_0} = ?\quad U = x^3z + 3x^2 + 6xy + y^2 - z^2,\ M_0(3,-1,1),\ \overrightarrow{M_0M},$

$$M_1(5,1,2).$$

3.1. $\operatorname{div}\vec{a} = ?,\ \vec{a} = x^2yz\,\vec{i} + xy^2z\,\vec{j} + xyz^2\,\vec{k}.$

3.2. $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a} = ?\quad \vec{a} = xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} - xz\,\vec{k}.$

3.3. $\operatorname{div}\vec{a} = ?\quad \vec{a} = \left(y^2 + z^2\right)\vec{i} + \left(x^2 + z^2\right)\vec{j} + \left(y^2 + x^2\right)\vec{k}.$

3.4. $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a} = ?\qquad \vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(yx^2 + y^2 + z^2x\right).$

3.5. $\operatorname{div}\vec{a} = ?\qquad \vec{a} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$

3.6. $\nabla \times \vec{a} = ?\qquad \vec{a} = (x+z)\,\vec{i} + (y+z)\,\vec{j} + (x^2 + z)\,\vec{k}.$

3.7. $\nabla \times \vec{a} = ?\qquad \vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$

3.8. $\nabla \times \vec{a} = ?\quad \vec{a} = \left\{z^3, y^3, x^3\right\}.$

3.9. $\nabla\times\vec{a}=?\quad \vec{a}=\{xy,\ yz,\ xz\}.$

3.10. $\nabla\times\vec{a}=?\quad \vec{a}=\{x^2+y^2,\ y^2+z^2,\ z^2+x^2\}.$

3.11. Найти векторные линии ВП $\vec{a}=4y\,\vec{i}-9x\,\vec{j}$.

3.12. Найти векторные линии ВП $\vec{a}=9z\,\vec{j}-4y\,\vec{k}$.

3.13. Найти векторные линии ВП $\vec{a}=x\,\vec{i}+3z\,\vec{k}$.

3.14. $\operatorname{div}\vec{a}=?\quad \vec{a}=\{6y^2,\ -5xyz,\ \ln z\}.$

3.15. $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{a}=?\quad \vec{a}=\{xy,xz,yx\}.$

3.16. $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{a}=?\quad \vec{a}=\{e^x,\ xe^z,\ -y^x\}.$

3.17. $\nabla\times\vec{a}=?\quad \vec{a}=\{xye^z,\ -y^z,\ y^2x\}.$

3.18. $\nabla\times\vec{a}=?\quad \vec{a}=\{3x^2,\ -2x^2y,\ 1-2x\}.$

3.19. $\nabla\times\vec{a}=?\quad \vec{a}=\{y^2+z^2,\ xy+y^2,\ xz+z\}.$

3.20. $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{a}=?\quad \vec{a}=\{xz,\ z,\ y\}.$

3.21. $\nabla\times\vec{a}=?\quad \vec{a}=\left\{\ln\left(x^2+y^2\right),\ \frac{y}{x},\ -x^2\right\}.$

3.22. $\nabla\times\vec{a}=?\quad \vec{a}=\{\sin xz,\ -x\operatorname{tg}y,\ z^x\}.$

3.23. Найти векторные линии ВП $\vec{a}=\{5y,\ -4x\}$.

3.24. $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{a}=?\quad \vec{a}=\{xz+y^2,\ xy+x^2,\ -y^2z-x^2\}.$

3.25. $\operatorname{div}\vec{a}=?\quad \vec{a}=\left\{\sqrt{x^2+y^2},\ \ln yz,\ -\frac{x}{z}\right\}.$

3.26. $\operatorname{div}\vec{a}=?\quad \vec{a}=\{(xy)^z,\ -e^{yz},\ 3x^2-z\}.$

3.27. $\operatorname{rot}\vec{a} = ?\quad \vec{a} = \left\{x^2yz,\ -xy^2z,\ xyz^2\right\}.$

3.28. $\nabla\times\vec{a} = ?\quad \vec{a} = \left\{\arcsin 3x,\ -e^{xy},\ \ln(z-x)\right\}.$

3.29. $\left(\operatorname{div}\vec{a}\right)_{M_0} = ?\quad \vec{a} = \left\{y-x^2, z-y, x+\frac{1}{z}\right\},\ M_0(1,0,1).$

3.30. $\nabla\times\vec{a} = ?\quad \vec{a} = z^3\vec{i} + y^3\vec{j} - x^3\vec{k}.$

Библиографический список

1. Кондратьев, В. В. Высшая математика: конспект лекций: в 3 ч. Ч. *III* / В. В. Кондратьев – Казань: КГТУ, 1998. – 120с.

2. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: учебное пособие для втузов / под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. - 368с.

3. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие для втузов / А. В. Минорский. - М.: Наука, 1987. - 352 с.

4. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. - М.: Наука, 1985. - 384с.

5. Запорожец, Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г. И. Запорожец. - М.: Высш. школа, 1966. - 460с.

6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. *II*. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - М.: Высш. школа, 1980. - 365с.

Оглавление

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

А, α – альфа

В, β – бэта

Г, γ – гамма

Δ, δ – дельта

Е, ε – эпсилон

Z, ς – дзэта

Н, η – эта

Θ, ϑ – тэта

I, i – йота

Λ, λ – ламбда

М, μ – мю

N, ν – ню

Ξ, ξ – кси

О, o – омикрон

П, π – пи

Р, ρ – ро

Σ, σ, ζ – сигма

Т, τ – тау

Ф, φ – фи

Х, χ – хи

Ψ, ψ – пси

Ω, ω – омега